BAN GIÁO VIÊN NĂNG KHIẾU TRƯỜNG THI
NGUYỄN ĐỨC ĐỒNG (Chủ biên)

Tuyển tập 500 bài toán HÌNH KHÔNG GIAN CHỌN LỌC

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI THEO 23 CHUYÊN ĐỀ



(Tái bản lần thứ ba, có sửa chữa bổ sung)

- BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
- CHUẨN BỊ THI TÚ TÀI, ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG


NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

BAN GIÁO VIÊN NĂNG KHIẾU TRƯỜNG THI
NGUYỄN ĐỨC ĐỒNG (*Chủ biên*)

TUYỂN TẬP 500 BÀI TOÁN

HÌNH KHÔNG GIAN

CHỌN LỌC

☐ **PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI THEO 23 CHUYÊN ĐỀ**

- **Bồi dưỡng học sinh giỏi**
- **Chuẩn bị thi Tú tài, Đại học và Cao đẳng**

(Tái bản lần thứ ba, có sửa chữa bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896
Hành chính: (04) 39714899; Tổng Biên tập: (04) 39715011
. Fax: (04) 39714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: THUỲ HOA
Sửa bài: THÁI VĂN
Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: THÁI VĂN

SÁCH LIÊN KẾT

TUYỂN TẬP 500 BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN CHỌN LỌC
Mã số: 1L - 195ĐH2014
In 1.000 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ti Cổ phần Văn hoá Văn Lang - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 664 - 2014/CXB/01-127/ĐHQGHN ngày 10/03/2014.
Quyết định xuất bản số: 198LK - TN/QĐ - NXBĐHQGHN ngày 15/04/2014.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2014.

LỜI NÓI ĐẦU

Chúng tôi xin giới thiệu đến đọc giả bộ sách: Tuyển tập các bài toán dành cho học sinh lớp 12, chuẩn bị thi vào các trường Đại học & Cao đẳng.

Bộ sách gồm 7 quyển :

- TUYỂN TẬP 546 BÀI TOÁN TÍCH PHÂN
- TUYỂN TẬP 540 BÀI TOÁN KHẢO SÁT HÀM SỐ
- TUYỂN TẬP 500 BÀI TOÁN HÌNH GIẢI TÍCH
- TUYỂN TẬP 500 BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN
- TUYỂN TẬP 696 BÀI TOÁN ĐẠI SỐ
- TUYỂN TẬP 599 BÀI TOÁN LƯỢNG GIÁC
- TUYỂN TẬP 670 BÀI TOÁN RỜI RẠC VÀ CỰC TRỊ

Nhằm phục vụ cho việc rèn luyện và ôn thi vào Đại học bằng phương pháp tìm hiểu các đề thi đại học đã ra, để tự nâng cao và chuẩn bị kiến thức cần thiết.

Để phục vụ cho các đối tượng tự học : Các bài giải luôn chi tiết và đầy đủ, phân nhỏ từng loại toán và đưa vào đó các phương pháp hợp lí.

Mặc dù chúng tôi đã cố gắng hết sức trong quá trình biên soạn, song vẫn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi mong đón nhận mọi góp ý, phê bình từ quý đồng nghiệp cùng đọc giả để lần xuất bản sau sách được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng, chúng tôi xin cảm ơn NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI đã giúp đỡ chúng tôi mọi mặt để bộ sách được ra đời.

NGUYỄN ĐỨC ĐỒNG

BẢNG KÊ CÁC KÍ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT TRONG SÁCH

CÁC KÍ HIỆU TOÁN HỌC VÀ CÁC TỪ VIẾT TẮT	
• $\overset{(i)}{\Leftrightarrow}$: (i) tương đương • $\overset{(i)}{\Rightarrow}$: (i) kéo theo • $\not\Leftrightarrow$: không tương đương • $\not\Rightarrow$: không kéo theo • $\equiv$: đồng nhất • $\neq$: không đồng nhất • $S_{\Delta ABC} = S(ABC) = dt(ABC)$: diện tích ΔABC • $V_{S.ABC} = V(S.ABC)$: thể tích hình chóp S.ABC • S_{tp} : Diện tích toàn phần • S_{xq} : Diện tích xung quanh • V : Thể tích • $A' = {}^{hc}/_{(\alpha)} A$: A' là hình chiếu của A xuống mặt phẳng (α) • $A' = {}^{hc}/_{(d)} A$: A' là hình chiếu của A xuống đường thẳng (d) • d[M; (D)] : khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (D) • d[M; (ABC)] : khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) • $\widehat{(\alpha; \beta)}$: góc nhị diện tạo bởi 2 nửa mặt phẳng (α) và (β) • (S; AB; D) = (AB) : nhị diện cạnh AB • $\widehat{(d; d')}$: góc tạo bởi hai đường thẳng d và d' • $[\widehat{d; (ABC)}]$: góc tạo bởi đường thẳng d và mp(ABC)	• $[\widehat{(ABC); (EFG)}]$: góc tạo bởi 2 mp (ABC) và (EFG) • $\mathcal{T}_{\vec{v}}$: Phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ • $Đ_{\Delta}$: Phép đối xứng trục Δ • $Đ_{O}$: Phép đối xứng trục O • $Q(O; \varphi)$: Phép quay tâm O, góc quay φ. • VT(O; k) : Phép vị tự tâm O, tỉ số k. • **ĐN** : định nghĩa • **ĐL** : định lý • **HQ** : hệ quả • **CMR** : chứng minh rằng • **B** $_i$: bước i • **TH**$_i$: trường hợp i • **VT** : vế trái • **VP** : vế phải • **BĐT** : bất đẳng thức • **ycbt** : yêu cầu bài toán • **đpcm** : điều phải chứng minh • **gt** : giả thiết • **KL** : kết luận • **ĐK** : điều kiện • **PB** : phân ban • **CPB** : chưa phân ban

Chuyên đề 1 : TỔNG QUAN VỀ CÁC KHÁI NIỆM TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

❐ Hình học không gian là một môn học về các **vật thể trong không gian** (hình hình học trong không gian) mà các điểm hình thành nên vật thể đó thường thường không cùng nằm trong một mặt phẳng.

❐ Như vậy ngoài **điểm và đường thẳng không được định nghĩa** như trong hình học phẳng; môn hình học không gian còn xây dựng thêm một đối tượng cần nghiên cứu nữa là **khái niệm mặt phẳng cũng không được định nghĩa**. Khi nói tới khái niệm này ta liên tưởng đến một mặt bàn bằng phẳng, một mặt hồ nước yên lặng, một tờ giấy đặt dính sát trên một mặt đã được làm phẳng.... Nó được ký hiệu bởi các chữ in La Tinh như : (P), (Q), (R), ... hoặc các chữ thường Hy Lạp như (α), (β), (γ), ...

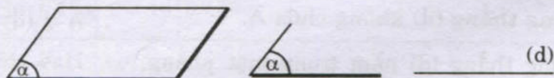
❐ Mặt phẳng không được định nghĩa qua một khái niệm khác; nhưng thực tế cho thấy mặt phẳng có những tính chất cụ thể sau, gọi là các tiên đề :

- TIÊN ĐỀ 1: **Có ít nhất bốn điểm trong không gian không thẳng hàng** (nghĩa là luôn luôn có ít nhất 1 điểm ở ngoài một mặt phẳng tùy ý).
- TIÊN ĐỀ 2: **Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng có hai điểm chung thì đường thẳng ấy sẽ nằm trọn vẹn trong mặt phẳng nêu trên.**
- TIÊN ĐỀ 3: **Nếu hai mặt phẳng có điểm chung thì chúng có vô số điểm chung: nên hai mặt phẳng đó cắt nhau theo một đường thẳng đi qua vô số điểm chung ấy.** Đường thẳng ấy gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
- TIÊN ĐỀ 4: **Có một và chỉ một mặt phẳng duy nhất đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng.**
- TIÊN ĐỀ 5: **Trênmột mặt phẳng tùy ý trong không gian các định lý hình học phẳng sơ cấp** (đã học từ lớp 6 đến lớp 10 và các định lý nâng cao) **đều đúng**.
- TIÊN ĐỀ 6: **Mỗi đoạn thẳng trong không gian đều có độ dài xác định** : tiên đề nêu lên sự bảo toàn về độ dài, góc và các tính chất liên thuộc đã biết trong hình học phẳng.

❐ Từ đó chúng ta có một số cách xác định mặt phẳng như sau :

- HỆ QUẢ 1: **Có một và chỉ một mặt phẳng duy nhất đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.**
- HỆ QUẢ 2: **Có một và chỉ một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau.**
- HỆ QUẢ 3: **Có một và chỉ một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng song song.**

❐ Đồng thời ta phải hiểu thêm rằng một mặt phẳng sẽ rộng không biên giới và đường thẳng có độ dài vô tận mặc dù ta sẽ biểu diễn nó một cách hình thức hữu hạn và khiêm tốn như sau:



❐ Để thực hiện được phép vẽ chính xác một hình hình học trong không gian ngoài các đường thấy vẽ liền nét, ta cần phải nắm chắc được khái niệm đường khuất vẽ bằng nét đứt đoạn: **Một đường bị khuất toàn bộ hay chỉ khuất một đoạn cục bộ nào đó khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một mặt phẳng đứng phía trước hoặc phía trên che nó một cách toàn bộ hoặc cục bộ tương ứng.**

- Muốn xác định nhanh một mặt phẳng trong không gian ta còn chọn thủ thuật thực hành : **Một hình tam giác, tứ giác hoặc đa giác phẳng (không gềnh), đường tròn, ..., luôn xác định một mặt phẳng trong không gian. Ta gọi các mặt phẳng đó là mặt phẳng hình thức với các ký hiệu (ABC), (ABCD), (C), ... tương ứng.**
  - **Mặt phẳng hình thức bị khuất nếu có một hay nhiều mặt phẳng nào đó che nó.**
  - **Một đường thẳng nằm trong mặt phẳng hình thức mà mặt đó bị khuất cục bộ hay toàn bộ và khi đường thẳng đó không là biên của mặt phẳng bị khuất đó, thì đường thẳng đó cũng tương ứng khuất cục bộ hay toàn bộ.**
  - **Một điểm nằm trong một mặt phẳng hình thức bị khuất thì gọi là điểm khuất.**
  - **Nối hai điểm mà ít nhất có một điểm khuất thì được một đường khuất cục bộ hay toàn bộ : nếu hai đường đó không là biên của các mặt phẳng hình thức che nó.**

- **CÁC HÌNH ẢNH MINH HỌA**

(d), α	• (d) bị (α) che khuất cục bộ, do (d) có 1 đoạn vẽ nét đứt đoạn nằm dưới (α).
S, (d), A, B, C	• (d) bị mặt phẳng (SAC) che khuất cục bộ, do (d) có một đoạn vẽ đứt đoạn nằm sau (SAC) (hiển nhiên (d) cũng ở sau các mặt (SAB), (SBC)). • Cạnh AC bị hai mặt phẳng (SBC) và (SBC) che khuất toàn bộ, do cả đoạn AC xem như hoàn toàn ở sau đồng thời hai mặt phẳng (SAB), (SBC).
B_1, A_1, D_1, C_1, F, E, B, H, A, C, D	• A_1H bị che toàn bộ do cả đoạn A_1H nằm sau mặt phẳng (A_1ADD_1), mặc dù nó ở trước mặt phẳng (ABB_1A_1) và ở trên mặt phẳng (ABCD). • (d) bị che khuất cục bộ vì có đoạn EF vẽ nét đứt đoạn nằm sau hai mặt phẳng (ADD_1A_1); (CDD_1C_1), mặc dù đoạn EF ở phía trước hai mặt phẳng (ABB_1A_1); (BCC_1B_1); và ở trên mặt phẳng (ABCD).

- **CÁC KÝ HIỆU CẦN NHỚ**

Thứ tự	Ký hiệu	Ý nghĩa	Ghi chú
1	$A \in (d)$	Điểm A thuộc đường thẳng (d) hay đường thẳng (d) chứa A.	Hay viết nhầm là : $A \subset (d)$
2	$A \notin (d)$	Điểm A ở ngoài đường thẳng (d) hay đường thẳng (d) không chứa A.	Hay viết nhầm là : $A \not\subset (d)$
3	$(d) \subset (\alpha)$	Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (α) hay (α) quay quanh (α) nếu (α) lưu động.	Hay viết nhầm là : $(d) \in (\alpha)$
4	$(d) // (\alpha)$	Đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (α).	Cách viết khác : $(d) \cap (\alpha) = \varnothing$
5	$(d) \cap (\alpha) = A$	Đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (α) tại A.	Cách viết khác : $(d) \cap (\alpha) = \{A\}$

6	$(d_1) \cap (d_2) = A$	Hai đường thẳng (d_1), (d_2) đồng quy tại A.	Cách viết khác : $(d_1) \cap (d_2) = \{A\}$
7	$(d_1) // (d_2)$	Hai đường thẳng (d_1), (d_2) song song nhau nếu chúng.	Hay viết nhầm là : $(d_1) \cap (d_2) = \varnothing$
8	$(\alpha) \equiv (\beta)$	Hai mặt phẳng (α) và (β) trùng nhau khi cùng chứa 3 điểm A, B, C phân biệt không thẳng hàng.	Cách viết khác : $(\alpha) = (\beta)$
9	$(\alpha) \equiv (ABC)$	Mặt phẳng (α) xác định bởi ba điểm A, B, C phân biệt và không thẳng hàng.	(ABC) : là mặt phẳng hình thức với ba đường biên AB, BC, AC.
10	$(\alpha) \equiv (A; d)$	Mặt phẳng (α) xác định bởi điểm A và đường thẳng (d) không qua A.	(A; d) : là mặt phẳng hình thức
11	$(\alpha) \equiv (d_1; d_2)$	Mặt phẳng (α) xác định bởi hai đường thẳng d_1, d_2.	• d_1, d_2 có thể song song hoặc đồng quy. • $(d_1; d_2)$ là mặt phẳng hình thức.

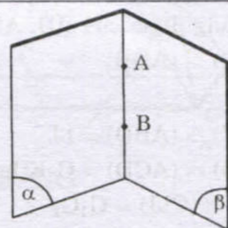
Loại 1 : TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP$_1$

Cơ sở của phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) cần thực hiện 2 bước cơ bản :

❒ **B_1 :** Tìm hai điểm chung A, B của (α) và (β).

❒ **B_2 :** Đường thẳng AB là giao tuyến cần tìm hay $AB = (\alpha) \cap (\beta)$ (ycbt).



II. PHƯƠNG PHÁP$_2$

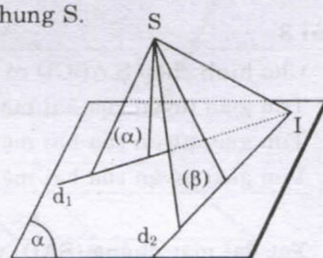
❒ Tương tự như phương pháp 1 khi chỉ tìm ngay được 1 điểm chung S.

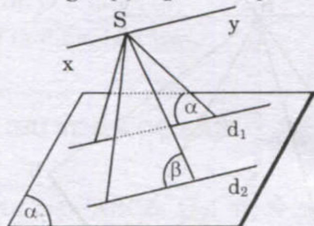
❒ Lúc này ta có hai trường hợp :

➢ Hai mặt phẳng (α), (β) thứ tự chứa hai đường thẳng (d_1), (d_2) mà $(d_1) \cap (d_2) = I$

$\Rightarrow$ SI là giao tuyến cần tìm.

➢ Hai mặt phẳng (α), (β) thứ tự chứa hai đường thẳng (d_1), (d_2) mà $(d_1) // (d_2)$.





Dựng xSy song song với (d_1) hay (d_2)

$\Rightarrow$ xSy là giao tuyến cần tìm.

III. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 1

Cho tứ giác lồi ABCD có các cạnh đối không song song và điểm S ở ngoài (ABCD). Tìm giao tuyến của :

a/ (SAC) và (SBD).

b/ (SAB) và (SDC); (SAD) và (SBC).

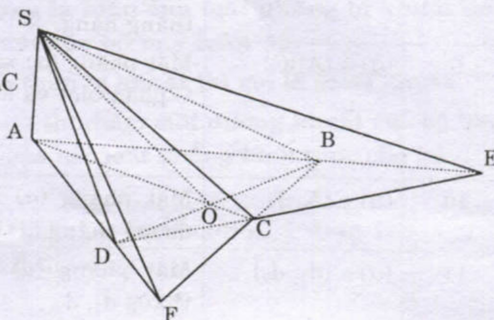
Giải

a/ Xét hai mặt phẳng (SAC) và (SBD), ta có :

- S là điểm chung thứ nhất. (1)
- Trong tứ giác lồi ABCD, hai đường chéo AC $\cap$ BD = O : điểm chung thứ nhì (2).

Từ (1) và (2) suy ra :

(SAC) $\cap$ (SBD) = SO (ycbt)



b/ Xét hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) cũng có :

- S là một điểm chung.
- Hai cạnh bên AB và CD của tứ giác ABCD theo giả thiết không song song.

$\Rightarrow$ AB $\cap$ CD = E : là điểm chung thứ hai.

Do đó : (SAB) $\cap$ (SDC) = SE (ycbt)

Tương tự : (SAD) $\cap$ (SBC) = SF (ycbt); với F = AD $\cap$ BC; do AD $\not\parallel$ BC.

Bài 2

Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm hai tam giác BCD và ACD. Lấy theo thứ tự I, J, K là trung điểm của BD, AD, CD.Tìm các giao tuyến :

a/ $(G_1G_2C) \cap (ADB)$

b/ $(G_1G_2B) \cap (ACD)$

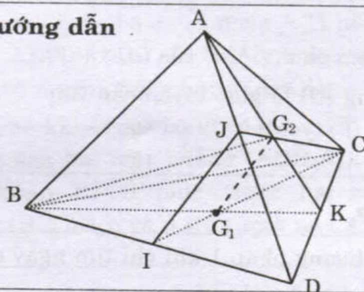
c/ (ABK) $\cap$ (CIJ).

Hướng dẫn

a/ $(G_1G_2C) \cap (ABD)$ = IJ

b/ $(G_1G_2B) \cap (ACD) = G_2K$ hoặc AK

c/ (ABK) $\cap$ (CIJ) = G_1G_2



Bài 3

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O.

a/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

c/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Giải

a/ Xét hai mặt phẳng (SAD) và (SBC), ta có :

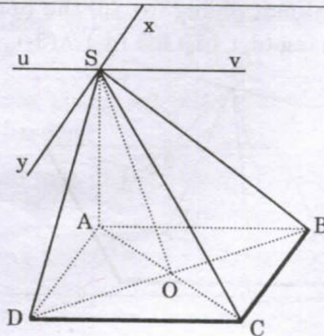
- S là điểm chung thứ nhất.
- Để ý AD $\subset$ (SAD); BC $\subset$ (SBC) mà AD // BC.

Ta dựng xSy // AD hoặc BC.

$$\Rightarrow \begin{cases}(SAD) = (xSy; AD)\\(SBC) = (xSy; BC)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ (SAD) $\cap$ (SBC) = xSy (ycbt).

b/ Tương tự, dựng uSv // AB hoặc CD



⇒ (SAB) ∩ (SCD) = uSv (ycbt)

c/ Gọi O = AC ∩ BD, tương tự bài 1

⇒ (SAC) ∩ (SBD) = SO (ycbt).

Bài 4

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD với AB là đáy lớn. Gọi M là một điểm bất kỳ trên SD và EF là đường trung bình của hình thang.

a/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

c/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (MAB).

Hướng dẫn

Độc giả tự giải tương tự như các bài trên.

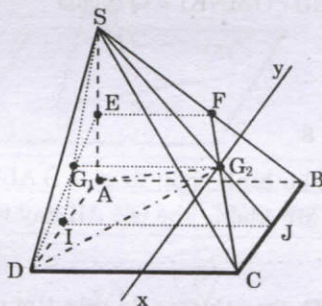
Bài 5

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm các tam giác SAD; SBC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a/ (SG_1G_2) và (ABCD) b/ (CDG_1G_2) và (SAB) c/ (ADG_2) và (SBC).

Hướng dẫn

Gọi I, J, E, F thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng AD, BC, SA, SB theo thứ tự đó. Thực hiện các lập luận như các bài toán trên :



a/ $(SG_1G_2) \cap (ABCD) = IJ$ (ycbt)

b/ $(CDG_1G_2) \cap (SAB) = EF$ (ycbt)

c/ $(ADG_2) \cap (SBC) = xG_2y$ (ycbt)

Trong đó xG_2y // AD hoặc BC.

Loại 2 : TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

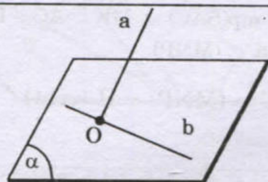
I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp tìm giao điểm O của đường thẳng (a) và mặt phẳng (α) là xét 2 hai khả năng xảy ra :

- Trường hợp (α) chứa đường thẳng (b) và (b) lại cắt đường thẳng (a) tại O.

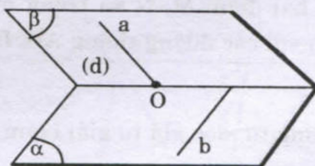
  Tìm O = (a) ∩ (b)

  ⇒ O là điểm cần tìm.



- Trường hợp (α) không chứa đường thẳng nào cắt (a).
  - Tìm (β) ⊃ (a) và (α) ∩ (β) = (d)
  - Tìm O = (a) ∩ (d)

  ⇒ O là điểm cần tìm.

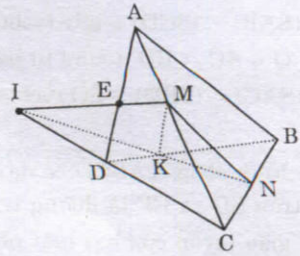


II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 6

Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Lấy điểm K ∈ BD sao cho KB > KD. Tìm giao điểm của hai đường thẳng CD và AD với (MNK).

Giải



- Để ý đến KB > KD $\Rightarrow$ KN không song song CD

  Do đó trong (BCD) $\Rightarrow$ KN $\cap$ CD = I.

  Mà KN $\subset$ (MNK) $\Rightarrow$ CD $\cap$ (MNK) = I (ycbt)

- Tương tự xét IM $\subset$ (MNK), trong (ADC)

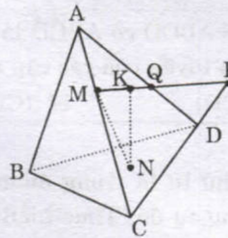
  Ta có : AD $\cap$ IM = E

  $\Rightarrow$ AD $\cap$ (MNK) = E (ycbt)

Bài 7

Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M trên AC và hai điểm N và K thứ tự nằm trong các tam giác BCD và ACD. Dựng giao điểm của CD và AD với (MNK).

Hướng dẫn



Độc giả tự giải, xem hình bên.

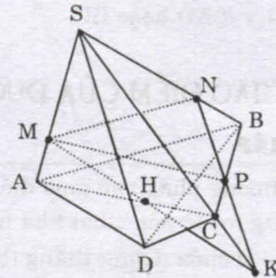
a/ CD $\cap$ (MNK) = P (ycbt)

b/ AD $\cap$ (MNK) = Q (ycbt)

Bài 8

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Lấy trên SA, SB và BC ba điểm M, N, P theo thứ tự sao cho MP không thể cắt AB hay CD. Tìm giao điểm của SC và AC với (MNP).

Giải



- Thường thường do ycbt tìm giao điểm

  $\left.\begin{array}{l}\Rightarrow NP \cap SC = K \\ \text{mà } NP \subset (MNP)\end{array}\right\} \Rightarrow SC \cap (MNP) = K$ (ycbt)

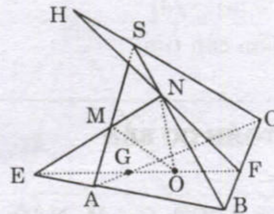
- $\left.\begin{array}{l}\text{Trong mp(SAC)} \Rightarrow MK \cap AC = H \\ \text{mà } MK \subset (MNP)\end{array}\right\}$

  $\Rightarrow$ AC $\cap$ (MNP) = H (ycbt)

Bài 9

Cho một tam giác ABC và một điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa tam giác. Trên SA và SB ta lấy hai điểm M, N và trong mặt phẳng (ABC) ta lấy một điểm O. Định rõ giao điểm của (MNO) với các đường thẳng AB, BC, AC và SC.

Hướng dẫn



Tương tự, độc giả tự giải (xem hình bên)

AB $\cap$ (MNO) = E (ycbt)

BC $\cap$ (MNO) = F (ycbt)

AC $\cap$ (MNO) = G (ycbt)

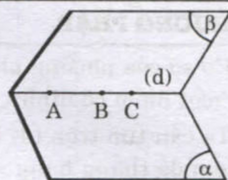
SC $\cap$ (MNO) = H (ycbt)

Loại 3 : CHỨNG MINH BA ĐIỂM TRONG KHÔNG GIAN THẲNG HÀNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp cần phải chứng minh ba điểm trong yêu cầu bài toán là điểm chung của 2 mặt phẳng nào đó (chẳng hạn A, B, C nằm trên giao tuyến (d) của hai mặt phẳng đó nên A, B, C thẳng hàng).

Ở đây không loại trừ khả năng chứng minh được đường thẳng AB qua C $\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng.



II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 10

Xét ba điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (α). Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AB, BC, CA và (α). Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

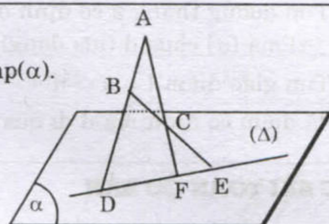
Giải

Để ý thấy D, E, F vừa ở trong mp(ABC) vừa ở trong mp(α).

Do A, B, C $\notin (\alpha)$, nên (α) và (ABC) phân biệt nhau.

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = \Delta$ (Δ chứa D, E, F)

$\Rightarrow$ D, E, F thẳng hàng trên Δ (đpcm).



Bài 11

Hai tam giác ABC, A'B'C' không đồng phẳng có $AB \cap A'B' = I$, $AC \cap A'C' = J$, $BC \cap B'C' = K$. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Giải

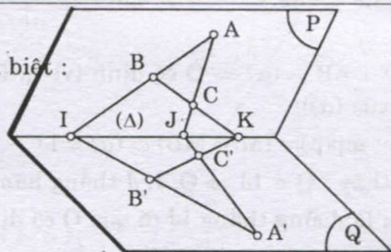
Để ý I, J, K lần lượt ở trên hai mặt phẳng phân biệt :

(P) $\equiv$ (ABC) và (Q) $\equiv$ (A'B'C').

Nên nó là điểm chung của hai mặt phẳng đó

$\Rightarrow$ I, J, K $\in (\Delta) = (ABC) \cap (A'B'C')$

$\Rightarrow$ I, J, K thẳng hàng (đpcm).



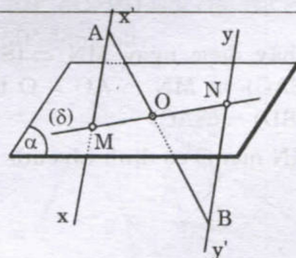
Bài 12

Cho A, B là hai điểm ở hai phía khác nhau đối với mặt phẳng α và AB cắt α tại O. Dựng hai đường thẳng x'Ax, y'By song song nhau theo thứ tự cắt α tại M và N. Chứng minh M, N, O thẳng hàng.

Hướng dẫn

Tương tự : $\begin{cases} M, O, N \in (\delta) \\ \delta \equiv (Ax; By) \cap (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow$ M, N, O thẳng hàng trên (δ)



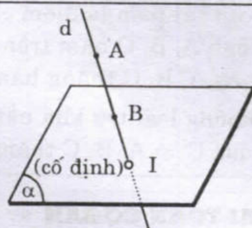
Loại 4 : CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

I. PHƯƠNG PHÁP$_1$

Cơ sở của phương pháp chứng minh đường thẳng (d) qua một điểm cố định :

Ta cần tìm trên (d) hai điểm tùy ý A; B và chứng minh 2 điểm đó thẳng hàng với một điểm I cố định có sẵn trong không gian.

$\Rightarrow$ (d) qua I cố định (đpcm).



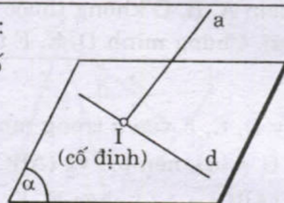
II. PHƯƠNG PHÁP$_2$

Cơ sở của phương pháp cần thực hiện ba bước cơ bản :

❐ **B_1** : Tìm đường thẳng a cố định ở ngoài mặt phẳng cố định (α) mà (α) chứa d (lưu động).

❐ **B_2** : Tìm giao điểm $I = a \cap d$

$\Rightarrow$ I là điểm cố định mà d đi qua



III. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 13

Cho A, B là hai điểm cố định trong không gian ở về hai phía khác nhau của mặt phẳng cố định α. Xét điểm M lưu động trong không gian sao cho $MA \cap \alpha = I$ và $MB \cap \alpha = J$. Chứng minh đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.

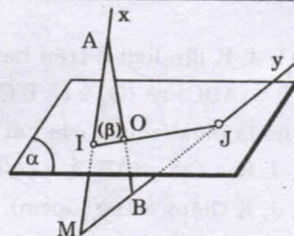
Giải

Gọi $O = AB \cap (\alpha) \Rightarrow$ O cố định (vì A, B cố định và ở 2 phía của (α))

Ta có : $mp(\beta) \equiv (MA; MB) \cap (\alpha) = IJ$

Để ý thấy : $O \in IJ \Rightarrow$ O, I, J thẳng hàng.

Nghĩa là đường thẳng IJ đi qua O cố định (đpcm)



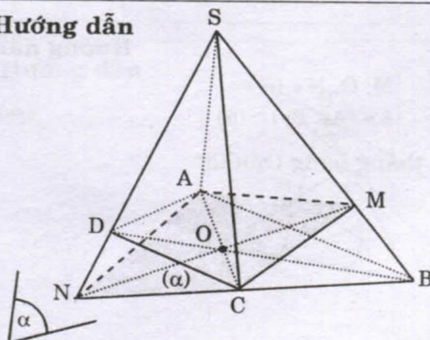
Bài 14

Cho hình thang ABCD (AB // CD và AB > CD). Xét điểm $S \notin (ABCD)$ và mặt phẳng α lưu động quanh AC với $\alpha \cap SB = M$, $\alpha \cap SD = N$. Chứng minh đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

Dễ thấy được ngay $MN \subset (SBD)$ và $AC \subset (SAC)$ và $MN \cap AC = O$ thì $O \in BD = (SBD) \cap (SAC)$

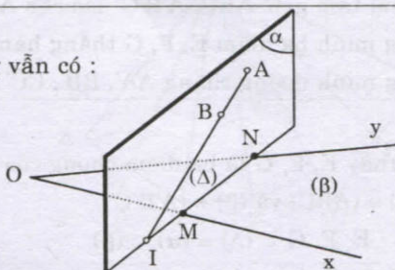
$\Rightarrow$ MN qua O cố định (đpcm).



Bài 15

Cho hai đường thẳng đồng quy Ox, Oy và hai điểm A, B không nằm trong mặt phẳng (xOy). Một mặt phẳng lưu động (α) qua AB luôn luôn cắt Ox, Oy tại M, N. Chứng tỏ MN qua một điểm cố định.

Giải



Để ý thấy khi (α) quay quanh AB cố định nhưng vẫn có :

$(\alpha) \cap [(Ox; Oy) \equiv (\beta)] = \Delta$ (qua M, N)

Nhưng $\begin{cases} AB \text{ cố định} \\ \beta \text{ cố định} \end{cases} \Rightarrow AB \cap (\beta) = I \in \Delta$

Nghĩa là đường thẳng $MN \equiv \Delta$ lưu động nhưng vẫn qua I cố định. (đpcm)

Loại 5 : CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN ĐỒNG QUY

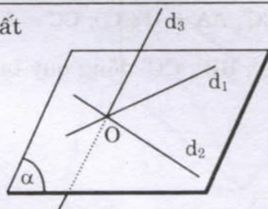
I. PHƯƠNG PHÁP$_1$

Cơ sở của phương pháp là ta cần chứng minh đường thứ nhất qua giao điểm của 2 đường còn lại bằng 2 bước cơ bản :

❒ **B_1** : Tìm $(d_1) \cap (d_2) = O$

❒ **B_2** : Chứng minh (d_3) qua O.

$\Rightarrow (d_1), (d_2), (d_3)$ đồng quy tại O (đpcm)

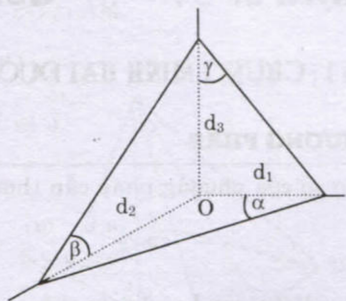


II. PHƯƠNG PHÁP$_2$

Cơ sở của phương pháp là ta cần chứng minh chúng đôi một cắt nhau và đôi một ở trong 3 mặt phẳng phân biệt qua 2 bước cơ bản :

❒ **B_1** : Xác định $\begin{cases} d_1,\ d_2 \subset \alpha;\ d_1 \cap d_2 = I_1 \\ d_2,\ d_3 \subset \beta;\ d_2 \cap d_3 = I_2 \\ d_3,\ d_1 \subset \gamma;\ d_3 \cap d_1 = I_3 \\ \alpha, \beta, \gamma \text{ phân biệt} \end{cases}$

❒ **B_2** : Kết luận $(d_1); (d_2); (d_3)$ đồng quy tại $O \equiv I_1 \equiv I_2 \equiv I_3$

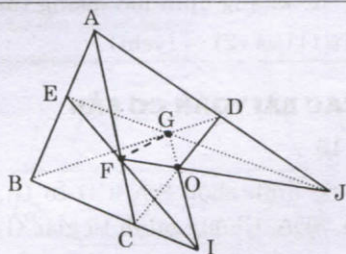


III. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 16

Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho $EF \cap BC = I$, $EG \cap AD = J$ (với $I \neq C$ và $J \neq D$). Chứng minh CD, IG và JF đồng quy.

Giải



Xét ba đường thẳng CD; IG và JF, ta thấy :

$\begin{cases} CD, IG \subset (BDC) \text{ và } CD \cap IG \neq \varnothing \\ IG, JF \subset (EFG) \text{ và } IG \cap JF \neq \varnothing \\ JF, CD \subset (ACD) \text{ và } JF \cap CD \neq \varnothing \end{cases}$

Và ba mặt phẳng (BCD), (EFG), (ACD) luôn phân biệt (vì $I \neq C$ và $J \neq D$) $\Rightarrow$ CD, IG, JF đồng quy tại O (đpcm).

✪ Cách khác

Độc giả chứng minh rằng JF qua O = IG ∩ CD ⇒ CD; IG và JF đồng quy.

Bài 17

Cho hai tam giác ABC, A'B'C' sao cho AB cắt A'B' ở E, AC cắt A'C' ở F; BC cắt B'C' ở G.

a/ Chứng minh ba điểm E, F, G thẳng hàng.

b/ Chứng minh đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

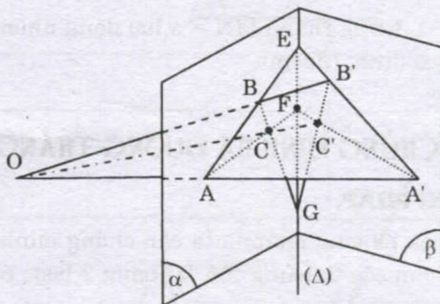
Giải

a/ Để ý thấy E, F, G là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt

$(\alpha) \equiv (ABC)$ và $(\beta) \equiv (A'B'C')$.

Do đó : $E, F, G \in (\Delta) = (\alpha) \cap (\beta)$.

Vậy E, F, G thẳng hàng (đpcm).



b/ Nhận xét như sau :

$$\begin{cases} AA', BB' \subset (EAA');\ AA' \cap BB' \neq \varnothing \\ BB', CC' \subset (GBB');\ BB' \cap CC' \neq \varnothing \\ CC', AA' \subset (FCC');\ CC' \cap AA' \neq \varnothing \end{cases}$$

⇒ AA', BB', CC' đồng quy tại O (đpcm).

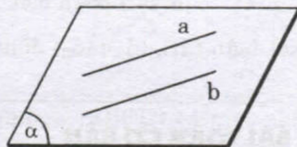
Chuyên đề 2 : QUAN HỆ SONG SONG

Loại 1 : CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp cần thực hiện hai bước cơ bản cho định nghĩa a // b

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$$



❒ **B_1 :** Kiểm tra hai đường thẳng ở cùng trong một mặt phẳng hay hiểu ngầm rằng hiển nhiên điều đó xảy ra nếu chúng trong 1 hình phẳng nào đó. (1)

❒ **B_2 :** Dùng định lý Thalès, tam giác đồng dạng, tính chất bắc cầu (tính chất cùng song song với đường thứ ba) là hai cạnh của hình thang, hay hai cạnh đối của hình bình hành, ... để khẳng định hai đường thẳng đó không có điểm chung. (2)

Từ (1) và (2) ⇒ (ycbt)

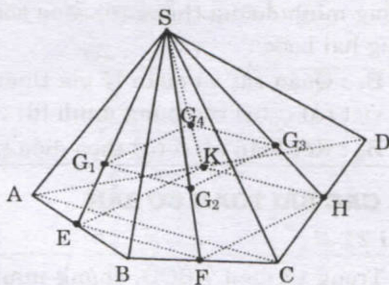
II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 18

Cho hình chóp S.ABCD có G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA. Chứng minh tứ giác $G_1G_2G_3G_4$ là hình bình hành.

Giải

Theo tính chất trọng tâm, ta có : $\begin{cases} \dfrac{SG_1}{SE} = \dfrac{SG_2}{SF} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{SG_3}{SH} = \dfrac{SG_4}{SK} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$



Định lý Thalès và tính chất đường trung bình

$\Rightarrow \begin{cases} G_1G_2 \,//\!= \dfrac{2}{3}EF\,;\, EF/\!/ = \dfrac{1}{2}AC \\ G_3G_4 \,//\!= \dfrac{2}{3}HK\,;\, HK/\!/ = \dfrac{1}{2}AC \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \,//\!= G_3G_4$

$\Rightarrow$ $G_1G_2G_3G_4$ là hình bình hành (đpcm).

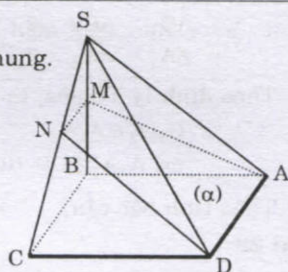
Bài 19

Cho điểm S ở ngoài mặt phẳng hình bình hành ABCD. Xét mặt phẳng α qua AD cắt SB và SC lần lượt ở M và N. Chứng minh AMND là hình thang.

Giải

Để ý thấy hai mặt phẳng (α) và (β) có 2 điểm M và N là điểm chung.

$\Rightarrow MN = (\alpha) \cap (SBC)$ mà $\begin{cases} (\alpha) \supset AD \\ (SBC) \supset BC \\ AD \,//\, BC \end{cases}$



và theo cách dựng MN // AD (hoặc BC)

$\Rightarrow$ ADNM là hình thang đáy lớn AD. (đpcm)

Bài 20

Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD. Gọi P là điểm tùy ý trên cạnh AB sao cho P ≠ A và P ≠ B. Xét $I = PD \cap AN$ và $J = PC \cap AM$.

Chứng minh rằng : IJ // CD.

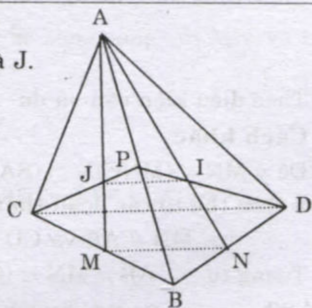
Giải

Xét hai mặt phẳng (AMN) và (PCD) có hai điểm chung là I và J.

$\Rightarrow IJ = (AMN) \cap (PCD)$

Nhưng $\begin{cases} CD \subset (PCD) \\ MN \subset (AMN) \\ \text{và } MN \,//\, CD \end{cases}$

$\Rightarrow$ IJ // MN hoặc CD (đpcm).



Loại 2 : CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

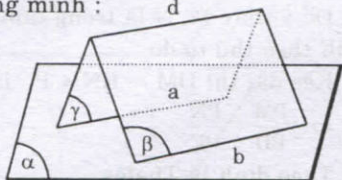
I. PHƯƠNG PHÁP$_1$

Cơ sở của phương pháp một là sử dụng định lý phương giao tuyến song song.

Để chứng minh d // α ta cần thực hiện hai bước cơ bản chứng minh :

❒ **B_1 :** Chứng minh $d = \gamma \cap \beta$ mà $\begin{cases} \gamma \cap \alpha = a \\ \beta \cap \alpha = b \\ a \,//\, b \end{cases}$.

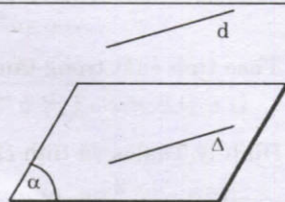
❒ **B_2 :** Kết luận từ trên d // α.



II. PHƯƠNG PHÁP$_2$

Cơ sở của phương pháp là sử dụng điều kiện cần và đủ chứng minh đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (α) bằng hai bước :

- ❐ B_1 : Quan sát và quản lý giả thiết tìm đường thẳng ưu việt $(\Delta) \subset (\alpha)$ và chứng minh (d) // (Δ).
- ❐ B_2 : Kết luận (d) // (α) theo điều kiện cần và đủ.

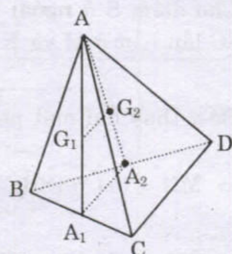


III. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 21

Trong tứ diện ABCD, chứng minh rằng đoạn nối hai trọng tâm G_1, G_2 của hai Δ ABC và ΔABD thì song song với (ACD).

Giải



Gọi A_1, A_2 là trung điểm BC và BD theo thứ tự đó, ta có :

$$\frac{AG_1}{AA_1} = \frac{AG_2}{AA_2} = \frac{2}{3}$$

Theo định lý Thalès, ta có :

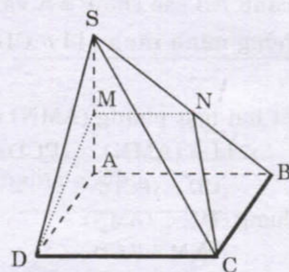
$$\begin{cases} G_1G_2 \,//\, A_1A_2 \\ \text{mà } A_1A_2 \,//\, CD \text{ (tính chất đường trung bình)} \end{cases}$$

Theo tính bắc cầu $\Rightarrow$ G_1G_2 // CD $\subset$ (ACD) $\Rightarrow$ G_1G_2 // (ACD) (đpcm)

Bài 22

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M, N là trung điểm SA và SB. Chứng minh : MN // (SCD) và AB // (MNCD).

Giải



Theo tính chất đường trung bình trong tam giác

$\Rightarrow$ MN // AB, mà AB // CD

$\Rightarrow$ MN // CD $\subset$ (SCD)

Theo điều kiện cần và đủ $\Rightarrow$ MN // (SCD) (ycbt).

✪ Cách khác

Để ý MN = (MNCD) $\cap$ (SAB) và trong hai mặt phẳng đó chứa theo thứ tự các đoạn thẳng CD // AB

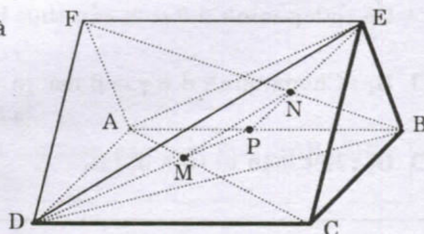
$\Rightarrow$ MN // AB và CD $\Rightarrow$ MN // (SCD) $\supset$ CD (ycbt)

Tương tự : AB // MN $\subset$ (CDMN) $\Rightarrow$ AB // (CDMN) (đpcm).

Bài 23

Xét hai hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng. Gọi M, N là hai điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$. Chứng minh rằng MN // (DEF).

Giải



Để ý thấy M, N là trong tâm của hai tam giác ABD và ABE theo thứ tự đó.

Kéo dài thì DM $\cap$ EN = P : là trung điểm AB.

$$\Rightarrow \frac{PM}{PD} = \frac{PN}{PE} = \frac{1}{3}$$

Theo định lý Thalès

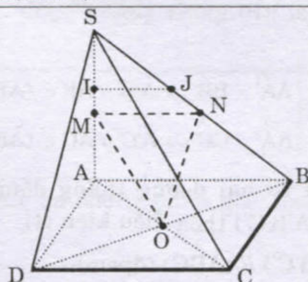
$\Rightarrow$ MN // ED $\subset$ (EFDC) $\equiv$ (DEF) (đpcm)

Bài 24

Hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD, tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB và xét hệ thức vectơ : $3\overrightarrow{SI} - 2\overrightarrow{SM} = 3\overrightarrow{SJ} - 2\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{0}$. Chứng minh rằng :

a/ IJ // (SCD) b/ SC // (MNO).

Hướng dẫn



a/ $\begin{cases} IJ // MN,\ MN // AB;\ AB // CD \Rightarrow\ MN // CD \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ IJ // (CSD) (đpcm)

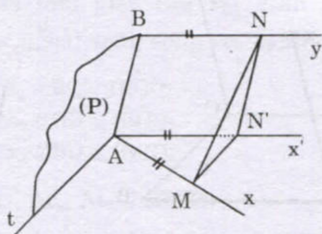
b/ $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{AO}{AC} \Rightarrow SC // MO \subset (OMN)$

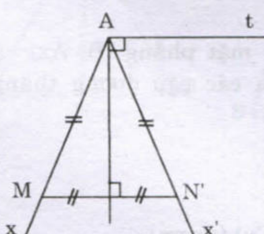
$\Rightarrow SC // (OMN)$ (đpcm)

Bài 25

Cho Ax, By là hai nửa đường thẳng chéo nhau. Trên Ax lấy điểm M, trên By lấy điểm N sao cho AM = BN. Chứng minh rằng đường thẳng chứa đoạn MN luôn luôn song song với mặt phẳng cố định.

Giải





Qua A dựng Ax' // By; qua N dựng NN' // BA; với N' $\in$ Ax'. Lúc đó tứ giác AN'NB là hình bình hành nên : AN' = BN $\Rightarrow$ AM = AN'

Để ý ΔAMN' cân ở A nên tia phân giác ngoài At của $\widehat{MAN'}$ sẽ song song với MN' và tia At này cố định hay AB và At xác định mặt phẳng cố định (P).

Ta có : $\begin{cases} MN' // At \\ NN' // AB \end{cases} \Rightarrow (MNN') // (P)$

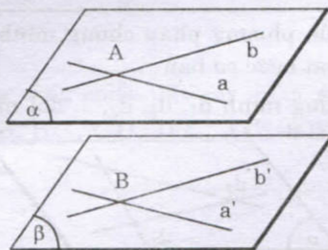
Vậy : MN // (P) tức là MN luôn luôn song song với mặt phẳng cố định (đpcm).

Loại 3 : HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Dạng 1 : CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp chứng minh hai mặt phẳng α và β song song nhau ta cần thực hiện hai bước cơ bản trong khi sử dụng điều kiện cần và đủ như sau :



❒ **B_1 :** Chứng minh "mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng a, b đồng quy thứ tự song song với hai đường thẳng a', b' đồng quy trong mặt phẳng β".

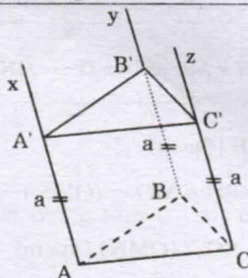
❒ **B_2 :** Kết luận (α) // (β) theo điều kiện cần và đủ.

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 26

Trên ba tia cùng chiều, song song và không đồng phẳng Ax, By, Cz lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho : AA' = BB' = CC' có độ dài khác không. Chứng minh (ABC) // (A'B'C').

Giải



Để ý : $\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow A'B' // AB \subset (ABC) \\ \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow A'C' // AC \subset (ABC) \end{cases}$ (I)

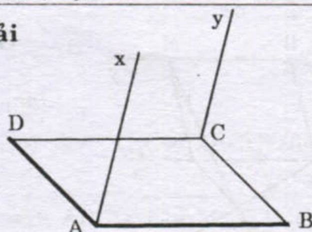
Nên ta có hai đường thẳng đồng quy A'B', A'C' trong mp(A'B'C') thỏa điều kiện (I).

$\Rightarrow$ (A'B'C') // (ABC) (đpcm)

Bài 27

Cho hình bình hành ABCD. Từ A và C kẻ Ax cà Cy song song cùng chiều và không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Chứng minh (B; Ax) // (D; Cy).

Giải



Tương tự xét hai mặt phẳng (B; Ax) và (D; Cy), thứ tự chứa các cặp đường thẳng đồng quy.

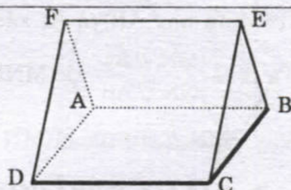
$\begin{cases} AB // CD \\ Ax // Cy \end{cases}$

$\Rightarrow$ (B; Ax) // (D; Cy) (đpcm)

Bài 28

Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Chứng minh (ADF) // (BCE).

Giải



Hai mặt phẳng (ADF) và (BCE) thứ tự chứa các cặp đường thẳng đồng quy.

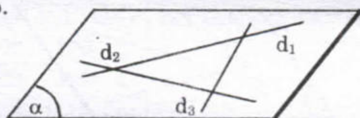
$\begin{cases} AF // BE \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow$ (ADF) // (BCE) (đpcm)

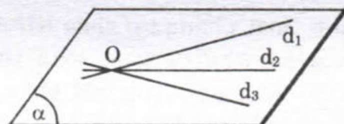
Dạng 2 : CHỨNG MINH CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG PHẲNG

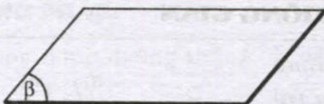
I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp chứng minh các đường thẳng d_1, d_2, d_3.. đồng phẳng là cần phải thực hiện hai bước cơ bản :

❑ **B_1 :** Chứng minh d_1, d_2, d_3, ... đôi một cắt nhau và cùng song song với một mặt phẳng (β) nào đó.









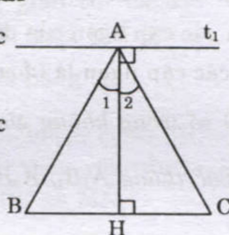
❒ B_2 : Kết luận $d_1, d_2, d_3, ... \subset (\alpha) // (\beta) \Rightarrow d_1, d_2, d_3, ...$ đồng phẳng trong (α); mà (α) phải chứa các giao điểm của $d_1, d_2, d_3, ...$

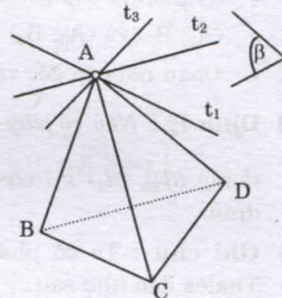
II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 29

Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD. Chứng minh rằng ba đường phân giác ngoài các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}, \widehat{DAB}$ cùng nằm trong một mặt phẳng.

Giải





Gọi At_1, At_2, At_3 là ba đường phân giác ngoài của góc : $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}, \widehat{DAB}$ theo thứ tự đó.

Do các tam giác cân tại đỉnh A nên các phân giác ngoài song song với cạnh đáy, nên :

$$\begin{cases} At_1 // BC \subset (BCD) \\ At_2 // CD \subset (BCD) \\ At_3 // BD \subset (BCD) \end{cases}$$

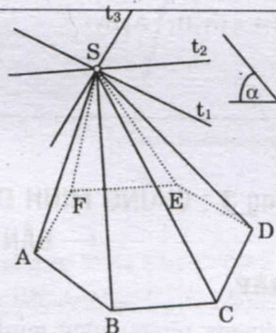
$\Rightarrow At_1, At_2, At_3 // (BCD)$

$\Rightarrow At_1, At_2, At_3$ đồng phẳng (trong $(\beta) // (BCD)$ và (β) qua A) (đpcm).

Bài 30

Cho hình chóp đáy là lục giác đều. Chứng minh rằng giao tuyến của mặt bên đối nhau thì đồng phẳng.

Giải



Để ý thấy :

$$\begin{cases} (SAB) \cap (SED) = t_1 // AB, ED \\ (SBC) \cap (SEF) = t_2 // BC, EF \\ (SCD) \cap (SFA) = t_3 // CD, FA \end{cases}$$

$\Rightarrow t_1, t_2, t_3 // (ABCDEF)$

Vậy t_1, t_2, t_3 đồng phẳng trong $(\alpha) // (ABCDEF)$ và (α) qua S. (đpcm)

Bài 31

Trên bốn tia phân biệt Ax, By, Cz và Dt song song cùng chiều, lấy các điểm A', B', C', D' sao cho AA' = BB' = CC' = DD'. Chứng minh rằng A'B, B'C', C'D', D'A', A'C', B'D' cùng song song với mặt phẳng ABCD.

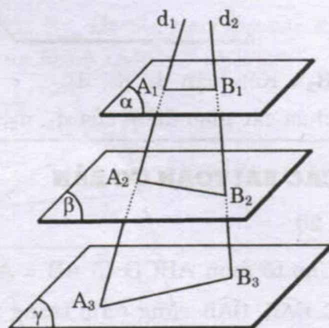
Hướng dẫn

Độc giả tự giải tương tự hai bài toán trên.

ĐỊNH LÝ THALÈS TRONG KHÔNG GIAN

★ **Định lý$_1$ (thuận) :** *Hai đường thẳng tùy ý d_1, d_2 trong không gian chắn trên các mặt phẳng song song nhau $(\alpha) // (\beta) // (\gamma)$ tạo ra các đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ :*

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3} = \frac{A_2B_2}{A_3B_3}$$



★ **Định lý$_2$ (đảo) :**

❒ Trước khi xét định lý đảo, ta quan tâm đến hai khái niệm sau khi xét đến các dãy tỷ số, chẳng hạn :

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3} \quad (*)$$

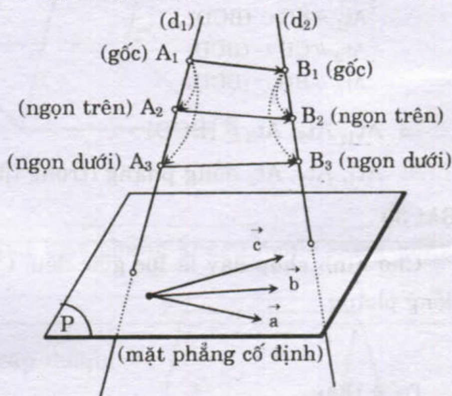
- $(A_1; B_1)$ là cặp gốc của dãy tỷ số (*).
- $(A_2; B_2)$ và $(A_3; B_3)$ là các cặp ngọn của dãy tỷ số (*).
- Đoạn nối cặp gốc và các cặp ngọn là (đoạn) bậc thang của dãy tỷ số (*).

❒ **Định lý :** *Nếu có dãy tỷ số trong không gian : $\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3}$ (*) đã xảy ra trên hai đường thẳng (d_1), (d_2) thì các bậc thang A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 cùng song song với một mặt phẳng cố định.*

✪ **Ghi chú :** Ta có phát biểu khác của định lý Thalès đảo như sau :

Với điều kiện có dãy tỷ số (*) đã xảy ra trên hai đường thẳng (d_1), (d_2) thì một trong 3 bậc thang A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sẽ song song với một mặt phẳng chứa hai bậc thang còn lại.

$$\left[\begin{array}{l} A_1B_1 // (\alpha) \equiv (A_2B_2\ ;A_3B_3) \\ A_2B_2 // (\beta) \equiv (A_3B_3\ ;A_1B_1) \\ A_3B_3 // (\gamma) \equiv (A_1B_1\ ;A_2B_2) \end{array}\right. \quad (☆)$$



Dạng 3 : CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẲNG BẰNG ĐỊNH LÝ THALÈS

I. PHƯƠNG PHÁP$_1$

Cơ sở của phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng bằng cách sử dụng định lý Thalès đảo trong không gian gồm hai bước cơ bản sau đây :

❒ **B_1 :** Xác định trên hai đường thẳng tùy ý chẳng hạn (d_1), (d_2) để tìm trên đó dãy tỷ số :

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3} \quad (*)$$

Xác định cặp $(A_1; B_1)$ là cặp gốc, các cặp $(A_1; B_2)$ và $(A_3; B_3)$ là hai cặp ngọn.

❒ **B_2 :** Lúc đó các đoạn bậc thang A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 được kết luận cùng song song với mặt phẳng (P) (xem ☆).

II. PHƯƠNG PHÁP$_2$

Ta chứng minh đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $(\alpha) // (\beta) \Rightarrow (d) // (\beta)$.

III. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

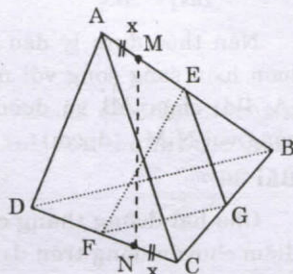
Bài 32

Cho tứ diện ABCD có AB = CD. Gọi M và N là hai điểm lưu động trên AB và CD sao cho AM = CN. Chứng minh MN luôn song somg với mặt phẳng cố định.

Giải

Nếu đặt AB = CD = a; AM = CN = x. Để ý thấy trên AB và CD ta có dãy tỷ số :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = \frac{x}{a} \Rightarrow \begin{cases} \text{(A; C) là cặp gốc} \\ \text{(M; N) và (B; D) là hai cặp ngọn tương ứng.} \end{cases}$$



Áp dụng định lý Thalès đảo trong không gian thì ba bậc thang AC, MN và BD cùng song song với một mặt phẳng (α) (lúc này (α) chưa cố định vì dãy tỷ số $\frac{x}{a}$ chưa là hằng số).

Ta dựng (α) như sau : gọi E, F, G là trung điểm các cạnh AB, DC, CB theo thứ tự đó thì $(\alpha) \equiv (EFG)$ và (α) thỏa yêu cầu là mặt phẳng cố định và cùng song song với AC, BD và MN.

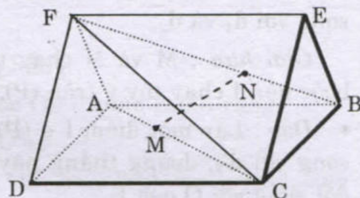
Vậy $MN // (EFG) \equiv (\alpha)$ cố định (đpcm)

Bài 33

Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng; trên các đương chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm tùy ý M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$. Chứng minh rằng ta luôn có : MN // (DEF).

Giải

Từ giả thiết $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$ (*)



Áp dụng định lý Thalès đảo cho các đoạn bậc thang : AB, MN, CF.

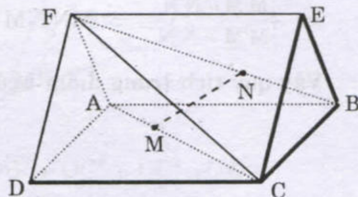
$\Rightarrow MN // (CDF)$; vì $AB // CD \subset (CDF)$

$\Rightarrow MN // (DEF) \equiv (CDF)$ (đpcm)

Bài 34

Cho hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF, ta lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Chứng minh rằng MN // (CEF).

Giải



Do hai hình vuông ABCD, ABEF bằng cạnh nên bằng nhau $\Rightarrow$ AC = BF.

Giả thiết $\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$

Áp dụng định lý Thalès cho các đoạn bậc thang : AB, MN, CF với để ý $EF \subset (CEF)$; $AB // EF \subset (CEF)$

$\Rightarrow MN // (CEF)$ (đpcm)

Bài 35

Trên hai tia Ax và By chéo nhau, ta lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho AM = k.BN (k > 0 cho trước). Chứng minh rằng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

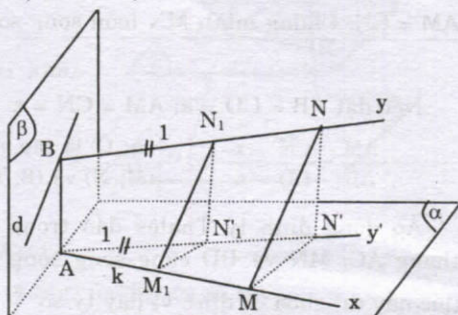
Hướng dẫn

Trước hết: $\begin{cases} \text{By lấy điểm } N_1 \text{ định bởi : } BN_1 = 1 \\ \text{Ax lấy điểm } M_1 \text{ định bởi : } AM_1 = k \text{ (vì } k > 0\text{, cho trước)} \end{cases}$

Hiển nhiên là hai điểm M_1 và N_1 cố định.

Theo giả thiết và từ cách dựng trên hình ta có :

$$\frac{AM_1}{BN_1} = \frac{AM}{BN} = k \Rightarrow \frac{AM_1}{AM} = \frac{BN_1}{BN}$$



Nên theo định lý đảo của định lý Thalès MN luôn luôn song song với mặt phẳng cố định $(\beta) \equiv$ (A; Bd) chứa AB và đường thẳng d qua B song song với N_1M_1. (đpcm)

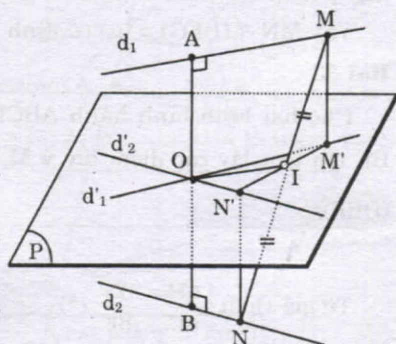
Bài 36

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2. M là một điểm chuyển động trên d_1 và N là một điểm chuyển động trên d_2. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN.

Hướng dẫn

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 ($A \in d_1$, $B \in d_2$); O là trung điểm của AB.

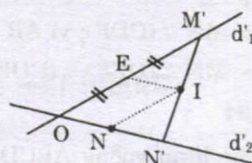
Ta có : $\frac{OA}{OB} = \frac{IM}{IN} = 1$



Theo định lý Thalès đảo thì OI nằm trong mặt phẳng (P) qua O song song với d_1 và d_2, tức là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng d'_1 và d'_2 qua O lần lượt song song với d_1 và d_2.

Giới hạn : M và N chạy trên d_1 và d_2 không có ràng buộc nên I chạy tùy ý trên (P).

- *Đảo :* Lấy một điểm $I \in (P)$. Qua I ta dựng đường thẳng song song với d'_2, đường thẳng này cắt d'_1 tại E. Lấy điểm $M' \in d'_1$ đối xứng với O qua E.



M'I cắt d'_2 ở N'. Định lý đường trung bình cho thấy I là trung điểm của M'N'. Từ M' và N' dựng các đường thẳng song song với AB. Chúng lần lượt cắt d_1 ở M và d_2 ở N.

Hai tứ giác OM'MA và ON'NB đều là những hình chữ nhật :

$\Rightarrow \begin{cases} M'M // N'N \\ M'M = N'N \end{cases} \Rightarrow$ MN'NM' là một hình bình hành do đó I là trung điểm của MN

Vậy quỹ tích trung điểm I của đoạn MN là mặt phẳng (P) đi qua O song song với d_1 và d_2.

Chuyên đề 3 : PHƯƠNG PHÁP TIÊN ĐỀ

Ta đã thấy được khi giải toán hình học trong không gian từ hai chuyên đề trước một cách chưa tường minh lắm việc sử dụng hai tiên đề 5 và tiên đề 6 thế nào ?

Đến đây, để khắc phục việc đó. Chúng tôi đưa vào một chuyên đề PHƯƠNG PHÁP TIÊN ĐỀ với một mong muốn là độc giả sẽ thực sự thấy được một cách chính xác hơn, tường minh hơn : **sự cần thiết của tiên đề 5 và tiên đề 6**. Hiển nhiên việc giới thiệu rộng rãi như thế đòi hỏi độc giả cần chuẩn bị một ít kiến thức về sự vuông góc và những khái niệm về các hình khối.

Sau những suy nghĩ và trăn trở trong suốt quá dạy học và viết sách chúng tôi hy vọng được độc giả đồng cảm với việc đặt chuyên đề 3 ở vị trí này trong quyển sách chỉ một cách ước lệ cũng là đủ.

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp là sử dụng sự cần thiết của hai tiên đề 5 và tiên đề 6 để xây dựng và chứng minh một số bài toán cơ bản trong không gian khi hình thành nên các vật thể (hiển nhiên 4 tiên đề ở trước đã được ngầm hiểu là luôn luôn được sử dụng).

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 37

Cho a, b, c là ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng : a, b, c đồng quy.

Giải

Thật vậy : giả sử a, b, c không đồng quy, thì các giao điểm của chúng lập thành ba điểm không thẳng hàng và ba đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng. Trái với giả thiết.

Theo phép chứng minh phản chứng ycbt được chứng minh xong.

Bài 38

Cho 3 tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc.

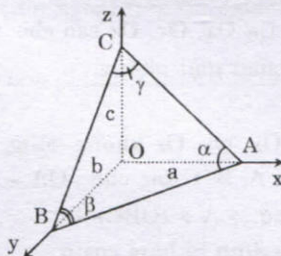
a/ Chứng minh rằng ba tia đó không cùng nằm trong một mặt phẳng.

b/ Lấy trên ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt các điểm A, B, C (khác gốc O). Chứng minh rằng :

$$(AB + BC + CA)^2 \leqslant 6(OA^2 + OB^2 + OC^2)$$

c/ Ký hiệu α, β, γ là ba góc tam giác ABC, a, b, c là độ dài OA, OB, OC. Tính $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ và chứng tỏ rằng α, β, γ nhọn.

Giải



a/ Thật vậy : giả sử ba tia cùng thuộc một mặt phẳng, vì Ox và Oy cùng vuông góc với Oz, nên Ox và Oy cùng nằm trên một đường thẳng. Điều đó trái với giả thiết.

Do đó ycbt được chứng minh bằng phép chứng minh phản chứng.

b/ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovky, ta có :

$$(AB + BC + CA)^2 \leqslant 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 3(OA^2 + OB^2 + OB^2 + OC^2 + OC^2 + OA^2)$$

$$\Leftrightarrow (AB + BC + CA)^2 \leqslant 6(OA^2 + OB^2 + OC^2)$$

c/ Áp dụng định lý hàm cos cho ΔABC, ta có :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AB.\cos\alpha$$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{(a^2+c^2)+(a^2+b^2)-(b^2+c^2)}{2.\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+c^2}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+c^2}} > 0$

$\Leftrightarrow \alpha$ nhọn (đpcm)

Tương tự ta có : $\cos\beta = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{b^2+c^2}} > 0$; $\cos\gamma = \dfrac{c^2}{\sqrt{c^2+b^2}.\sqrt{a^2+c^2}} > 0$

Do đó : β, γ cũng nhọn (đpcm)

Bài 39

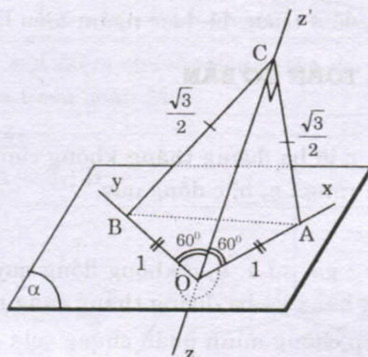
Cho trong không gian ba tia Ox, Oy, Oz đôi một tạo với nhau một góc 120^0. Chứng minh rằng ba tia Ox, Oy, Oz phải đồng phẳng.

Giải

Giả sử Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và ta chọn sẵn trên Ox; Oy các điểm A, B theo thứ tự đó sao cho : OA = OB = 1 (đvcd)

Đồng thời trên tia đối Oz' của tia Oz, ta chọn điểm C sao cho $OC \perp AC$. Lúc đó ΔABC cho ta:

$$\begin{cases} AC = OA\sin 60^0 \Rightarrow AC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ OC = OA\cos 60^0 \Rightarrow OC = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



Định lý hàm cosin trong Δ BOC cho ta :

$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB.OC\cos 60^0$

$\Leftrightarrow BC^2 = 1 + \dfrac{1}{4} - 2.1.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Do đó : $AC = BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

Tương tự : $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos 120^0 = 1 + 1 - 2.1.1(-\dfrac{1}{2}) = 3$

$\Leftrightarrow AB = \sqrt{3}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được : $CA + CB = AB \Leftrightarrow C \in AB \Leftrightarrow$ Ox, Oy; Oz đồng phẳng (vô lý với điều giả sử ban đầu)

Vậy Ox, Oy, Oz phải đồng phẳng. (đpcm)

Bài 40

Cho ba tia Ox, Oy, Oz sao cho $\widehat{xOy} = \widehat{xOz} = 45^0$ và $\widehat{yOz} = 90^0$. Chứng minh rằng ba tia đó cùng thuộc một mặt phẳng.

Hướng dẫn

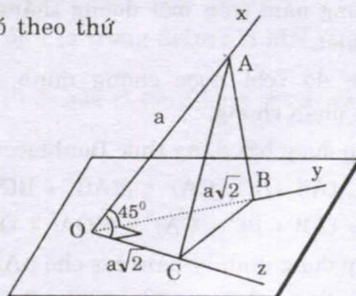
Giả sử Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và chọn trên đó theo thứ tự các điểm A, B, C sao cho : OA = a; $OB = OC = a\sqrt{2}$.

Do giả sử $\Rightarrow A \notin (OBC)$

Sử dụng định lý hàm cosin

$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{OC^2 + OA^2 - 2OC.OA.\cos 45^0}$

$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{2a^2 + a^2 - 2.a\sqrt{2}.a.\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{a^2} = a$



Mà : $BC = a\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a$

$\Rightarrow$ AB + AC = BC $\Leftrightarrow$ A, B, C thẳng hàng (do đó điều giả sử là vô lý)

Vậy Ox, Oy, Oz đồng phẳng (đpcm)

Bài 41

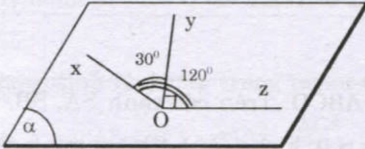
Cho ba tia Ox, Oy, Oz thỏa điều kiện $\widehat{xOy} = 60^0$, $\widehat{yOz} = 90^0$ và $\widehat{zOx} = 120^0$.

1/ Chứng minh rằng ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trong một mặt phẳng.

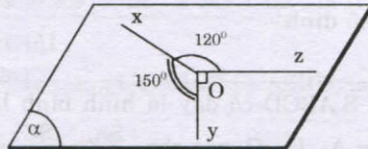
2/ Lấy ba điểm A $\in$ Ox, B $\in$ Oy, C $\in$ Oz sao cho OA = OB = OC = a. Chứng minh rằng ΔABC vuông và tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác khi a thay đổi.

3/ Lấy 3 điểm A, B, C như câu 2, nhưng lại thỏa thêm điều kiện $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = 1$. Chứng minh rằng mặt phẳng (ABC) khi lưu động luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



(h.1)



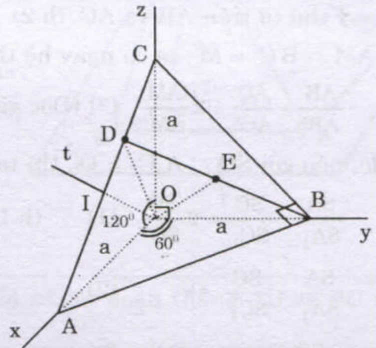
(h.2)

1/ Giả sử Ox; Oy; Oz đồng phẳng trong mp(α) nào đó, ta có hai khả năng :

Tia Oy hoặc nằm trong miền góc $\widehat{xOz}$ (xem h.1) hoặc miền ngoài góc $\widehat{xOz}$ (xem h.2) thì $\widehat{xOy} = 30^0 \neq 60^0$ (h.2) hoặc $\widehat{xOy} = 150^0 \neq 60^0$ (h.1) (vô lý với giả thiết $\widehat{xOy} = 60^0$)

Vậy ba tia Ox; Oy; Oz không đồng phẳng (đpcm).

2/ Định lý hàm cosin cho ta :



- $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OAOB\cos 60^0}$

  $\Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a.a.\frac{1}{2}} = a$

- $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2 - 2OAOC\cos 120^0}$

  $\Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3}$

- Mà $BC = a\sqrt{2}$

Do đó : $\begin{cases} AB^2 + BC^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2 \\ AC^2 = (a\sqrt{3})^2 = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông ở B (đpcm)

Gọi (d) là trục tròn ngoại tiếp ΔABC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó, ta có :

$$OA = OB = OC \Rightarrow O \in (d)$$

ΔABC vuông tại B thì : IA = IB = IC $\Rightarrow$ I $\in$ (d) và I là trung điểm AC $\Rightarrow$ OI $\subset$ (d)

Quỹ tích của I là tia Ot là trục của (ABC).

3/ Trong ΔOAC, với D là chân đường phân giác trong OD, ta có :

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OC} = \frac{2\cos\left(\frac{120^0}{2}\right)}{OD} \Leftrightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{OD} \qquad (1)$$

Tương tự ΔBOD, với E là chân đường phân giác trong OE, ta có :

$$\frac{1}{OD} + \frac{1}{OB} = \frac{2\cos\left(\frac{\widehat{BOD}}{2}\right)}{OE} \Leftrightarrow \frac{1}{OB} = \frac{2\cos\frac{\widehat{BOD}}{2}}{OE} - \frac{1}{OD} \qquad (2)$$

Lúc đó, (1) + (2) cho ta giả thiết :

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{OD}+\frac{2\cos\left(\frac{\widehat{BOD}}{2}\right)}{OE}-\frac{1}{OD}=1 \Leftrightarrow OE=2\cos\left(\frac{\widehat{BOD}}{2}\right) \quad (3)$$

Hai tia OA; OC cố định trong không gian nên tia phân giác OD cũng cố định.

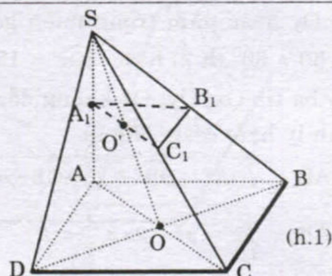
Hai tia OB; OD cố định trong không gian nên tia phân giác OE cố định, mà ở (3) đã có $OE = 2\cos\left(\frac{\widehat{BOD}}{2}\right)$ = const cho ta điểm E cố định trong không gian.

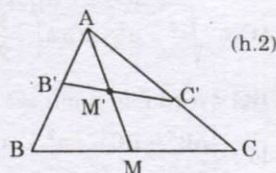
Vậy khi A, B, C lưu động sao cho $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}=1$ thì mặt phẳng (ABC) lưu động theo nhưng luôn qua E cố định

Bài 42

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Trên các cạnh SA, SB, SC lấy tương ứng các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{SA}{SA_1}+\frac{SC}{SC_1}=k$ (k > 0, k cho sẵn). Chứng minh rằng khi A_1, B_1, C_1 thay đổi thì mp($A_1B_1C_1$) cắt SO tại 1 điểm cố định (với $O = AC \cap BD$).

Giải





Gọi AM là trung tuyến của ΔABC tùy ý còn B', C' tùy ý thứ tự trên AB và AC. (h.2)

Khi $AM \cap B'C' = M'$, ta có ngay hệ thức :

$$\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}=2\frac{AM}{AM'} \quad (*) \text{ (Độc giả tự chứng minh)}$$

Do đó, nếu gọi $SO \cap A_1C_1 = O'$, thì ta có :

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \frac{SA}{SA_1}+\frac{SC}{SC_1}=2\frac{SO}{SO'} \quad (1) \qquad \text{(h.1)}$$

Nên $\frac{SA}{SA_1}+\frac{SC}{SC_1}=k$ (2)

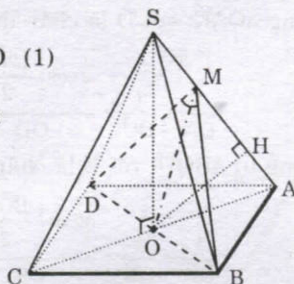
$\Leftrightarrow \quad 2\frac{SO}{SO'}=k \Leftrightarrow \frac{SO'}{SO}=\frac{2}{k}$ (k > 0, cho sẵn)

$\Leftrightarrow$ O' cố định (ycbt).

Bài 43

Cho hình chóp đều có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Tìm điểm M ∈ SA sao cho diện tích ΔMBD nhỏ nhất, hãy chỉ ra giá trị nhỏ nhất đó.

Giải



Gọi S là diện tích ΔMBD $\Rightarrow S = \frac{1}{2}BD.MO = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.MO$ (1)

$\Rightarrow$ minS xảy ra $\Leftrightarrow$ minMO xảy ra

Nhưng minMO = d[O; SA] = OH

Vì tứ diện đều nên $AC \cap BD = O$ thì SO là đường cao.

$\Rightarrow$ ΔSOA vuông tại O (2)

Trong đó : $\begin{cases} OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{2a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ ΔSOA vuông cân tại O $\Rightarrow OH = OA.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \min S = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$ xảy ra khi H là trung điểm SA. (ycbt)

Bài 44

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD, trên đường thẳng (d) không nằm trong (P) qua A lấy điểm S. Tìm vị trí của S để $\Sigma = (SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

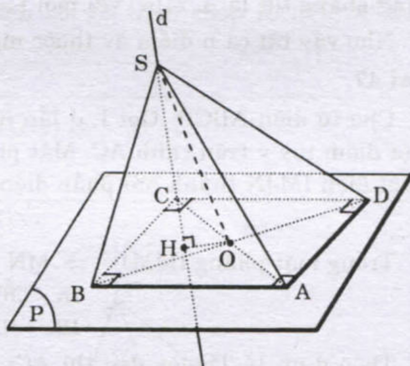
Giải

Áp dụng định lý đường trung tuyến trong các tam giác ΔSAC và ΔSBD, ta có :

$$\begin{cases} SA^2 + SC^2 = 2SO^2 + \dfrac{AC^2}{2} & (1) \\ SB^2 + SD^2 = 2SO^2 + \dfrac{BD^2}{2} & (2) \end{cases}$$

Lấy $\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} \Sigma = 4SO^2 + \dfrac{AC^2}{2} + \dfrac{BD^2}{2}$

$\Rightarrow \Sigma = 4SO^2 + AC^2$ (3)



Để ý trong (3) chỉ có SO là thay đổi, do đó Σ nhỏ nhất khi và chỉ khi SO nhỏ nhất. Trong mp(O; d) cố định hạ OH ⊥ d tại H.

$\Rightarrow OH = d[0; (d)] = \min SO$ (do (d) cố định)

$\Rightarrow \min\Sigma = 4OH^2 + AB^2$ xảy ra khi $S \equiv H$ (ycbt)

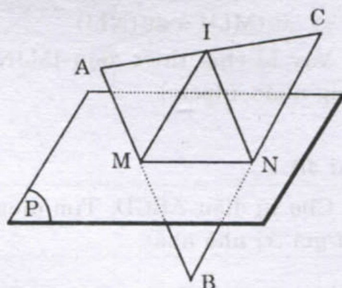
Bài 45

Cho 3 điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (P). Giả sử các đoạn thẳng AB và BC đều cắt (P). Chứng minh rằng đoạn thẳng AC không cắt (P).

Giải

Giả sử $AC \cap (P) = I$ và gọi :

$M = AB \cap (P); BC \cap (P) = N$



• Do M, N, I thuộc hai mặt phẳng phân biệt (P) và (ABC) nên thẳng hàng.

• Nhưng M, N, I là ba điểm nằm trong ba cạnh của ΔABC mà thẳng hàng thì dẫn đến điều vô lý.

Vậy đoạn AC không thể nào cắt mp(P) được. (đpcm)

Bài 46

1/ Cho n điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Chứng minh rằng không có 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng.

2/ Cho n điểm trong đó bất kỳ 4 điểm nào cũng đồng phẳng. Chứng minh rằng n điểm đó đồng phẳng.

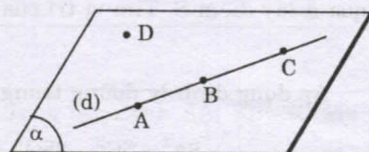
Giải

1/ Chọn tùy ý A, B, C, D là 4 điểm lấy ra từ n điểm đã cho. Giả sử A, B, C là 3 điểm thẳng hàng.

Gọi d là đường thẳng đi qua A, B và C. Đường thẳng này cùng với điểm D xác định một mặt phẳng (α). Ta có :

$$D; A; B; C \in (\alpha) \qquad (1)$$

Để ý thấy (1) trái với giả thiết "không có 4 điểm nào trong n điểm đã cho cùng phẳng".



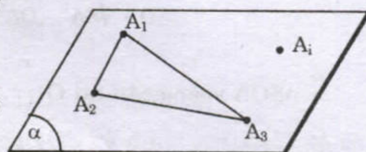
Vậy không thể có 3 điểm nào trong n điểm ấy thẳng hàng (đpcm).

2/ Bây giờ ta xét n điểm khác với tính chất là 4 điểm bất kỳ nào trong chúng đều đồng phẳng.

Gọi n điểm ấy là $A_1; A_2; A_3; ...; A_n$. ($n \geqslant 4$)

- Khi n = 4 thì bài toán đương nhiên đúng.
- Giả sử n > 4.

Ba điểm $A_1; A_2; A_3$ xác định mặt phẳng (α). Xét điểm A_i (với $3 < i < n$). Theo giả thiết 4 điểm $A_1; A_2; A_3$ và A_i đồng phẳng tức là $A_i \in (\alpha)$ với mọi i = 4; 5; ...; n.



Như vậy tất cả n điểm ấy thuộc mp(α) (đpcm).

Bài 47

Cho tứ diện ABCD. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của hai cạnh đối AB và CD. Lấy M là một điểm tùy ý trên cạnh AC. Mặt phẳng (IJM) cắt cạnh BD tại N. Chứng minh rằng IJ chia thiết diện IMJN thành hai phần diện tích bằng nhau.

Giải

Trong mặt phẳng (IJM) $\Rightarrow$ MN $\cap$ IJ = O

$$\Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{JC}{JD} = 1$$

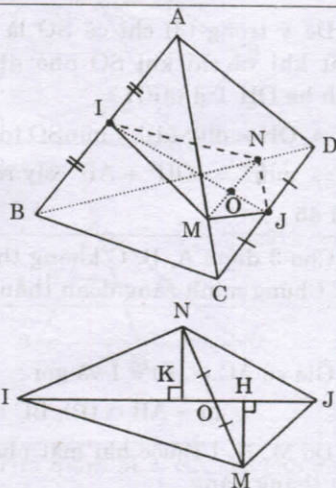
Theo định lý Thalès đảo thì AC; BD; IJ nằm trong ba mặt phẳng song song và cách đều nhau.

$\Rightarrow$ O là trung điểm của MN.

Do đó các đường cao MH và NK trong tam giác MIJ và NIJ là bằng nhau.

$\Rightarrow$ dt (MIJ) = dt (NIJ)

Vậy IJ chia thiết diện IMJN thành hai phần diện tích bằng nhau. (đpcm)



Bài 48

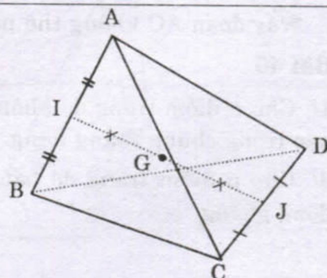
Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm M trong không gian sao cho $\Sigma = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Gọi I, J, G lần lượt là trung điểm của AB; CD và IJ.

Định lý đường trung tuyến cho :

$$+\begin{cases} MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} \\ MC^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \dfrac{CD^2}{2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \Sigma = 2(MI^2 + MJ^2) + \frac{AB^2 + CD^2}{2}$$

$$\Rightarrow \Sigma = 4MG^2 + IJ^2 + \frac{AB^2 + CD^2}{2} \geqslant \frac{AB^2 + CD^2}{2} + IJ^2 = \text{hằng số}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv G \Rightarrow \Sigma = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M ở G, trọng tâm của tứ diện. (ycbt)

Bài 49

Cho tam diện Oxyz vuông và một điểm A cố định bên trong tam diện. Khoảng cách từ A đến ba mặt (Oyz); (Ozx) và (Oxy) lần lượt là a; b; c. Một mặt phẳng lưu động (α) qua A cắt Ox ở M; Oy ở N và Oz ở P.

1/ Chứng minh : $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1$ (1)

2/ Định vị trí của mặt phẳng (α) để hình chóp O.MNP có thể tích nhỏ nhất.

Giải

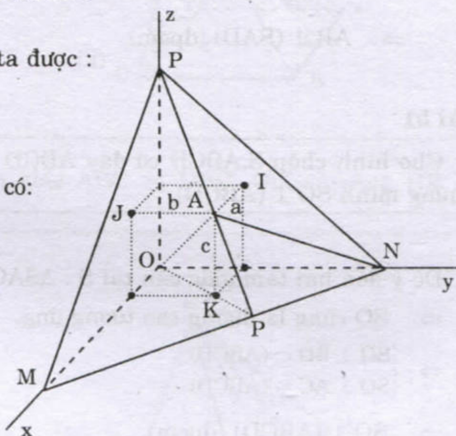
1/ Để ý thấy hình chóp O.MNP xem như được hợp thành bởi ba hình chóp A.ONP; A.OMP; A.OMN

Ta có : $V_{O.MNP} = V_{A.ONP} + V_{A.OMP} + V_{A.OMN}$

Khoảng cách từ A đến ba mặt phẳng (Oyz); (Ozx) và (Oxy) là :

$AI = a; AJ = b; AK = c$

Ta có : $\frac{1}{6}OM.ON.OP = \frac{1}{6}ON.OP.a + \frac{1}{6}OP.OM.b + \frac{1}{6}OM.ON.c$



Chia hai vế của đẳng thức này cho $\frac{1}{6}OM.ON.OP$, ta được :

$1 = \frac{a}{OM} + \frac{b}{ON} + \frac{c}{OP}$ (đpcm) (1)

2/ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và đưa nó vào (1) ta có:

$1 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{OM}.\frac{b}{ON}.\frac{c}{OP}}$

$\Leftrightarrow OM.ON.OP \geqslant 27abc$

$\Leftrightarrow V_{O.MNP} \geqslant \frac{9}{2}abc$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\frac{a}{OM} = \frac{b}{ON} = \frac{c}{OP} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = 3a \\ ON = 3b \\ OP = 3c \end{cases}$$

Vậy thể tích tứ diện O.MNP nhỏ nhất bằng $\frac{9}{2}abc$ xảy ra khi mp(α) ≡ mp(MNP) được định như trên. (ycbt)

Chuyên đề 4 : **QUAN HỆ VUÔNG GÓC**

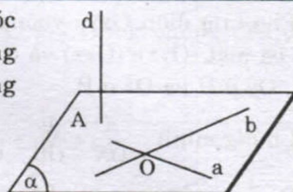
Loại 1 : ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

Dạng 1 : CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG BẰNG ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng α bằng điều kiện cần và đủ là cần phải chứng minh : đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng a, b đồng quy trong mặt phẳng α.

$d \perp a$; $b \subset \alpha$; $a \cap b = 0$ $\Rightarrow$ $d \perp \alpha$ (đpcm).



II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

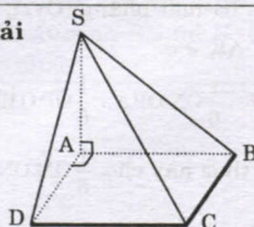
Bài 50

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là tứ giác lồi. Biết hai ΔSAB và ΔBAD vuông tại A. Chứng minh rằng AB ⊥ (SAD).

Giải

Ta có : $\begin{cases} AB \perp SA \subset (SAD) \\ AB \perp DA \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ AB ⊥ (SAD) (đpcm).



Bài 51

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O và SA = SC và SB = SD. Chứng minh SO ⊥ (ABCD).

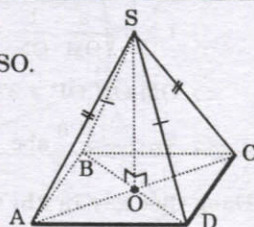
Giải

Để ý đến hai tam giác cân tại S : ΔSAC và ΔSBD có trung tuyến SO.

$\Rightarrow$ SO cũng là đường cao tương ứng.

$\Rightarrow \begin{cases} SO \perp BD \subset (ABCD) \\ SO \perp AC \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ SO ⊥ (ABCD) (đpcm).



Bài 52

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thoi. Giả sử SA = SC. Chứng minh AC ⊥ (SBD).

Giải

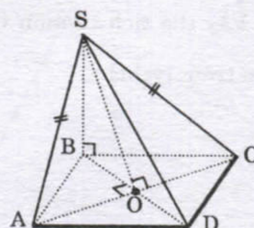
Để ý ABCD là hình thoi tâm O.

$\Rightarrow$ AC ⊥ BD ⊂ (SBD) (1)

Khi SA = SC, thì ΔSAC cân với SO là đường trung tuyến.

$\Rightarrow$ AC ⊥ SO ⊂ (SBD) (2)

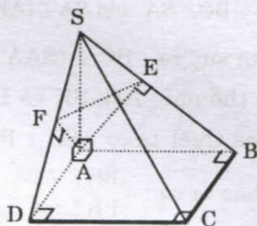
Từ (1) và (2) cho : AC ⊥ (SBD) (đpcm).



Bài 53

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật và SA ⊥ (ABCD). Gọi AE, AF là đường cao của các ΔSAB và ΔSAD. Chứng minh rằng SC ⊥ (AEF).

Giải



Để ý AD ⊥ (SAB) và BC // AD

⇒ BC ⊥ (SAB) ⊃ EA ⇒ EA ⊥ BC (1)

(Sau này ta có thể chứng minh (1) bằng định lý 3 đường vuông góc sẽ nhanh hơn hoặc bằng tính chất giao tuyến của hai mặt phẳng vuông góc).

Hơn nữa EA ⊥ SB (cách dựng) (2)

Từ (1) và (2) cho : EA ⊥ (SBC) ⊃ SC ⇒ SC ⊥ EA (3)

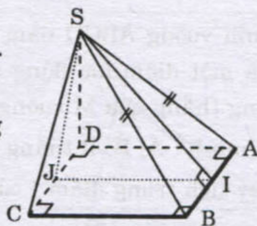
Một cách tương tự SC ⊥ AF (4)

Từ (3) và (4) ⇒ SC ⊥ (AEF) (đpcm).

Bài 54

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, gọi I, J là trung điểm AB, CD và giả sử SA = SB. Chứng minh rằng CD ⊥ (SIJ).

Giải



Để ý thấy IJ là đường trung bình của hình chữ nhật ABCD.

⇒ IJ // AD và BC ⇒ CD ⊥ IJ ⊂ (SIJ) (1)

Tương tự ΔSAB cân tại S có SI là trung tuyến nên nó cũng là đường cao.

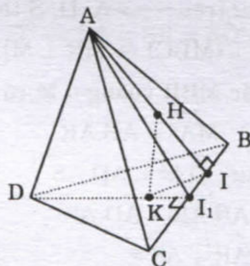
⇒ AB ⊥ SI; mà CD // AB ⇒ CD ⊥ SI ⊂ (SIJ) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ CD ⊥ (SIJ) (đpcm).

Bài 55

Cho tứ diện ABCD có H, K là trực tâm các tam giác ABC và DBC. Giả sử rằng HK ⊥ (DBC). Chứng minh AH, DK và BC đồng quy.

Giải



Gọi AI, DI_1 là các đường cao qua H và K.

Ta có : $\begin{cases} KH \perp (DBC) \supset BC \Rightarrow BC \perp HK \\ BC \perp DI_1 \text{ (cách dựng)} \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (ADI_1) \supset AI_1 \Rightarrow BC \perp AI_1$ (1)

Theo cách dựng BC ⊥ AI (2)

Từ (1) và (2) cho : $\begin{cases} BC \perp AI_1 \\ BC \perp KI \end{cases} \Rightarrow I_1 \equiv I$

Vậy AH, DK và BC đồng quy tại I.

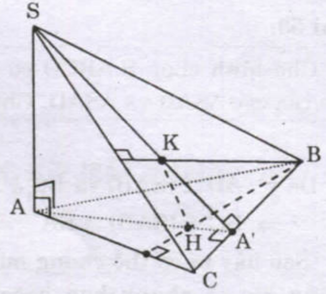
❒ **Cách khác :** Xem câu a), Bài 56.

Bài 56

Cho tứ diện SABC có SA ⊥ (ABC). Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh :

a/ AH; SK; BC đồng quy b/ SC ⊥ (BHK) c/ HK ⊥ (SBC).

Giải



a/ Cho AH ∩ BC = A'. Để chứng minh S; K; A' thẳng hàng ta chứng minh : SA' ⊥ BC

Ta có : $\begin{cases} BC \perp AA' \\ BC \perp SA \ \text{(do } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

Từ đó ta suy ra : BC ⊥ (SAA') ⇒ BC ⊥ SA'

Vậy có thể nói : AH; SK và BC đồng quy (đpcm).

b/ Theo giả thiết ta có : SC ⊥ BK (1)

Mặt khác ta có : $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \ \text{(do } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

nên : BH ⊥ (SAC) ⇒ BH ⊥ SC (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra : SC ⊥ (BHK) (đpcm).

c/ Theo câu a/ ta có : BC ⊥ (SAA') ⇒ BC ⊥ HK (3)

Theo câu b/ ta có : SC ⊥ (BHK) ⇒ SC ⊥ HK (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra : HK ⊥ (SBC) (đpcm).

Bài 57

Cho hình vuông ABCD nằm trong mặt phẳng (P). Qua A dựng nửa đường thẳng Ax ⊥ (P). Chọn M là một điểm lưu động trên Ax. Đường thẳng qua M vuông góc với mp(MCB) cắt (P) tại R. đường thẳng qua M vuông góc với mp(MCD) cắt (P) tại S.

1/ Chứng minh : A; B; R thẳng hàng.

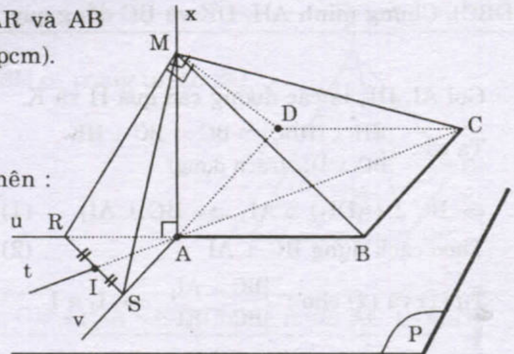
2/ Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn RS khi M lưu động trên nửa đường thẳng Ax.

Giải

1/ Theo giả thiết ta có : MR ⊥ (MBC) ⇒ MR ⊥ BC ⇒ MR ⊥ AD (vì AD // BC)

Mà đã có : AD ⊥ AM ⇒ AD ⊥ (MAR) ⇒ AD ⊥ AR

Vậy AR; AB; AD cùng ở trong mp (P) mà AR và AB cùng vuông góc với AD ⇒ A; B; R thẳng hàng (đpcm).



Tương tự trên ⇒ A, D, S thẳng hàng.

2/ Do MR ⊥ (MBC) ⇒ MR ⊥ MB.

Tam giác MBR vuông ở M có đường cao MA nên :

$MA^2 = AB.AR$

Tương tự : $MA^2 = AD.AS$

⇒ AB.AR = AD.AS

⇔ AR = AS

⇒ I thuộc đường thẳng AC.

Do R chạy trên tia Au (là tia đối của tia AB) và S chạy trên tia Av (tia đối tia AD) nên I ở ngoài hình vuông ABCD.

Vậy, I chạy trên tia đối At của tia AC (bỏ điểm A).

Vậy sau khi làm phần đảo thì quỹ tích của I là tia At (không kể điểm A) (ycbt).

Dạng 2 : CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG BẰNG TRỤC ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP

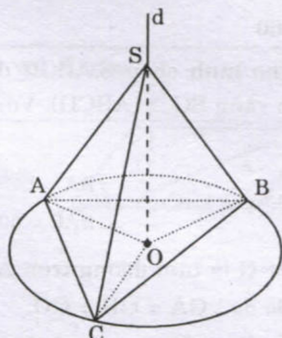
Cơ sở của phương pháp chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng α bằng vận dụng định nghĩa **trục đường tròn: là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của nó** bằng hai bước cơ bản như sau :

❒ **B_1 :** Tìm một điểm S ở đỉnh cách đều các đỉnh đa giác đáy ABC... như sau : SA = SB = SC = ...

Tìm điểm O ở đáy cách đều các đỉnh đa giác đáy ABC...

OA = OB = OC =...

❒ **B_2 :** Nối hai điểm S, O đó thành trục d của đường tròn. Nó là đường thẳng vuông góc với mọi mặt phẳng chứa được đường tròn (ABC).



II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 58

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Vẽ cùng về một phía (ABCD); các đoạn AA' CC' vuông góc (ABCD) sao cho AA' = CC' = a. Chứng minh : $A'C \perp (BC'D)$.

Giải

Để ý đến mp(BC'D) (ở vị trí các đỉnh của tam giác BC'C), ta có :

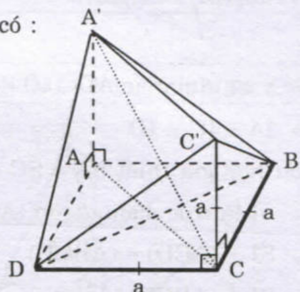
- CB = CC' = CD = a

$\Rightarrow$ $C \in (d)$: trục đường tròn (BC'D) ngoại tiếp $\Delta BC'D$.

- Tương tự : $\begin{cases} A'D = \sqrt{A'A^2 + AD^2} = a\sqrt{2} \\ A'C' = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2} \\ A'B = \sqrt{A'A^2 + AB^2} = a\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $A' \in (d)$

Vậy : $A'C \subset (d)$ hay $A'C \perp (BC'D)$ (đpcm).



Bài 59

Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{BSC} = 120^0$, $\widehat{CSA} = 60^0$, $\widehat{ASB} = 90^0$ và SA = SB = SC = a. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh rằng :

a/ ΔABC vuông. b/ $SI \perp (ABC)$.

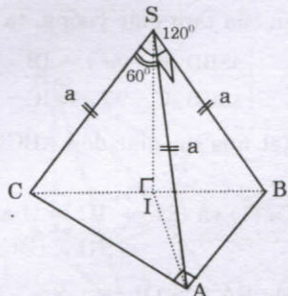
Giải

a/ Đặt : SA = SB = SC = a > 0 (cho sẵn)

Ta có : $\begin{cases} BC = 2CI = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \ (\Delta SIC \text{ là nửa } \Delta \text{ đều}) \\ CA = a \ (\Delta ASC \text{ đều}) \\ AB = a\sqrt{2} \ (\Delta ASB \text{ vuông cân tại S}) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} BC^2 = 3a^2 \\ CA^2 + AB^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow BC^2 = CA^2 + AB^2$

Theo định lý Pythagore đảo $\Rightarrow$ ΔCAB vuông tại A (đpcm).



b/ Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác ABC vuông tại A.

$\Rightarrow$ IA = IB = IC (1)

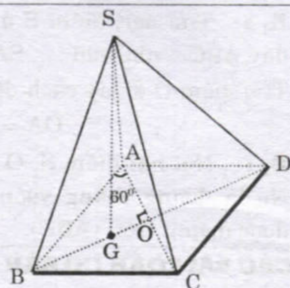
Hơn nữa đã có SA = SB = SC (2)

Từ (1) và (2) cho : SI là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC $\Rightarrow$ SI $\perp$ (ABC) (đpcm).

Bài 60

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thoi có $\widehat{BAC} = 60^0$ và SA = SB = SC. Chứng minh rằng SG $\perp$ (ABCD). Với G là trọng tâm tam giác ABC.

Giải



Để ý ΔABC có : $\begin{cases} BA = BC \text{ (cạnh hình thoi)} \\ \widehat{BAC} = 60^0 \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

$\Rightarrow$ G là tâm đường tròn ABC ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Do đó : GA = GB = GC

$\Rightarrow$ G $\in$ (d) trục của đường tròn (ABC)

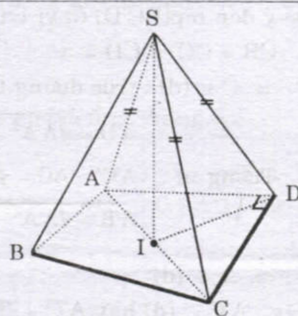
Giả thiết có : SA = SB = SC $\Rightarrow$ S $\in$ (d)

Tóm lại SG $\subset$ (d) hay SG $\perp$ (ABC) hay SG $\perp$ (ABCD) (đpcm).

Bài 61

Cho hình chóp S.ABCD có SA = SC = SD và $\widehat{ADC} = 90^0$. Gọi I là trung điểm AC. Chứng minh rằng SI $\perp$ (ABCD).

Giải



Để ý từ tam giác ADC ($\hat{D} = 90^0$)

$\Rightarrow$ IA = IC = ID

Kết hợp giả thiết SA = SC = SD.

$\Rightarrow$ SI là trục đường tròn (ACD) ngoại tiếp ΔACD.

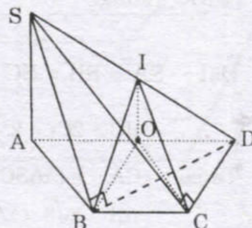
$\Rightarrow$ SI $\perp$ (ACD) $\equiv$ (ABCD)

$\Leftrightarrow$ SI $\perp$ (ABCD) (đpcm).

Bài 62

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là nửa lục giác đều có $\widehat{SBD} = \widehat{SCD} = 90^0$. Gọi O và I lần lượt là trung điểm AD và SD. Chứng minh rằng OI $\perp$ (BCD) và SA $\perp$ (ABCD).

Giải



Để ý đến tính chất của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có :

$\begin{cases} \Delta SBD\ (\hat{B} = 90^0) \Rightarrow IB = ID \\ \Delta SCD\ (\hat{C} = 90^0) \Rightarrow IC = ID \end{cases} \Rightarrow$ IB = IC = ID (1)

Xét nửa lục giác đều ABCD (tâm của lục giác đều là O)

$\Rightarrow$ OB = OC = OD (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ IO là trục đường tròn (BCD) ngoại tiếp tam giác BCD.

$\Rightarrow$ IO $\perp$ (BCD) (đpcm)

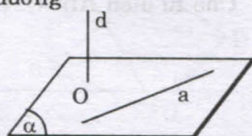
Mà SA // $\frac{1}{2}$ OI $\Rightarrow$ SA $\perp$ (ABCD) $\equiv$ (BCD) (đpcm).

Loại 2 : ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG

Dạng 1 : CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC NHAU BẰNG ĐỊNH NGHĨA ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp chứng minh đường thẳng d vuông góc với đường thẳng a khi ta sử dụng định nghĩa : $d \perp \alpha \Rightarrow d \perp a$ (tuỳ ý trong α).



qua 2 bước cơ bản :

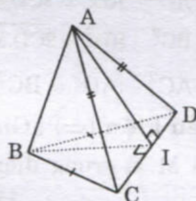
- B_1 : Quan sát và quản lý giả thiết tìm mp(α) chứa đường thẳng a cần chứng minh nó vuông góc với d.
- B_2 : Chứng minh $d \perp (\alpha) \Rightarrow d \perp a$ (đpcm).

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 63

Cho tứ diện ABCD có AC = AD và BC = BD. Chứng minh $AB \perp CD$.

Giải



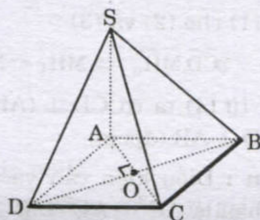
Gọi I là trung điểm cạnh CD và để ý hai trung tuyến cũng là đường cao trong hai tam giác cân cùng đáy CD là : ΔADC và ΔBCD.

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp BI \subset (ABI) \\ CD \perp AI \subset (ABI) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABI) \supset AB \Rightarrow CD \perp AB \text{ (đpcm)}.$$

Bài 64

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh $BD \perp SC$.

Giải



Để ý : $BD \subset (ABCD)$ mà $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow BD \perp SA$; mà $SA \subset (SAC)$

Hơn nữa do tính chất hai đường chéo hình thoi

$\Rightarrow BD \perp AC$; mà $AC \subset (SAC)$

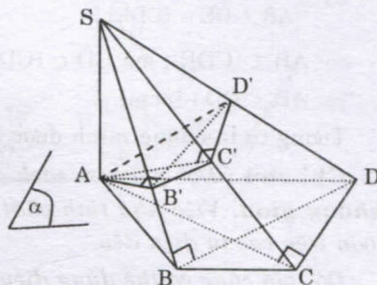
Do đó $DB \perp (SAC)$

Ta có : $SC \subset (SAC) \Rightarrow DB \perp SC$ (đpcm).

Bài 65

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là nửa hình lục giác đều và $SA \perp (ABCD)$. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SD tại D' cắt SB; SC tại B', C'. Chứng minh tứ giác AB'C'D' nội tiếp được.

Giải



Để ý : $\begin{cases} CD \perp AC \text{ (tính chất lục giác đều)} \\ CD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAC)$; mà $(SAC) \supset AC' \Rightarrow AC' \perp CD$ (1)

Theo cách dựng $SD \perp (\alpha) \equiv (AB'C'D') \supset AC'$

$\Rightarrow AC' \perp SD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC' \perp (SCD)$; mà $(SCD) \supset C'D'$

$\Rightarrow AC' \perp C'D' \Leftrightarrow \widehat{AC'D'} = 90^0$ (3)

Tương tự : $BD \perp (SAB) \supset AB' \Rightarrow AB' \perp BD$ (4)

Theo cách dựng $(\alpha) \equiv (AB'C'D') \Rightarrow AB' \perp SD$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow AB' \perp (SBD)$; mà $(SBD) \supset B'D'$

$\Rightarrow AB' \perp B'D' \Leftrightarrow \widehat{AB'D'} = 90^0$ (6)

Cũng từ (5) và (6) $\Rightarrow$ Tứ giác AB'C'D' nội tiếp được (đpcm).

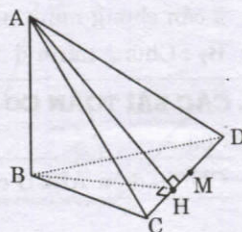
Bài 66

Cho tứ diện ABCD. Chứng minh ĐIỀU KIỆN ĐẠI SỐ sau để tứ diện có cạnh đối nhau vuông góc :

$$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2.$$

Giải

Ta chứng minh điều kiện bằng hai trường hợp :



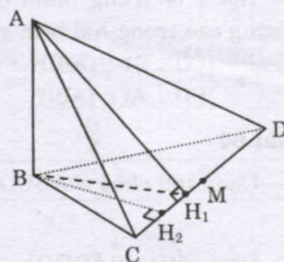
❒ **Điều kiện** ($\Rightarrow$) : Giả sử $AB \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABH)$

H là chân đường cao BH $\Rightarrow CD \perp AH$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác với M là trung điểm CD.

$$\Rightarrow \begin{cases} AC^2 - AD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MH} \\ BC^2 - BD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MH} \end{cases}$$

$\Rightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$ (đpcm).



❒ **Điều kiện** ($\Leftarrow$) : Giả sử $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$ (1)

Gọi M là trung điểm CD, AH_1, BH_2 là các chân đường cao

tương ứng, ta có : $\begin{cases} AC^2 - AD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MH_1} & (2) \\ BC^2 - BD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MH_2} & (3) \end{cases}$

Sử dụng (1) cho (2) và (3) :

$2\overline{CD}.\overline{MH_1} = 2\overline{CD}.\overline{MH_2} \Rightarrow \overline{MH_1} = \overline{MH_2} \Leftrightarrow H_1 \equiv H_2$ (4)

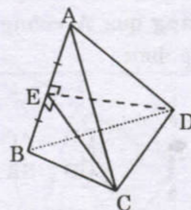
Nghĩa là từ (4) ta có $CD \perp (ABH_1) \equiv (ABH_2)$, cả hai mặt phẳng (ABH_1); (ABH_2) đều chứa AB, do đó $CD \perp AB$ (đpcm).

✪ **Kết luận :** Điều kiện cần và đủ (đại số) để hai cạnh đối AB và CD của tứ diện ABCD vuông góc nhau là $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$ (đpcm).

Bài 67

Chứng minh rằng hai cạnh đối bất kỳ của tứ diện đều thì vuông góc với nhau.

Giải



Gọi E là trung điểm cạnh AB. Theo tính chất của tam giác đều ở các mặt tứ diện:

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp CE \subset (CDE) \\ AB \perp DE \subset (CDE) \end{cases}$$

$\Rightarrow AB \perp (CDE)$; mà $CD \subset (CDE)$

$\Rightarrow AB \perp CD$ (đpcm).

Tương tự ta chứng minh được $BC \perp AD$ và $AC \perp BD$ (đpcm).

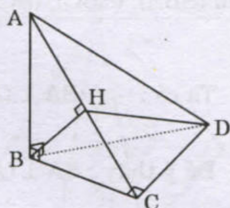
✪ **Ghi chú :** *Độc giả xem cách chứng minh khác ở phần* ***góc của hai đường thẳng trong không gian.*** *Việc nhớ tính chất này, chúng tôi xin nhắc : rất tiện ích trong quá trình tính toán trên các tứ diện đều.*

Độc giả cũng có thể dùng điều kiện đại số của Bài 66.

Bài 68

Cho tứ diện ABCD có AB ⊥ (BCD) và $\widehat{BCD} = 90^0$. Gọi BH là đường cao ΔABC. Chứng minh ΔBHD vuông.

Giải



Để ý : $\left.\begin{matrix} CD \perp BC \\ CD \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABC) \supset BH$

$\Rightarrow BH \perp CD \subset (ACD)$

Cách dựng đường cao $\Rightarrow BH \perp AC \subset (ACD)$

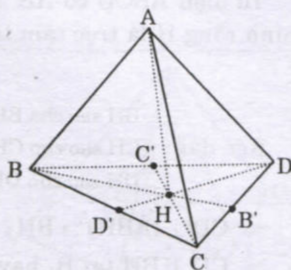
$\Rightarrow BH \perp (ACD) \supset HD$

$\Rightarrow BH \perp HD$ hay ΔBHD vuông ở H (đpcm).

Bài 69

Chứng minh rằng : Trong một tứ diện nếu có 2 cặp cạnh đối vuông góc nhau thì cặp cạnh đối thứ ba cũng vuông góc nhau.

Giải



Giả sử cho tứ diện ABCD có : $\begin{cases} AB \perp CD \\ AC \perp BD \end{cases}$

Ta cần chứng minh : BC ⊥ AD

Thật vậy dựng AH ⊥ (BCD). Ta có :

$\begin{cases} CD \perp AB \text{ (gt)} \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$

Và: $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (gt)} \\ BD \perp AH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (CAH) \Rightarrow BD \perp CH$

Hai kết quả trên cho thấy H là trực tâm của ΔBCD lúc đó :

$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp DH \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AD$ (đpcm).

❒ **Ghi chú** : *Có thể chứng minh bài toán bằng phương pháp vectơ.*

Dạng 2 : CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC NHAU BẰNG ĐỊNH LÝ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

I. PHƯƠNG PHÁP

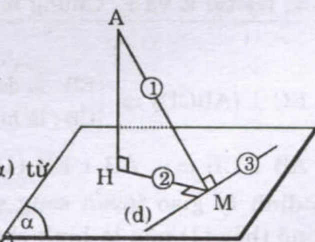
Cơ sở của phương pháp cần vận dụng định lý ba đường vuông góc như sau :

Giả sử AH ⊥ (α) ⇒ $\begin{cases} \text{AM là đường xiên (so với } (\alpha)) \\ \text{HM là hình chiếu (của AM xuống } (\alpha)) \end{cases}$

thì đường (d) nằm trong (α) thỏa :

(d) ⊥ AM (đường xiên) ⇔ (d) ⊥ HM (hình chiếu)

Do đó phương pháp gồm 2 bước thực hành :



❒ **B_1** : Xác định đường vuông góc với một mặt phẳng (α) từ đó tìm ra đường xiên ① và hình chiếu ②.

❒ **B_2** : Đường thẳng thứ ③ là (d) nằm trong mặt phẳng (α).

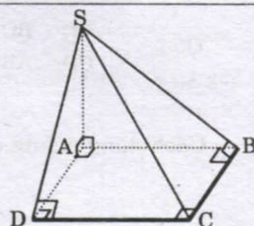
- Nếu : ③ ⊥ ① ⇒ ③ ⊥ ② ⇒ (ycbt).
- Nếu : ③ ⊥ ② ⇒ ③ ⊥ ① ⇒ (ycbt).

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 70

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD) và ABCD là hình chữ nhật. Chứng minh bốn mặt bên (SBA), (SBC), (SCD), (SAD) đều là những tam giác vuông.

Giải



Ta có : $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta SAB \text{ vuông ở A (ycbt)} \\ \Delta SAD \text{ vuông ở A (ycbt)} \end{cases}$

Để ý thấy : $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SB : \text{là đường xiên} \\ AB : \text{là hình chiếu} \end{cases}$

Mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$ (định lý ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông ở B (ycbt).

Tương tự $DC \perp SD$ (định lý 3 đường vuông góc) $\Rightarrow \Delta SDC$ vuông ở D (ycbt).

Tóm lại hình chóp có 4 mặt bên đều là những tam giác vuông (đpcm).

Bài 71

Tứ diện ABCD có AB ⊥ CD và AC ⊥ BD. Gọi H là hình chiếu của A xuống (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm tam giác BCD và AD ⊥ BC.

Giải

Kéo dài : $\begin{cases} BH \text{ sao cho } BH \cap CD = B_1 \\ CH \text{ sao cho } CH \cap BD = C_1 \\ DH \text{ sao cho } DH \cap BC = D_1 \end{cases}$ Ta có : $\begin{cases} CD \perp AB \text{ (giả thiết)} \\ CD \perp AH \text{ (vì } AH \perp (BCD)) \end{cases}$

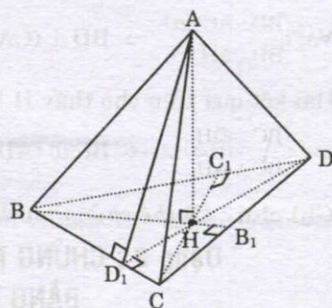
$\Rightarrow CD \perp (ABH) \supset BH$

$\Rightarrow CD \perp BH$ tại B_1 hay BB_1 là đường cao ΔBCD (1)

Tương tự $BD \perp (ACH) \supset CH \Rightarrow BD \perp CH$ tại C_1.

$\Rightarrow CH$ là đường cao ΔBCD (2)

Từ (1) và (2) cho ta : H là trực tâm ΔBCD (đpcm)



Để ý thấy $AH \perp (BCD) \Rightarrow \begin{cases} AD_1 : \text{là đường xiên} \\ HD_1 : \text{là hình chiếu} \end{cases}$

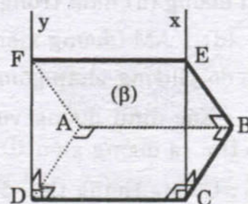
Mà $BC \perp HD_1$ (vì H là trực tâm ΔBCD) $\Rightarrow BC \perp AD_1$

$\Rightarrow BC \perp (AHD_1) \equiv (ADD_1) \supset AD \Rightarrow BC \perp AD$ (đpcm).

Bài 72

Cho Cx, Dy là hai đường vuông góc với mặt phẳng hình chữ nhật ABCD. Một mp(β) qua AB cắt Cx, Dy tại E và F. Chứng minh rằng ABEF là hình chữ nhật.

Giải



Để ý $EC \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} EB : \text{là đường xiên} \\ CB : \text{là hình chiếu} \end{cases}$

Mà $AB \perp CB \Rightarrow AB \perp EB$ (1)

Theo định lý giao tuyến song song thì ABEF là hình bình hành và nó thỏa (1) nên là hình chữ nhật (đpcm).

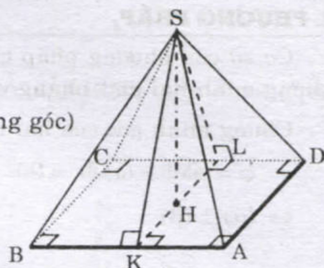
✪ **Cách khác :** Để ý thấy $DC \perp (EBC)$ mà $AB // CD$

$\Rightarrow AB \perp (CDE) \supset EB \Rightarrow AB \perp EB$ (1) $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 73

Trong hình chóp S.ABCD đáy là hình chữ nhật ABCD. Gọi SH là đường cao hình chóp và SK; SL thứ tự là đường cao các tam giác SAB và SCD. Chứng minh rằng H, K, L thẳng hàng.

Giải



Để ý với $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SH: \text{là đường xiên} \\ HK: \text{là hình chiếu} \end{cases}$

Mà $AB \perp SK$ (cách dựng) $\Rightarrow AB \perp HK$ (định lý ba đường vuông góc)

Tương tự $CD \perp HL$ (định lý ba đường vuông góc)

Tóm tại : $\begin{cases} AB \perp HK \\ CD \perp HL \\ HK // HL \end{cases} \Rightarrow$ H, K, L thẳng hàng (đpcm).

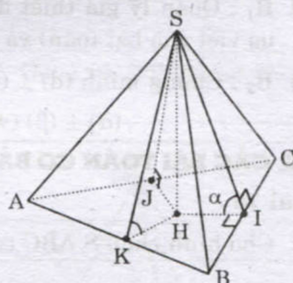
Bài 74

Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác đều cạnh a, các mặt (SAB); (SBC) và (SCA) hợp với (ABC) các góc bằng nhau và bằng α.

1/ Chứng minh rằng : hình chiếu H của S lên (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

2/ Tính tổng diện tích 4 mặt của tứ diện S.ABC.

Giải



1/ Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của H lên BC; CA; AB

Do định lý ba đường thẳng vuông góc.

$\Rightarrow BC \perp SI; CA \perp SJ; AB \perp SK$

Do đó góc phẳng của các mặt bên (SBC); (SAC) và (SAB) tạo với (ABC) lần lượt là $\widehat{SIH}, \widehat{SJH}, \widehat{SKH}$

$\Rightarrow \widehat{SIH} = \widehat{SJH} = \widehat{SKH} = \alpha$

Để ý thấy tam giác vuông SHI, SHJ, SHK bằng nhau nên :

HI = HJ = HK

Vậy, H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. (H cũng là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC) (đpcm).

2/ Theo định lý diện tích và hình chiếu ta có : $\begin{cases} S_{HAB} = S_{SAB}\cos\alpha \\ S_{HBC} = S_{SBC}\cos\alpha \\ S_{HCA} = S_{SCA}\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{SAB} = \dfrac{1}{\cos\alpha}.S_{HAB} \\ S_{SBC} = \dfrac{1}{\cos\alpha}.S_{HBC} \\ S_{SCA} = \dfrac{1}{\cos\alpha}.S_{HCA} \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{ABC} = \frac{1}{\cos\alpha}(S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA}) + S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{ABC} = \frac{1}{\cos\alpha}S_{ABC} + S_{ABC}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right).\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(1+\cos\alpha)a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha} \text{ (ycbt).}$$

Loại 4 : MẶT PHẲNG VUÔNG VỚI MẶT PHẲNG

Dạng 1 : CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC NHAU

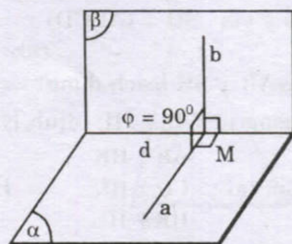
I. PHƯƠNG PHÁP$_1$

Cơ sở của phương pháp cần sử dụng định nghĩa để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc như sau :

Chứng minh góc của hai mặt phẳng đó bằng 90^0.

$\varphi = \widehat{aMb} = \widehat{(\alpha; \beta)} = 90^0$

$\Leftrightarrow (\alpha) \perp (\beta)$

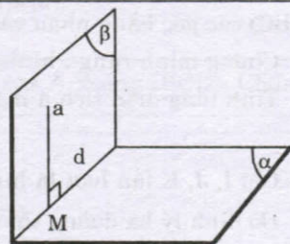


II. PHƯƠNG PHÁP$_2$

Cơ sở của phương pháp cần sử dụng điều kiện cần và đủ. Chứng minh mặt thứ nhất chứa một đường thẳng vuông góc với mặt thứ hai qua hai bước cơ bản :

- **B_1** : Quản lý giả thiết để tìm ra đường thẳng (d) (có tính ưu việt cho bài toán) và $(d) \subset (\beta)$.
- **B_2** : Chứng minh $(d) \perp (\alpha)$ thì kết luận được :

  $(\alpha) \perp (\beta)$ (ycbt).



III. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 75

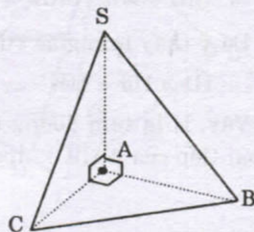
Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông ở A. Chứng minh : $(SAC) \perp (SAB)$.

Giải

Để ý thấy (SAC) và (SAB) có giao tuyến là SA

và $\begin{cases} AB \perp SA \\ AC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow 90^0 = \widehat{BAC} = \widehat{[(SAB); (SAC)]} \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$ (đpcm).



✪ **Cách khác :** Để ý : $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$

mà $AB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$ (đpcm).

Bài 76

Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình vuông. Chứng minh rằng :

a/ $(SAB) \perp (SBC)$. b/ $(SBD) \perp (SAC)$.

Giải

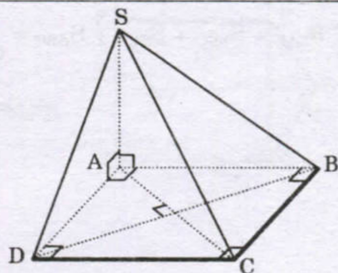
a/ Để ý : BC // AD mà $AD \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

Lại có $BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ (đpcm).

b/ Ta có : $BD \perp AC$ (vì ABCD là hình vuông)



$BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD) \supset BD$)

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

mà $BD \subset (SBD)$

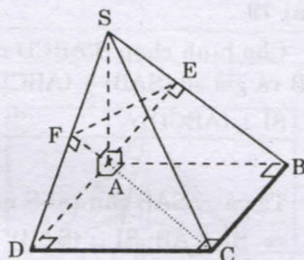
$\Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$ (đpcm).

Bài 77

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD và $SA \perp (ABCD)$. Gọi E và F là hình chiếu của A lên SB và SD. Chứng minh rằng :

a/ $(AEF) \perp (SCD)$. b/ $(AEF) \perp (SAC)$.

Giải



a/ Ta có : $\begin{cases} AE \perp SB \text{ (do cách dựng)} \\ AE \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAB)) \end{cases}$

$\Rightarrow AE \perp (SBC)$

Mà $AE \subset (AEF) \Rightarrow (AEF) \perp (SBC)$ (đpcm).

b/ Phần trước ((d) ⊥ (α)), ta đã chứng minh được :

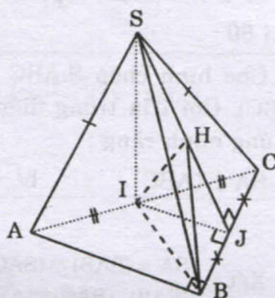
$SC \perp (AEF)$

Mà $SC \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (AEF)$ (đpcm).

Bài 78

Cho tứ diện S.ABC có SA = SB = SC và ΔABC vuông cân tại B. Gọi I và J là trung điểm AC và BC. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (ABC)$ và $(SIJ) \perp (SBC)$.

Giải



Để ý : $\begin{cases} SA = SB = SC \text{ (giả thiết)} \\ IA = IB = IC \text{ (}\Delta ABC \text{ vuông cân ở B)} \end{cases}$

$\Rightarrow SI \perp (ABC)$; vì SI là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà $SI \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (ABC)$ (đpcm).

Ta có : IJ là đường trung bình ΔABC ⇒ $IJ \parallel = \frac{1}{2} AB$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp IJ \\ \text{Lại có : } BC \perp SI \text{ (vì } SI \perp (ABC) \supset BC) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SIJ)$

Mặt khác $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SIJ)$ (đpcm).

Dạng 2 : CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG BẰNG GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

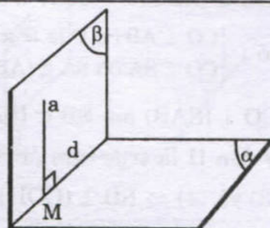
I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp cần sử dụng định lý liên quan đến giao tuyến của 2 mặt phẳng vuông góc nhau như sau :

Để chứng minh (a) ⊥ (α) ta chứng minh :

(a) ⊂ (β) ⊥ (α)

và (a) ⊥ (d) = (α) ∩ (β) (tại M).



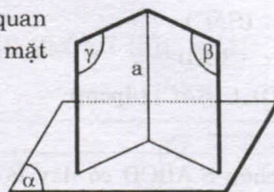
II. PHƯƠNG PHÁP 2

Cơ sở của phương pháp cần sử dụng định lý liên quan đến giao tuyến của 2 mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba như sau :

Để chứng minh $(a) \perp (\alpha)$ ta chứng minh :

$(a) = (\beta) \cap (\gamma)$

và $(\beta) \perp (\alpha)$; $(\gamma) \perp (\alpha)$



III. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

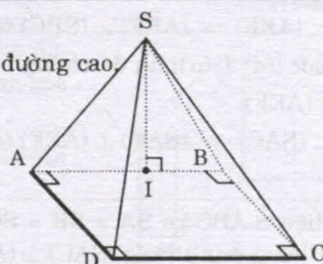
Bài 79

Cho hình chóp S.ABCD có ΔSAB cân tại S và ABCD là hình chữ nhật. Gọi I là trung điểm AB và giả sử $(SAB) \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng :

a/ $SI \perp (ABCD)$.

b/ $BC \perp (SAB)$.

Giải



a/ Ta có : ΔSAB cân tại S nên trung tuyến SI cũng là đường cao.

$\Rightarrow SI \perp AB; SI \subset (SAB)$

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB

$\Rightarrow SI \perp (ABCD)$ (đpcm).

b/ Tương tự $BC \perp AB; BC \subset (ABCD)$

mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$ (đpcm).

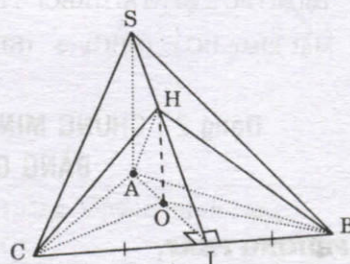
Bài 80

Cho hình chóp S.ABC có ΔABC đều; hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) cùng vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm BC còn O và H lần lượt là trực tâm hai tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng :

a/ $SA \perp (ABC)$ b/ $(SAI) \perp (SBC)$ c/ $SB \perp (COH)$ d/ $OH \perp (SBC)$.

Giải

a/ Xét : $\begin{cases} SA = (SAB) \cap (SAC) \\ (SAB); (SAC) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC)$ (đpcm).



b/ Để ý : $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SI : \text{là đường xiên} \\ AI : \text{là hình chiếu} \end{cases}$

mà $BC \perp AI$ (1) (do ΔABC đều)

$\Rightarrow BC \perp SI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAI)$

mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAI) \perp (SBC)$ (đpcm).

c/ Ta có : $\begin{cases} CO \perp AB \text{ (vì O là trực tâm } \Delta ABC) \\ CO \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC) \supset CO) \end{cases}$

$\Rightarrow CO \perp (SAB)$ mà $SB \subset (SAB) \Rightarrow SB \perp CO$ (3)

Để ý đến H là trực tâm ΔSBC $\Rightarrow SB \perp CH$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow SB \perp (COH)$ (đpcm) (5)

d/ Lúc đó : $SB \subset (SBC) \overset{(5)}{\Rightarrow} (COH) \perp (SBC)$

Tương tự chứng minh được (BOH) $\perp$ (SBC)

$\Rightarrow$ (COH) $\cap$ (BOH) = OH $\perp$ (SBC) (đpcm).

Bài 81

Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau.

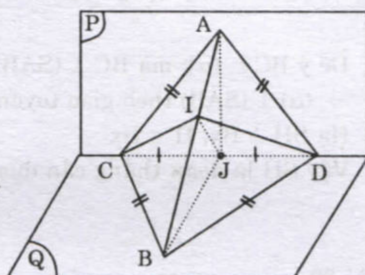
Cho biết AC = AD = BC = BD = a và CD = 2x. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1/ Chứng minh : IJ $\perp$ AB và IJ $\perp$ CD

2/ Tính AB và IJ theo a và x.

3/ Với giá trị nào của x thì (ABC) $\perp$ (ABD) ?

Giải



1/ Hai tam giác cân $\Delta ACD = \Delta BCD$

$\Rightarrow$ JA = JB $\Rightarrow$ IJ $\perp$ AB (tại I)

Vẫn do các tam giác ACD và BCD cân tại A và B

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp AJ \\ CD \perp BJ \end{cases} \Rightarrow CD \perp (AJB) \Rightarrow CD \perp IJ \text{ (tại J) (đpcm).}$$

2/ Theo giả thiết (ACD) $\perp$ (BCD) theo giao tuyến CD nên :

$AJ \perp CD \Rightarrow AJ \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp JB$

Tam giác AJC vuông góc ở J, tam giác AJB vuông ở J cho nên :

$$\begin{cases} AJ^2 = AC^2 - CJ^2 = a^2 - x^2 \\ AB^2 = AJ^2 + JB^2 = 2(a^2 - x^2) \Rightarrow AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)} \end{cases} \Rightarrow IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)} \text{ (ycbt).}$$

3/ ΔCAB cân ở C nên : CI $\perp$ AB

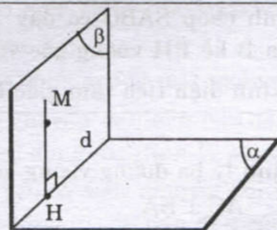
$$CI \perp ID \Leftrightarrow IJ = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow AB = CD$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 - x^2) = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (ycbt).}$$

Dạng 3 : DỰNG ĐOẠN THẲNG QUA MỘT ĐIỂM VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp dựng thứ nhất như sau; gồm hai bước cơ bản :



❐ B_1 : Tìm mặt phẳng $(\beta) \perp (\alpha)$ và $(\beta) \ni M$.

❐ B_2 : Hạ $MH \perp (d) = (\alpha) \cap (\beta)$

$\Rightarrow$ MH là đoạn thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

II. PHƯƠNG PHÁP$_2$

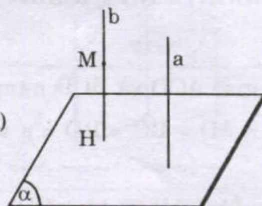
Cơ sở của phương pháp thứ nhì gồm hai bước :

- **B_1 :** Tìm đường thẳng có sẵn trong không gian.

  (a) $\perp$ (α).

- **B_2 :** Dựng đường thẳng (b) qua M đồng thời (b) // (a) và gọi H = (b) $\cap$ (α)

  $\Rightarrow$ MH là đoạn thẳng cần dựng.



III. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 82

Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD) và ABCD là hình chữ nhật. Mặt phẳng α qua BC cắt SA tại M. Hãy dựng đoạn vuông góc từ S đến α.

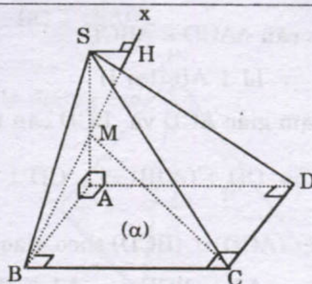
Giải

Để ý BC $\subset$ (α); mà BC $\perp$ (SAB)

$\Rightarrow$ (α) $\perp$ (SAB) theo giao tuyến Bx.

Hạ SH $\perp$ Bx; H $\in$ Bx

Vậy SH là đoạn thẳng cần dựng (ycbt).



Bài 83

Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD) và đáy ABCD là hình thoi tâm O với $0 < \hat{A} < \frac{\pi}{2}$.

Xác định hình chiếu của A và trung điểm M của AO lên trên (SBD).

Giải

Để ý : $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (tính chất hai đường chéo hình thoi)} \\ BD \perp SA \text{ (vì (ABCD) } \supset BD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ (SBD) $\perp$ (SAC) theo giao tuyến SO.

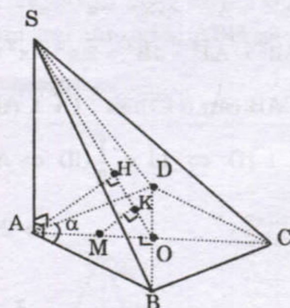
Hạ AH $\perp$ SO tại H $\Rightarrow$ AH $\perp$ (SBD) tại H

Vậy H là hình chiếu của H trên (SBD) (ycbt)

Đã có AH $\perp$ (SBD). Dựng MK // AH; K $\in$ SO

$\Rightarrow$ MK $\perp$ (SBD) tại M

Vậy K là hình chiếu của M trên (SBD) (ycbt).



IV. GIẢI TOÁN THI

Bài 84 (HỌC VIỆN QUÂN Y – 2000)

Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh SB vuông góc với đáy (ABC). Qua B kẻ BH vuông góc với SA; BK vuông góc với SC. Chứng minh SC vuông góc với (BHK) và tính diện tích tam giác BHK, biết rằng : AC = a; BC = $a\sqrt{3}$ và SB = $a\sqrt{2}$.

Giải

Theo định lý ba đường vuông góc

$\Rightarrow$ AC $\perp$ SA

Mà : AC $\perp$ AB

$\Rightarrow$ AC $\perp$ (SAB) $\supset$ BH

$\Rightarrow$ AC $\perp$ BH (1)

Nhưng : $SA \perp BH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH \perp (SAC) \supset SC; HK$.

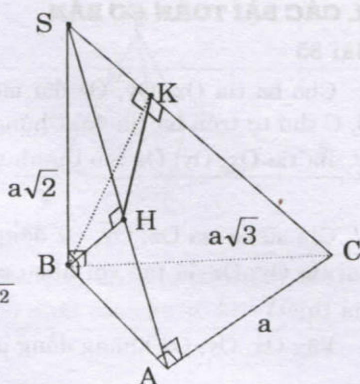
Do đó : $BH \perp SC$ (3)

$BH \perp HK$ (4)

Ta lại có : $BK \perp SC$ (5) (cách dựng).

Cũng từ (3); (5) $\Rightarrow SC \perp (BHK)$ (ycbt).

Xét riêng (4) cho ta ΔBHK vuông tại H



Từ $\Delta SBA \Rightarrow \dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \dfrac{1}{(a\sqrt{3})^2 - a^2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad BH^2 = a^2 \Leftrightarrow \quad BH = a$$

Xét : $\Delta SHK \backsim \Delta SCA \quad \Rightarrow \quad \dfrac{HK}{CA} = \dfrac{SH}{SC}$ (6)

Với ΔSBA vuông cân tại B $\Rightarrow$ $SH = \dfrac{(a\sqrt{2})\sqrt{2}}{2} = a$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} \quad HK = CA.\frac{SH}{SC} = \frac{a.a}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Vậy diện tích S của ΔBHK là :

$$S = \frac{1}{2}BH.HK = \frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{10}a^2 \text{ (ycbt).}$$

Chuyên đề 5 : PHƯƠNG PHÁP TRẢI CỐ THỂ TRÊN MỘT MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp là sử dụng hai tiên đề 5 và tiên đề 6 : nghĩa là khi trải một cố thể lên trên một mặt phẳng (ưu việt được chọn sẵn có lợi cho bài toán) thì tiên đề 5 và tiên đề 6 cho ta cách qua bài toán phẳng sẽ làm cho bài toán đơn giản hơn. Gồm 2 bước cơ bản :

- **B_1 :** Lựa chọn một mặt phẳng (α) đặc biệt ưu việt có lợi cho bài toán, sau đó chuyển đổi các yếu tố trong không gian quan hệ với vật thể hình học ở giả thiết xuống mặt phẳng (α) đó.
- **B_2 :** Áp dụng tiên đề 6, ta thấy trong (α) các yếu tố được chuyển đổi luôn bảo đảm các tính chất về góc và độ dài ... Áp dụng tiên đề 5 để được phép sử dụng các định lý sơ cấp.

Từ đó ta xây dựng phép dựng hình tương quan giữa các yếu tố được chuyển đổi với các yếu tố đã được chứng minh sẵn (Định lý và Hệ quả) trong mặt phẳng (α) để dẫn đến các ycbt.

Trong chuyên đề phép chứng minh phản chứng cũng thông thường được sử dụng.

Hiển nhiên việc sử dụng các tiên đề khác trong bài toán vẫn ngầm hiểu là luôn luôn được đặt ra.

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 85

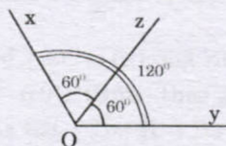
Cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một tạo với nhau một góc 60^0. Đồng thời chọn tùy ý 3 điểm A, B, C thứ tự trên ba tia đó. Chứng minh rằng :

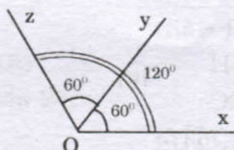
a/ Ba tia Ox, Oy, Oz tạo thành một góc tam diện. b/ $AB + BC + CA \geqslant OA + OB + OC$

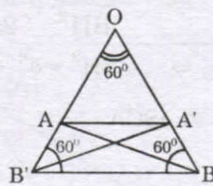
Giải

a/ Giả sử ba tia Ox, Oy, Oz đồng phẳng trong (α), ta có 2 khả năng : cho tia Ox phân biệt với hai tia Oy, Oz đã tạo với nhau một góc $\widehat{yOz} = 60^0$ thì $\widehat{xOz} = 120^0$ hoặc $\widehat{xOy} = 120^0$ (vô lý với giả thiết)

Vậy Ox, Oy, Oz không đồng phẳng hay chúng tạo thành một góc tam diện. (đpcm)







b/ Đưa bài toán về bài toán phẳng, bằng cách xét ΔOAB và dựng các tam giác đều : $\Delta OAA'$ và $\Delta OBB'$ trên mp(OAB) đó, ta đã có trong hình học phẳng :

$$2AB \geqslant OA + OB \quad (1)$$

Tương tự : $\begin{cases} 2AC \geqslant OA + OC & (2) \\ 2BC \geqslant OB + OC & (3) \end{cases}$

Cộng theo vế (1) + (2) + (3) $\Rightarrow 2(AB + AC + BC) \geqslant 2(OA + OB + OC)$

$\Rightarrow AB + AC + BC \geqslant OA + OB + OC$ (đpcm)

Bài 86

Cho tứ diện có diện tích của bốn mặt đều bằng nhau. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối của chúng bằng nhau.

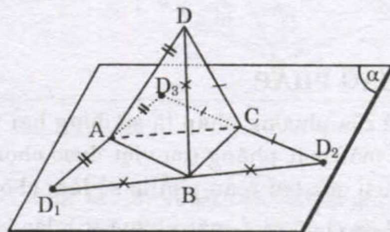
Giải

Chọn $(\alpha) \equiv (ABC)$, trải các ΔDAB, ΔDCB, ΔDCA xuống (α) theo trục trải lần lượt là AB, BC, CA (như hình vẽ) sao cho :

$$\begin{cases} AD = AD_1 = AD_3 \\ BD = BD_1 = BD_2 \\ CD = CD_2 = CD_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow S_{\Delta ABD_1} = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCD_2} = S_{\Delta ACD_3}$

$\Rightarrow \begin{cases} AB = CD_2 = CD_3 = CD \\ BC = AD_1 = AD_3 = AD \text{ (đpcm)} \\ AC = BD_1 = BD_2 = BD \end{cases}$



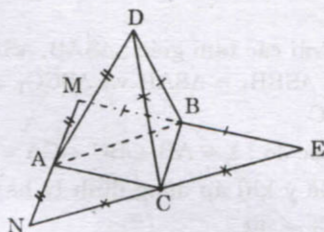
Bài 87

Cho tứ diện ABCD có tổng các góc phẳng tại các đỉnh A và B đều bằng 180^0. Chứng minh rằng : $CD \geqslant AB$.

Giải

Trải tứ diện xuống mặt phẳng $(\alpha) \equiv (ABC)$ theo các trục trải là các cạnh AB; BC; CA. Ta có cách dựng sau :

$$\begin{cases} AM = AN = AD \\ BM = BE = BD \end{cases}$$



Với giả thiết tổng các góc ở các đỉnh A và B bằng 180^0.

$\Rightarrow$ 2AB = NE

$\Rightarrow$ 2AB $\leqslant$ NC + EC (vì N, C, E chưa thẳng hàng)

$\Rightarrow$ 2AB $\leqslant$ 2CD $\Rightarrow$ AB $\leqslant$ CD (đpcm)

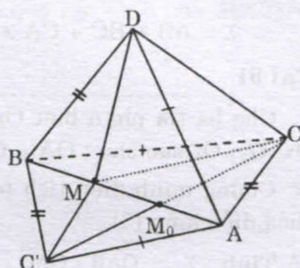
Bài 88

Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a; AC = BD và AD = BC. Xác định vị trí điểm M trên cạnh AB để cho ΔMCD có chu vi nhỏ nhất, xác định giá trị nhỏ nhất của chu vi đó.

Giải

Trải ΔDAB xuống mp(α) $\equiv$ (ABC) với trục trải AB thì :

$$\begin{cases} BC' = AC = BD \\ AC' = BC = AD \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC' = \Delta ABD \Rightarrow MC' = MD$$



Lúc đó chu vi $\mathscr{C}$ của ΔMCD là :

$\mathscr{C}$ = MD + MC + CD = (MC' + MC) + CD

$\Rightarrow$ $\mathscr{C} \geqslant$ C'C + a

Do đó : min$\mathscr{C}$ = (C'C + a) xảy ra $\Leftrightarrow$ C', M, C thẳng hàng

Vậy M $\equiv$ M_0 = C'C $\cap$ AB, thì min$\mathscr{C}$ = (C'C + a) (ycbt)

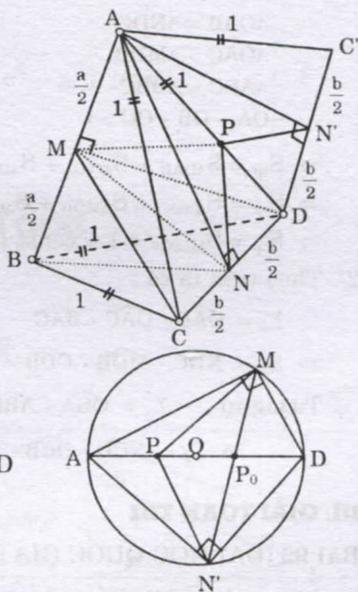
Bài 89

Cho tứ diện ABCD có AC = AD = BC = BD = 1; AB = a; CD = b; còn M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tìm trên cạnh AD điểm P sao cho tổng (PM + PN) đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Các tam giác ΔCMD (cân tại M) và ΔANB (cân tại N) thứ tự cùng trung tuyến MN và cũng là đường cao

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp CD \end{cases}$$



Trải ΔACD trên mp(α) $\equiv$ (ABD) với trục trải là AD được ΔADC'

$$\Rightarrow \begin{cases} AC' = 1 \\ DC' = b \end{cases}$$

Gọi N' là trung điểm cạnh DC' $\Rightarrow$ PN = PN'

Lúc đó tổng : Σ = PM + PN = PM + PN' $\geqslant$ MN'

Để ý thấy : $\begin{cases} \widehat{AMD} = \widehat{AND} = 90^0 \\ \widehat{AN'D} = \widehat{AND} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AN'D} = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMDN' nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 1, nằm trong mp(ABD).

$\Rightarrow$ min Σ = MN' xảy ra khi và chỉ khi M, N', P thẳng hàng.

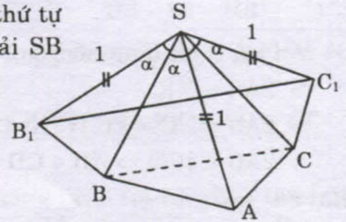
Hay P $\equiv$ P_o = MN' $\cap$ AD (ycbt)

Bài 90

Cho hình chóp S.ABC, các góc phẳng đỉnh S đều bằng α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$) còn cạnh bên SA = 1. Chứng minh rằng : AB + BC + CA $\geqslant \sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)}$.

Giải

Trải các tam giác : ΔSAB, ΔSAC lên mặt phẳng (α) ≡ (SBC) thứ tự được $\Delta SBB_1 = \Delta SAB$ và $\Delta SCC_1 = \Delta SAC$ thứ tự theo các trục trải SB và SC.



Lúc đó : $\Sigma = AB + BC + CA = BB_1 + BC + CC_1 \geqslant B_1C_1$

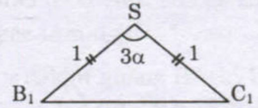
Để ý khi áp dụng định lý hàm cosin trong ΔB_1SC_1 với $\widehat{B_1SC_1} = 3\alpha$

$\Rightarrow B_1C_1^2 = SB_1^2 + SC_1^2 - 2SB_1.SC_1.\cos 3\alpha$

$= 1 + 1 - 2\cos 3\alpha = 2(1 - \cos 3\alpha)$

$\Rightarrow B_1C_1 = \sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)}$

$\Rightarrow \Sigma = AB + BC + CA \geqslant \sqrt{2(1 - \cos 3\alpha)}$ (đpcm)



Bài 91

Cho ba tia phân biệt Ox; Oy; Oz đôi một vuông góc và ba điểm A, B, C thứ tự trên ba tia Ox; Oy; Oz sao cho : OA = OB + OC = 1 (*)

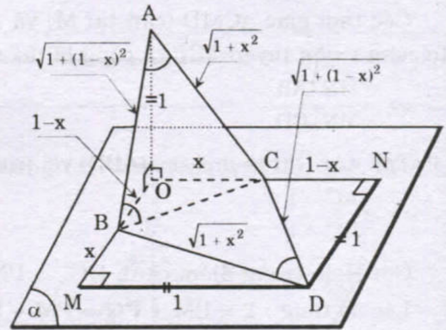
1/ Chứng minh diện tích toàn phần của tứ diện OABC không đổi khi B và C thay đổi mà vẫn thỏa điều kiện (*)

2/ Tính : $\Sigma_1 = \widehat{OAB} + \widehat{OAC} + \widehat{BAC}$; $\Sigma_2 = \widehat{OBA} + \widehat{ABC} + \widehat{OCB}$.

Giải

1/ Trong mp(α) ≡ (OBC) trải tứ diện AOBC xuống nó bằng phương pháp trải đặc biệt : dựng hình vuông OMDN có cạnh OM = 1 và OM chứa cạnh OB của tứ diện, còn cạnh ON chứa cạnh OC của tứ diện. Theo cách dựng này khi đặt OC = x, ta có : OB = 1 − x

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta OAB = \Delta NDC \\ \Delta OAC = \Delta MDB \\ \Delta ABC = \Delta DBC \\ OA = OB + OC = 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow S_{tp} = S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta ABC}$

$\Rightarrow S_{tp} = S_{\Delta NDC} + S_{\Delta MDB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta DBC}$

$\Rightarrow S_{tp} = S_{MDNO} = 1 = \text{const}$ (đpcm)

2/ Theo trên ta có :

$\Sigma_1 = \widehat{OAB} + \widehat{OAC} + \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \Sigma_1 = \widehat{NDC} + \widehat{MDB} + \widehat{CDB} = \widehat{MDN} = 90^0$ (ycbt)

Tương tự : $\Sigma_2 = \widehat{OBA} + \widehat{ABC} + \widehat{OCB}$

$\Rightarrow \Sigma_2 = \widehat{NCD} + \widehat{DCB} + \widehat{OCB} = \widehat{OCN} = 180^0$ (ycbt)

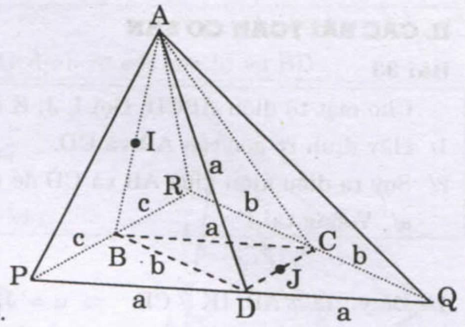
III. GIẢI TOÁN THI

Bài 92 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – ĐỢT 2 – 1998)

Cho tứ diện ABCD có các cạnh AD = BC = a; AC = BD = b; AB = CD = c.

1/ Chứng minh rằng đoạn nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện là đoạn vuông góc chung của các cặp cạnh đó.

2/ Tính thể tích tứ diện theo a, b, c.



Giải

1/ Ta có : $\begin{cases} AC = BD = b \\ AD = BC = a \end{cases} \Rightarrow \Delta ACD = \Delta BDC$

$\Rightarrow AJ = BJ$

$\Rightarrow \Delta AJB$ cân

$\Rightarrow JI \perp AB$

Tương tự : ΔDIC cân $\Rightarrow IJ \perp DC$

$\Rightarrow$ IJ là đoạn vuông góc chung của hai cạnh AB và DC.

Một cách tương tự $\Rightarrow$ (đpcm).

2/ Sử dụng phương pháp trải như sau, dựng ΔPQR có các cạnh đi qua các đỉnh của ΔBCD và song song với các cạnh ΔBCD. Ta có :

$$S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{PQR} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{APQR}$$

Trong ΔAPQ có : $DA = DP = DQ = a \Rightarrow \Delta APQ$ vuông tại A

Tương tự : ΔAQR; ΔARP cũng vuông tại A.

Ta có : $\begin{cases} AP^2 + AQ^2 = PQ^2 = 4a^2 \\ AQ^2 + AR^2 = RQ^2 = 4b^2 \\ AR^2 + AP^2 = PR^2 = 4c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AP^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \\ AQ^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2) \\ AR^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2) \end{cases}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{APQR} = \frac{1}{24}AP.AQ.AR$$

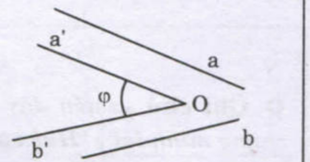
$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)} \text{ (đvtt).}$$

Chuyên đề 6 : XÁC ĐỊNH VÀ TÍNH CÁC LOẠI GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Loại 1 : GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp tìm góc của hai đường thẳng (a), (b) cần thực hiện 2 bước cơ bản :



❒ **B_1 :** Xác định : " $\widehat{a'Ob'} = \varphi$ là góc dựng từ điểm O tùy ý có thể ở trên (a) hoặc (b) (đạt tính ưu việt cho bài toán khi dựng và tìm độ lớn góc) hai tia Oa', Ob' thứ tự song song với hai đường thẳng (a), (b) có yêu cầu tìm góc".

❒ **B_2 :** Tính độ lớn góc φ bằng các định lý và tính chất của hình học phẳng hay định lý hàm cosin.

✪ **Ghi chú :** *$0 < \varphi \leq 90^0$, nếu $\varphi > 90^0$ thì ycbt sẽ chỉ rõ tìm góc tù.*

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 93

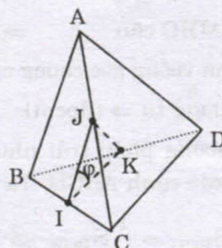
Cho một tứ diện ABCD. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, AC và BD.

1/ Hãy định rõ góc của AB và CD.

2/ Suy ra điều kiện giữa AB và CD để tam giác IJK :

a/ Vuông tại I b/ Cân tại I c/ Vuông cân tại I.

Giải



1/ Để ý : IJ // AB; IK // CD $\Rightarrow \varphi = \widehat{JIK} = \widehat{(AB; CD)}$

2a/ $\Delta IJK\ (\hat{I} = 90^0) \Leftrightarrow \varphi = 90^0 \Leftrightarrow$ AB ⊥ CD

2b/ $\Delta JIK\ (IJ = IK) \Leftrightarrow AB = CD$

2c/ $\Delta JIK\ (\hat{I} = \varphi = 90^0)$ và $IJ = IK \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp CD \\ AB = CD \end{cases}$

Bài 94

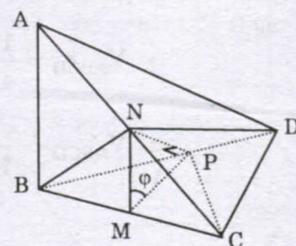
Chứng minh rằng các cạnh đối của một tứ diện đều thì vuông góc nhau.

Giải

Xét tứ diện đều ABCD cạnh a có M, N, P thứ tự là trung điểm BC, AC và BD.

Theo tính chất đường trung bình : $\Rightarrow \begin{cases} MN // AB \\ MP // CD \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{NMP} = \widehat{(AB; CD)}$

(các góc của các cặp cạnh đối nhau còn lại cũng là φ, vì tứ diện đều)



Để ý ΔBND cân tại N vì $NB = ND = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

⇒ NP là đường cao ΔBND cân tại N. Định lý Pythagre cho ta :

$$NP^2 = BN^2 - BP^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$$

Định lý hàm cosin cho ta : $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN.MP\cos\varphi$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2MN.MP} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{4} - \frac{2a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = 0$$

⇒ $\varphi = 90^0$ (các cạnh đối tứ diện đều vuông góc nhau) (ycbt).

✪ **Ghi chú** $_1$ **:** *có thể tính* $\begin{cases} MN^2 + MP^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} \\ NP^2 = BN^2 - BP^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow NP^2 = MN^2 + MP^2 \Leftrightarrow \varphi = 90^0$$

✪ **Ghi chú** $_2$ **:** *đến đây ta nhắc lại kết luận để sữ dụng rất tiện lợi sau này mà không cần chứng minh lại :* ***"Hai cạnh đối tùy ý của một tứ diện đều thì vuông góc nhau"***.

Bài 95

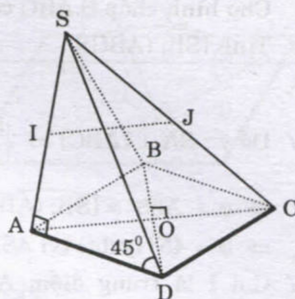
Cho một hình thoi ABCD cạnh a và một điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa hình thoi sao cho SA = a và trực giao (vuông góc) với BC.

a/ Xác định góc của SA và BC. Suy ra hình tính của ΔSAD.

b/ Xác định và tính góc của SD và BC.

c/ Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Hãy định rõ góc của IJ và BD.

Giải



a/ Đã có : $\begin{cases} SA \perp BC \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{(SA;\, BC)} = \widehat{SAD} = 90^0$ (ycbt).

mà SA = AD = a $\Rightarrow$ ΔSAD vuông cân tại A (ycbt).

b/ Tương tự : AD // BC

$\Rightarrow \beta = \widehat{(SD;\, BC)} = \widehat{SDA} = 45^0$ (ycbt).

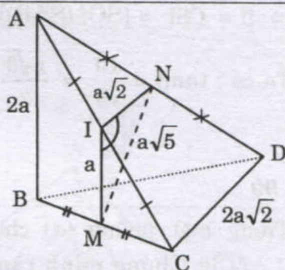
c/ Tương tự : $\begin{cases} IJ // AC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow IJ \perp BD$

$\Rightarrow \gamma = \widehat{(IJ;\, BD)} = \widehat{BOC} = 90^0$ (tính chất đường chéo hình thoi).

Bài 96

Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm BC, AD và AC. Cho AB = 2a, CD = $2a\sqrt{2}$ và MN = $a\sqrt{5}$. Tính : $\varphi = \widehat{(AB;\, CD)}$.

Giải



Theo tính chất đường trung bình trong tam giác

$$\Rightarrow \begin{cases} IN // \dfrac{1}{2}CD = a\sqrt{2} \\ IM // = \dfrac{1}{2}AB = a \end{cases}$$

Xác định được : $\varphi = \widehat{MIN} = \widehat{(AB;\, CD)}$

Áp dụng định lý hàm cosin :

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM.IN} = \frac{2a^2 + a^2 - 5a^2}{2.a\sqrt{2}.a} \Leftrightarrow \cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \varphi = 135^0 \text{ (góc tù)}$$

Góc nhọn tạo bởi AB và CD là 45^0 (ycbt).

Bài 97

Cho I, J, K, L là trung điểm các cạnh AB, CA, DA và DB của tứ diện ABCD. Chứng minh rằng

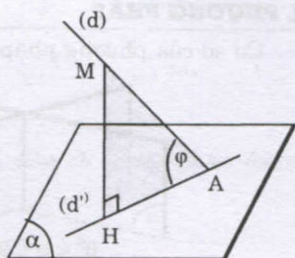
a/ Nếu AB $\perp$ CD thì IJKL là hình chữ nhật. b/ Nếu AB = CD thì IK $\perp$ IJ.

Hướng dẫn

Tương tự các bài trên, độc giả tự giải.

Loại 2 : TÌM GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP



Cơ sở của phương pháp tìm góc của đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) ta cần thực hiện hai bước cơ bản :

❒ **B_1 :** Xác định hình chiếu đường thẳng (d) cần tìm góc với mặt phẳng xuống mặt phẳng (α) là (d').

❒ **B_2 :** Góc của đường thẳng (d) và đường hình chiếu (d') của nó xuống mặt phẳng là góc cần tìm $\varphi = \widehat{(d;\, d')} = \widehat{(d;\, (\alpha))}$.

✪ **Ghi chú:** *Nói một cách thực hành thì góc $\varphi = \widehat{(d;\, (\alpha))}$ là góc của đường xiên và hình chiếu trong định lý ba đường vuông góc.*

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

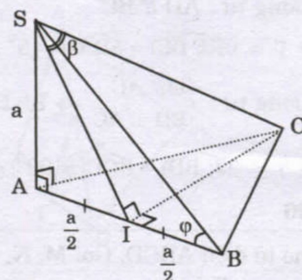
Bài 98

Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥(ABC), SA = a và tam giác ABC đều cạnh a.

a/ Tính $\widehat{[SB; (ABC)]}$ b/ Tính tan$\widehat{[SC; (SAB)]}$.

Giải

a/ Để ý : SA ⊥ (ABC) ⇒ $\begin{cases} SB: \text{là đường xiên} \\ AB: \text{là hình chiếu} \end{cases}$



⇒ $\varphi = \widehat{ABS} = \widehat{[SB; (ABC)]}$

⇒ $\varphi = 45^0$ (ycbt) (vì ΔSAB vuông cân tại B).

b/ Gọi I là trung điểm AB và để ý thấy hai mặt phẳng : (ABC) ⊥ (SAB) theo giao tuyến AB.

⇒ CI ⊥ AB (vì ΔABC đều)

⇒ CI ⊥ (SAB) ⇒ $\begin{cases} SC: \text{là đường xiên} \\ SI: \text{là hình chiếu} \end{cases}$

⇒ $\beta = \widehat{CSI} = \widehat{[SC; (SAB)]}$

Ta có : $\tan\beta = \dfrac{CI}{SI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{5a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{a\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ (ycbt).

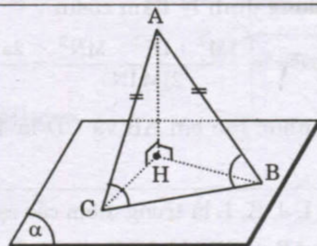
Bài 99

Trong mặt phẳng (α) cho hai điểm phân biệt B và C. Xét điểm A ở ngoài (α) sao cho $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Chứng minh rằng : [AB, (α)] = [AC, (α)].

Giải

Để ý : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ⇒ ΔABC cân tại A   (1)

Dựng AH là đường vuông góc hạ từ A xuống (α).



⇒ $\begin{cases} AB; AC: \text{là các đường xiên} \\ HB; HC: \text{là các hình chiếu theo thứ tự đó.} \end{cases}$

Từ $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ AB = AC

⇒ HB = HC (hình chiếu tương ứng của các đường xiên có độ dài bằng nhau)

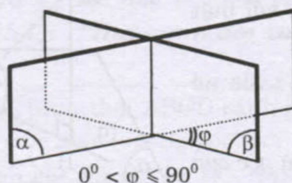
⇒ ΔAHB ($\hat{H} = 90^0$) = ΔAHC ($\hat{H} = 90^0$) (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

⇒ $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$ (tương ứng) ⇒ $\widehat{(AB; (ABC))} = \widehat{(AC; (ABC))}$ (đpcm).

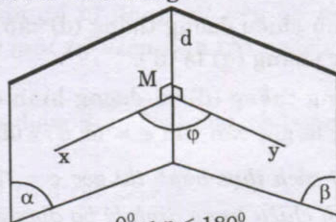
Loại 3 : XÁC ĐỊNH GÓC NHỊ DIỆN VÀ GÓC CỦA HAI MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp được thực hiện qua hai khả năng :



$0^0 < \varphi \leqslant 90^0$



$0^0 < \varphi \leqslant 180^0$

❒ **Phương pháp 1**

Xác định φ bằng cách dựng theo định nghĩa.

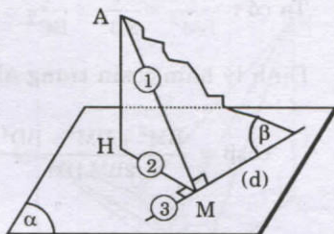
❒ **Phương pháp 2**

Xác định gián tiếp φ bằng định lý diện tích và hình chiếu.

❒ **Phương pháp 3**

Trong thực tế, người ta dựng và tính góc của 2 mặt phẳng bằng định lý ba đường vuông góc :

Góc của đường xiên và hình chiếu là góc của mặt phẳng chiếu (α) và mặt phẳng bị chiếu (β) tạo bởi đường thẳng ① và đường thẳng ② : $\varphi = \widehat{AMH} = \widehat{[(\alpha); (\beta)]}$



✪ **Ghi chú :** *$0 < \varphi \leqslant 180^0 \Rightarrow \varphi = \widehat{(d)} = \widehat{[(\alpha); (\beta)]}$ là góc nhị diện (d).*

$0 < \varphi \leqslant 90^0 \Rightarrow \varphi$ là góc của hai mặt phẳng (α) và (β).

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 100

Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính góc phẳng của nhị diện (A; BC; D).

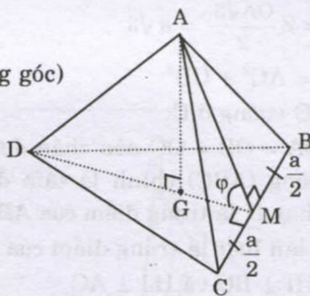
Giải

1/ Gọi M là trung điểm CB và G là trọng tâm ΔBCD, ta có :

$$AG \perp (BCD) \Rightarrow \begin{cases} AM: \text{là đường xiên} \\ DM: \text{là hình chiếu} \end{cases}$$

Mà CB ⊥ DM ⇒ BC ⊥ AM (định lý ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \varphi = \widehat{GMA} = \widehat{(A; BC; D)}$



$$\text{Ta có : } \begin{cases} DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \\ AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \text{ (ycbt).}$$

Bài 101

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a; SA ⊥ (ABCD) và SA = a. Tính các góc phẳng của nhị diện sau :

a/ (SBC; ABCD) b/ (SBC; SDC).

Hướng dẫn

a/ Ta có : $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SB: \text{là đường xiên} \\ AB: \text{là hình chiếu} \end{cases}$

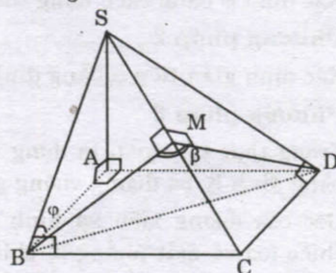
$\Rightarrow \varphi = \widehat{SBA} = \widehat{(SBC; ABCD)}$ là góc nhị diện trong ycbt.

ΔSAB vuông cân tại A $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ (ycbt).

b/ Hai tam giác vuông SBC và SCD bằng nhau trong không gian nên có chung chân đường cao M của hai đường cao BM và DM theo thứ tự đó :

$\Rightarrow \beta = \widehat{BMD} = \widehat{(SBC; SDC)}$ là góc nhị diện trong ycbt.

Ta có : $\frac{1}{BM^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow BM^2 = DM^2 = \frac{2a^2}{3}$



Định lý hàm cosin trong ΔBMD, ta có :

$$\cos\beta = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2BM.DM} = \frac{\frac{4a^2}{3} - 2a^2}{2.\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{-\frac{2a^2}{3}}{\frac{4a^2}{3}} = -\frac{1}{2}$$

Góc tù của nhị diện là : $\beta = \frac{2\pi}{3}$ (ycbt).

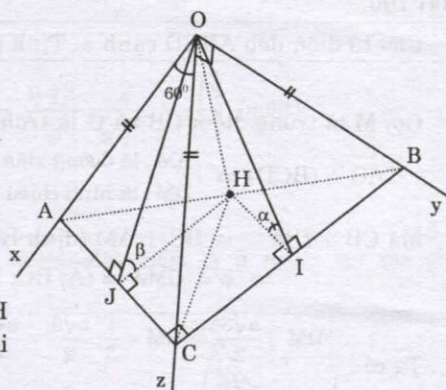
Bài 102

Cho ba tia Ox; Oy; Oz trong không gian sao cho $\widehat{xOy} = 120^0$; $\widehat{yOz} = 90^0$; $\widehat{zOx} = 60^0$. Trên ba tia ấy lần lượt lấy các điểm A; B; C sao cho OA = OB = OC = a.

1/ Xác định hình dạng của ΔABC và vị trí của chân đường vuông góc hạ từ O xuống (ABC).

2/ Tính các góc đo mà (OBC) và (OCA) tạo với (ABC).

Giải



1/ $\begin{cases} \Delta AOC \text{ đều } \Rightarrow AC = OA = a \\ \Delta BOC \text{ vuông cân ở O } \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \\ \Delta AOB \text{ cân ở O có } \widehat{AOB} = 120^0 \end{cases}$

$\Rightarrow AB = 2\frac{OA\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + CB^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông ở C.

Để ý : OA = OB = OC nên chân đường vuông góc H hạ từ O xuống (ABC) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC hay H là trung điểm của AB (ycbt).

2/ Gọi I; J lần lượt là trung điểm của BC và CA.

Ta có : $HI \perp BC$ và $HJ \perp AC$

Do định lý ba đường thẳng vuông góc ta có : $OI \perp BC$ và $OJ \perp AC$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{góc của (OBC) với (ABC) là : } \widehat{OIH} = \alpha \\ \text{góc của (OAC) với (ABC) là : } \widehat{OJH} = \beta \end{cases}$

ΔOHI vuông ở H cho : $\tan\alpha = \frac{OH}{HI} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0$

ΔOHJ vuông ở H cho : $\tan\beta = \frac{OH}{HJ} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ycbt).

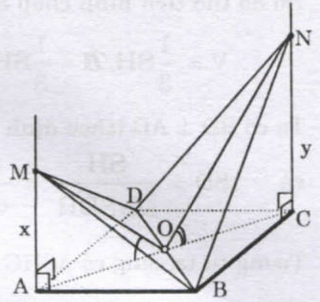
Bài 103

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Ax và Cy là các nửa đường thẳng cùng vuông góc với mặt phẳng hình vuông và cùng ở về một phía đối với mặt phẳng hình vuông. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai nửa đường thẳng ấy. Đặt AM = x; CN = y.

1/ Góc phẳng của nhị diện (M, BD,N) là góc nào ?

2/ Tìm hệ thức giữa x và y để $(MBD) \perp (NBD)$.

Giải



1/ Ta có : $\begin{cases} BO \perp OA & \text{(O là tâm hình vuông)} \\ BO \perp AM & \text{(gt)} \end{cases}$

Cho nên : $BO \perp (AMO) \Rightarrow BO \perp OM$

Tương tự ta cũng có : $BO \perp ON \Rightarrow (M, BD, N) = \widehat{MON}$

2/ $(MBD) \perp (NBD) \Leftrightarrow \widehat{MON} = 90^0$

$\Leftrightarrow \widehat{MOA} + \widehat{NOC} = 90^0$ (1)

Nhưng : $\begin{cases} \tan\widehat{MOA} = \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{2x}{a\sqrt{2}} \\ \tan\widehat{NOC} = \dfrac{CN}{OC} = \dfrac{2y}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \cot\widehat{NOC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2y} \end{cases}$

Do đó (1) tương đương với : $\tan\widehat{MOA} = \cot\widehat{NOC} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2y} \Leftrightarrow xy = \dfrac{a^2}{2}$ (ycbt).

III. GIẢI TOÁN THI

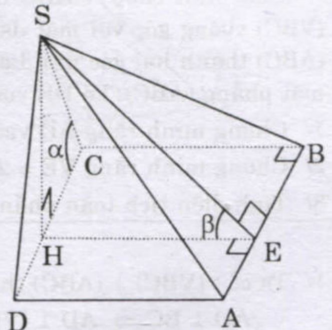
Bài 104 (ĐẠI HỌC KHỐI B – 1975)

Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là một hình chữ nhật, mặt bên SCD vuông góc với mặt phẳng đáy và là một tam giác vuông tại S, $\widehat{SCD} = \alpha$. Mặt bên SAB tạo với mặt phẳng đáy một góc $\beta = 90^0 - \alpha$. Gọi SH, SE theo thứ tự là đường cao của các tam giác SCD, SAB. Biết SH + SE = m, tính :

a/ Thể tích của hình chóp S.ABCD

b/ Tổng diện tích của hai mặt bên SAD, SBC.

Giải



a/ Hạ $SH \perp CD$. Vì mặt bên $(SCD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Hạ $HE \perp AB$; khi đó theo định lý ba đường vuông góc ta có SE chính là đường cao của tam giác SAB.

Trong tam giác vuông HSE

$\Rightarrow \quad SH = SE\sin\beta = SE\sin(90^0 - \alpha)$

$= SE\cos\alpha$

Do : $SH + SE = m \quad \Rightarrow SH\left(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right) = m$

$\Leftrightarrow \quad SH = \dfrac{m\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$ (ở đây $\alpha \neq 90^0$, vì ΔSCD vuông tại S)

Lại có : $AD = HE = SH.\cot\beta = SH.\tan\alpha$

Trong tam giác vuông HSC ta có : $HC = SH\cot\alpha$

Trong tam giác vuông HSD, ta có : $HD = SH\cot(90^0 - \alpha)$

$\Rightarrow \quad HD = SH\tan\alpha$ (vì ΔSDC vuông tại S).

$\Rightarrow \quad DC = HD + HC = SH(\tan\alpha + \cot\alpha)$

Lúc đó diện tích hình chữ nhật đáy là :

$$\mathcal{B} = DC.DA = SH^2\tan\alpha\,(\tan\alpha + \cot\alpha) = SH^2(1 + \tan^2\alpha) = \frac{SH^2}{\cos^2\alpha}$$

Do đó thể tích hình chóp S.ABCD là :

$$V = \frac{1}{3}SH.\mathscr{B} = \frac{1}{3}SH^3.\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{m^3\cos\alpha}{3(1+\cos\alpha)^3} \text{ (ycbt).}$$

b/ Ta có SD ⊥ AD (theo định lý ba đường vuông góc) ⇒ ΔSDA vuông tại D

và $SD = \frac{SH}{\sin\widehat{SDH}} = \frac{SH}{\cos\alpha}$ (vì ΔSDH vuông tại H)

Tương tự ta cũng có ΔSHC vuông tại H và $SC = \frac{SH}{\sin\alpha}$

Như vậy ta có :

$$dt(\Delta SAD) = \frac{1}{2}AD.SD = \frac{1}{2}SH\tan\alpha.\frac{SH}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}SH^2.\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2}BC.SC = \frac{1}{2}SH\tan\alpha.\frac{SH}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}SH^2.\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad dt(\Delta SAD) + dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2}SH^2\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad dt(\Delta SAD) + dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2}SH^2\left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad dt(\Delta SAD) + dt(\Delta SBC) = \frac{m^2(\sin\alpha + \cos\alpha)}{2(1+\cos\alpha)^2} \text{ (ycbt).}$$

Bài 105 (ĐẠI HỌC Y – DƯỢC – NHA – 1977)

Cho hình chóp V.ABC có đáy ABC là một tam giác đều cạnh bằng a. Giả sử mặt bên (VBC) vuông góc với mặt đáy (ABC), còn các mặt bên (VAC), (VAB) lần lượt hợp với mặt đáy (ABC) thành hai góc nhị diện bằng nhau có số đo bằng π/3. Gọi D là trung điểm của BC trong mặt phẳng (ABC), kẻ DE vuông góc với AC.

1/ Chứng minh rằng AD vuông góc với VD.

2/ Chứng minh rằng VE = 2DE.

3/ Tính diện tích toàn phần của hình chóp V.ABC

Giải

1/ Ta có : (VBC) ⊥ (ABC) theo giao tuyến BC nên, ta có :

AD ⊥ BC ⇒ AD ⊥ (VBC) ⇒ AD ⊥ VD (đpcm).

2/ Theo định lý 3 đường vuông góc ⇒ AC ⊥ VE

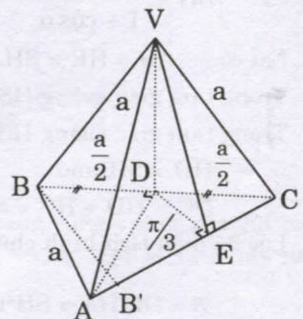
$\Rightarrow \varphi = \widehat{VED} = \widehat{[(VAC);(ABC)]} = \frac{\pi}{3}$; mà DE ⊥ VD

⇒ ΔVDE là nửa tam giác đều ⇒ VE = 2DE (đpcm).

3/ Diện tích toàn phần của hình chóp.

$S_{tp} = S_{VBC} + 2S_{VAC} + S_{ABC}$ (vì ΔVAB = ΔVAC)

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{1}{2}BC.VD + 2.\frac{1}{2}.AC.VE + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Ta có : $VD = \frac{VE\sqrt{3}}{2} = \frac{2DE\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$

Vì : $VE = 2DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad S_{tp} = \frac{1}{2}a.\frac{3a}{4} + a.\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \quad S_{tp} = \frac{a^2}{8}(3 + 6\sqrt{3}) = \frac{3a^2}{8}(1 + 2\sqrt{3})$ (ycbt).

Bài 106 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM – KHỐI B – 1977)

Cho tam giác cân OAB (OA = OB = a), đặt $\widehat{AOB} = \theta$. Từ O ta dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (OAB), và trên đó lấy đoạn OC bằng a.

a/ Chứng minh rằng ΔCAB là tam giác cân. Tính các góc và diện tích S của ΔCAB theo a và θ.

b/ Từ C ta dựng một đường thẳng thẳng góc với mặt phẳng CAB và trên đó ta lấy đoạn CD = CA. Tính các góc và diện tích S' của ΔDAB theo a và θ. Tính sinθ để S là trung bình cộng của S' và diện tích của ΔOAB.

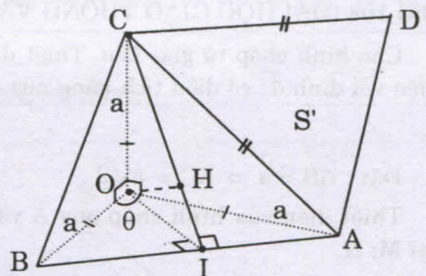
c/ Gọi I là trung điểm AB. Chứng minh rằng bốn điểm I, O, C, D cũng nằm trong một mặt phẳng.

Hướng dẫn

a/ $\widehat{CBA} = \widehat{CAB} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \Delta CAB$ cân

$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow S = a^2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1 + \cos^2\frac{\theta}{2}}$ (ycbt)



b/ $\widehat{DBA} = \widehat{DAB} = \arccos\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow S' = a^2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{3 + \cos^2\frac{\theta}{2}}$; $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ (ycbt).

c/ Độc giả tự giải.

Bài 107 (ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC TP.HCM – 1994)

Cho hình vuông ABCD cạnh a trong mặt phẳng (P). Hai điểm M; N lần lượt di động trên hai cạnh CB và CD. Đặt : CM = x và CN = y. Trên đường thẳng At vuông góc với (P), lấy điểm S. Tìm liên hệ giữa x và y để :

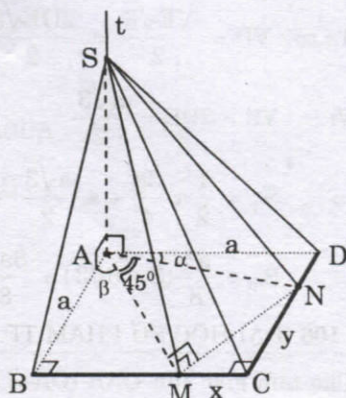
1/ Các mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45^0.

2/ Các mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Giải

1/ Ta có : $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AM \\ SA \perp AN \end{cases}$

$\Rightarrow \ \widehat{[(SAM);(SAN)]} = \widehat{MAN} = \dfrac{\pi}{4}$



Đặt : $\widehat{BAM} = \beta$; $\widehat{DAN} = \alpha$; ta có : $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \ \tan(\alpha + \beta) = 1 = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$ (1)

Mà : $\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{a-y}{a} \\ \tan\beta = \dfrac{a-x}{a} \end{cases}$; thay vào (1)

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \ \dfrac{a-x}{a} + \dfrac{a-y}{a} = 1 - \dfrac{(a-y)(a-x)}{a^2}$

$\Leftrightarrow \ a(2a - x - y) = a^2 - (a-x)(a-y)$

$\Leftrightarrow \ x = 2a$ (ycbt).

2/ Ta có : $(SAM) \perp (SMN) \Rightarrow AM \perp MN$

$\Leftrightarrow \ AN^2 = AM^2 + MN^2$

$\Leftrightarrow \ a^2 + (a-y)^2 = a^2 + (a-x)^2 + x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow \ x^2 = a(x - y)$ (ycbt).

Bài 108 (ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI – 1998)

Cho hình chóp tứ giác đều. Thiết diện qua một đỉnh của đáy và vuông góc với cạnh bên đối diện với đỉnh đó có diện tích bằng nửa diện tích đáy. Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.

Giải

Đặt : $AB = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

Thiết diện của hình chóp qua A và vuông góc với cạnh bên đối diện SC tại K, cắt SD; SB tại M; N.

Trong mặt phẳng (SBD), ta có : $\begin{cases} MN \perp SC \\ BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \end{cases}$

$\Rightarrow \ MN \,//\, BD$

Mà: $BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow \ BD \perp AK \Rightarrow MN \perp AK$

Suy ra : $S_{AMKN} = \dfrac{1}{2}AK.MN$ (1)

Để ý thấy hình chiếu của SC lên (ABCD) là OC

$\Rightarrow$ góc giữa cạnh bên và mặt đáy là : $\widehat{[SC;(ABC)]} = \widehat{ACS} = \alpha$; $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Với : $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{AK}{AC} \Rightarrow AK = a\sqrt{2}\sin\alpha \\ MN // BD \quad \Rightarrow \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{SO'}{SO} = 1 - \dfrac{OO'}{SO} \end{cases}$

Mặt khác : $\widehat{AO'O} = \widehat{ACS} = \alpha$

$\Rightarrow OO' = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cot\alpha \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{MN}{BD} = 1 - \cot^2\alpha$

$\Rightarrow MN = (1 - \cot^2\alpha).a\sqrt{2}$

Ta có : $S_{AMKN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$; $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

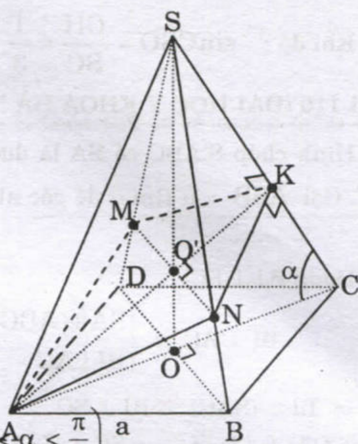
$\Leftrightarrow AK.\ MN = a^2$; $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (a\sqrt{2}\sin\alpha)(1 - \cot^2\alpha).a\sqrt{2} = a^2$; $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2(2\sin^2\alpha - 1) = \sin\alpha \Leftrightarrow 4.\sin^2\alpha - \sin\alpha - 2 = 0$; $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$ thì thỏa : $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

Vậy : $\alpha = \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right)$ (ycbt).



Bài 109 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM VINH – KHỐI G – 1999)

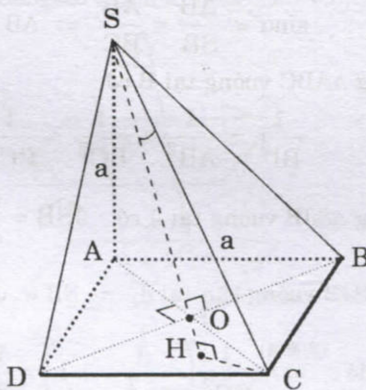
Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = AB = a.

1/ Tính diện tích tam giác SBD theo a.

2/ Chứng minh rằng các đường thẳng BD và SC vuông góc với nhau.

3/ Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD).

Giải



1/ Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có :

$BD \perp CA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO.$

Khi đó : $S_{\Delta SBD} = \frac{1}{2}SO.BD$

Với : $\begin{cases} BD = a\sqrt{2} \\ SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a \end{cases}$

$\Rightarrow S_{\Delta SBD} = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{6}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (ycbt).

2/ Ta có : $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.(đpcm)

3/ Dựng : $CH \perp SO$

Vì : $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CH$; nên : $CH \perp (SBD)$.

Hay góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{CSO}$.

Ta có : $\Delta SAO \backsim \Delta CHO$

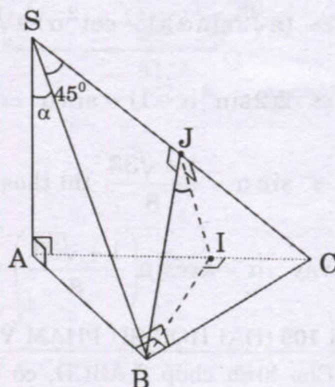
$$\Rightarrow \frac{SA}{CH} = \frac{SO}{CO} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow CH = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Khi đó : $\sin\widehat{CSO} = \dfrac{CH}{SC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \widehat{CSO} = \arcsin\dfrac{1}{3}$ (ycbt).

Bài 110 (ĐẠI HỌC Y KHOA HÀ NỘI – 1999)

Hình chóp S.ABC có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Cho $\widehat{BSC} = 45^0$. Gọi $\widehat{ASB} = \alpha$ tìm α để góc nhị diện (SC) bằng 60^0.

Giải



Dựng $BJ \perp SC$ (1)

$$BI \perp AC \Rightarrow \begin{cases} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BI \\ BI \perp AC \end{cases}$$

$\Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$ (2)

Từ (1) & (2) $\Rightarrow$ $SC \perp (BIJ)$ $\Rightarrow$ $IJ \perp SC$.

Khi đó, góc phẳng nhị diện cạnh SC là :

$$\varphi = \widehat{(SC)} = \widehat{BJI}.$$

Do ΔBIJ vuông tại I.

Nên : $\widehat{BJI} = 60^o \Leftrightarrow \Delta BIJ$ là nửa tam giác đều.

$$\Leftrightarrow BI = \frac{\sqrt{3}}{2}.BJ \Leftrightarrow \frac{1}{BI^2} = \frac{4}{3}.\frac{1}{BJ^2} \quad (3)$$

Mặt khác : $\begin{cases} \Delta SBC \text{ vuông tại B} \\ \widehat{BSC} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại B $\Rightarrow SB = BC$

$$\sin\alpha = \frac{AB}{SB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC.\sin\alpha$$

Trong ΔABC vuông tại B có :

$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{BC^2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + 1\right) \quad (4)$$

Trong ΔSJB vuông tại J có : $\widehat{JSB} = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \Delta SJB$ vuông cân tại J $\Rightarrow SB = \sqrt{2}.BJ \Rightarrow \dfrac{1}{BJ^2} = \dfrac{2}{BC^2}$

Khi đó : $\overset{(3)\&(4)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{BC^2}\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + 1\right) = \dfrac{4}{3}.\dfrac{2}{BC^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}; \quad (\text{do } 0 < \alpha < \pi)$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{5} \text{ (ycbt).}$$

ĐỀ TƯƠNG TỰ

Bài 111 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP TP.HCM – KHỐI C, D – 1994)

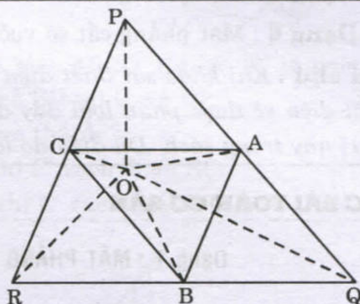
Tứ diện OPQR có các mặt ở đỉnh O bằng 1v. Gọi A, B, C theo thứ tự là trung điểm các cạnh PQ, QR, RP. Chứng minh :

a/ Các mặt tứ diện OABC là những tam giác bằng nhau.

b/ ΔABC nhọn.

c/ tanA.tanB = 2 biết nhị diện cạnh OA của tứ diện OABC là nhị diện vuông.

Hướng dẫn



a/ $OA = \frac{1}{2}PQ$ và $BC = \frac{1}{2}PQ \Rightarrow OA = BC$

$OB = AC$; $OC = AB \Rightarrow$ đpcm.

b/ $\Delta ABC \backsim \Delta PQR \Rightarrow$ đpcm.

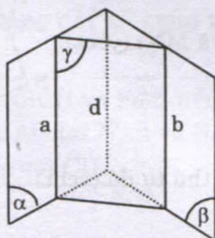
c/ Từ $\tan B \tan C = \frac{CH^2}{HA.HO}$ (1)

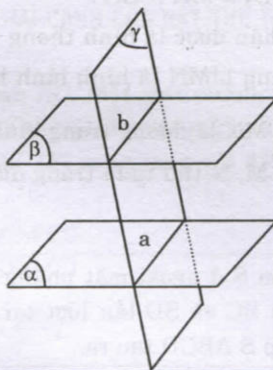
Ta có : $HC^2 = 2HA.HO$ thay vào (1) $\Rightarrow$ đpcm.

Chuyên đề 7 : CÁC LOẠI THIẾT DIỆN TẠO THÀNH VỚI VẬT THỂ HÌNH HỌC

CÁC ĐỊNH LÝ GIAO TUYẾN SONG SONG

❐ **ĐL₁** : Một mặt phẳng tùy ý (γ) song song với giao tuyến (d) của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (γ) cắt trở lại (α) và (β) lần lượt theo các giao tuyến a, b và : a // b // d.





❐ **ĐL₂** : Một mặt phẳng tuỳ ý (γ) cắt lần lượt hai mặt phẳng song song (α) // (β) theo hai giao tuyến song song a // b.

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp là sử dụng định lý giao tuyến song song và số điểm chung của hai mặt phẳng trong vật thể bằng cách thực hiện hai bước cơ bản :

❐ **B_1** : Tìm tất cả các giao tuyến mà một mặt phẳng cắt tùy ý (α) trong giả thiết có thể cắt được tất cả các mặt (mặt bên, mặt đáy) của một vật thể hình học.

❐ **B_2** : Nối liên tiếp và khép kín các đoạn giao tuyến đó trên vật thể hình học ta được hình đa giác phẳng gọi là thiết diện.

✪ **Ghi chú :** *để tiện lợi có thể phân chia thiết diện ra làm sáu dạng nhỏ :*

- **Dạng 1** : Mặt phẳng cắt sẽ quay quanh một cạnh vật thể tạo ra thiết diện.
- **Dạng 2** : Mặt phẳng cắt sẽ song song với một cạnh hoặc hai cạnh của vật thể tạo ra thiết diện.
- **Dạng 3** : Mặt phẳng cắt sẽ song song với một mặt phẳng của vật thể.
- **Dạng 4** : Mặt phẳng cắt sẽ chắn hai mặt phẳng của vật thể.
- **Dạng 5** : Mặt phẳng cắt sẽ thẳng góc với một đường thẳng của vật thể.
- **Dạng 6** : Mặt phẳng cắt sẽ vuông góc với mặt phẳng của cố thể.

✪ **Ghi chú :** *Khi khảo sát thiết diện mà đã biết cả sự song song và sự vuông góc thì các loại thiết diện sẽ được phân loại đầy đủ. Điều đó lý giải cho việc sắp xếp chuyên đề 7 đứng ở vị trí này trong sách. Dù điều đó là muộn nhưng lại đạt tính đầy đủ cao !*

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1 : MẶT PHẲNG CẮT SẼ QUAY QUANH MỘT CẠNH VẬT THỂ TẠO RA THIẾT DIỆN

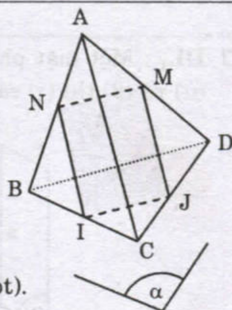
Bài 112

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC và CD trong tứ diện ABCD. Một mặt α qua IJ cắt các cạnh AD và AB lần lượt tại M và N.

a/ Hình tứ giác IJMN ?

b/ M và N phải ở vị trí nào để tứ giác IJMN là hình bình hành ?

Giải



a/ Để ý (α) quay quanh IJ nên (α) // BD; vì BD // IJ

$\Rightarrow$ (α) $\cap$ (ABD) = MN // BD

Thiết diện nhận được là hình thang IJMN (hai đáy IJ và MN) (ycbt).

b/ Khi hình thang IJMN là hình bình hành cần phải có :

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{MN}$ $\Leftrightarrow$ MN là đường trung bình ΔABD

$\Leftrightarrow$ M, N thứ tự là trung điểm AD và AB theo thứ tự đó (ycbt).

Bài 113

Cho một điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa hình thang ABCD(AB//CD). Một mặt phẳng qua AB cắt các cạnh SC và SD lần lượt tại C' và D'. Hãy nói rõ hình tính thiết diện mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD tạo ra.

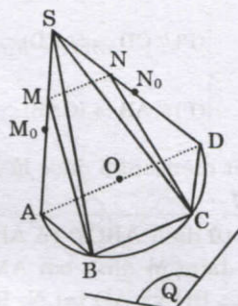
Hướng dẫn

Độc giả tự giải và được thiết diện là hình thang ABC'D' (đáy AB; C'D').

Bài 114

Cho nửa hình lục giác đều ABCD nội tiếp trong vòng tròn O đường kính AD, S là một điểm ở ngoài mặt phẳng (ABCD). Qua BC vẽ một mặt phẳng lưu động (Q) cắt các đoạn SA và SD tại M và N. Hình tính của thiết diện ? Thiết diện này có thể là hình bình hành không ? Xác định vị trí của thiết diện là hình bình hành lúc đó ?

Hướng dẫn



Thiết diện tùy ý thông thường là hình thang ADMN (AD // MN).

Thiết diện đó là hình bình hành khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} M \equiv M_0 : \text{trung điểm SA} \\ N \equiv N_0 : \text{trung điểm SD} \end{cases} \text{(ycbt).}$$

Bài 115

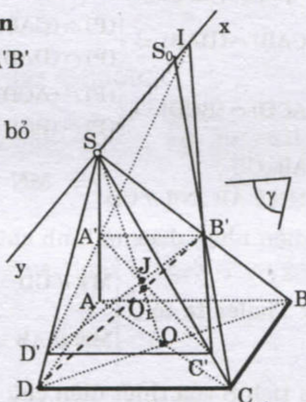
Cho một hình vuông ABCD, S là một điểm ở ngoài mặt ABCD. Gọi A', B' là trung điểm SA và SB. Một mặt phẳng (γ) lưu động qua A'B' cắt SC và SD tại C' và D'.

a/ Hình tính thiết diện mà (γ) cắt hình chóp S.ABCD tạo thành ?

b/ Gọi I là giao điểm của A'D' và B'C'. Tìm quỹ tích I khi C' vạch đoạn SC.

c/ Gọi J là giao điểm của A'C' và B'D'. Tìm quỹ tích J khi C' vạch đoạn SC.

Hướng dẫn



a/ Thiết diện là hình thang A'B'C'D' mà hai đáy A'B' và C'D' (ycbt).

b/ Quỹ tích I là hai tia nằm trên đường thẳng xSy bỏ đi những điểm trên đó nằm trong đoạn SS_0, với

$S_0 = CB' \cap xSy$

và $Sx \subset xSy = (SAD) \cap (SBC)$ (ycbt).

c/ Quỹ tích J là đoạn :

$SO_1 \subset SO = (SAC) \cap (SBD)$,

trong đó $O_1 = DB' \cap SO$ (ycbt).

Dạng 2 : MẶT PHẲNG CẮT SẼ SONG SONG VỚI MỘT HOẶC HAI CẠNH CỦA VẬT THỂ TẠO RA THIẾT DIỆN

Bài 116

Cho tứ diện ABCD và một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Một mặt phẳng (P) qua M cắt các cạnh BC, BD và AD tại N, R và S. Hãy nói rõ hình tính thiết diện trong mỗi trường hợp sau :

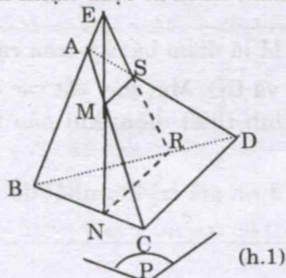
a/ (P) song song với CD. b/ (P) song song với AB và CD.

Giải

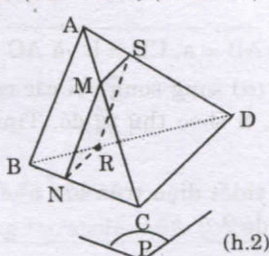
a/ Khi (P) // CD = (ACD) ∩ (BCD) ⇒ $\begin{cases} (P) \cap (ACD) = MS \,//\, CD \\ (P) \cap (BCD) = NR \,//\, CD \end{cases}$

Dựng hình bằng cách : $\begin{cases} \text{kéo dài MN} : MN \cap AB = E \\ \text{nối ER} \quad : ER \cap AD = S \end{cases}$

Thiết diện nhận được là hình thang MNRS (MS // NR) (xem h.1).



(h.1)



(h.2)

b/ Khi : $\begin{cases} (P) // CD \Rightarrow (ACD) \cap (BCD) \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (ACD) = MS // CD \\ (P) \cap (BCD) = NR // CD \end{cases} \\ (P) // AB \Rightarrow (CAB) \cap (DAB) \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (CAB) = MN // AB \\ (P) \cap (DAB) = SR // AB \end{cases} \end{cases}$

Thiết diện nhận được là hình bình hành MNRS (h.2).

Bài 117

Cho tứ diện ABCD có AB trực giao (vuông góc) với CD.Biết AB = CD = AC = a. Trên cạnh AC lấy điểm M định bởi AM = x. Qua M kẻ mặt phẳng (P) song song với AB và CD, cắt các cạnh BC, BD và AD tại N, R, và T.

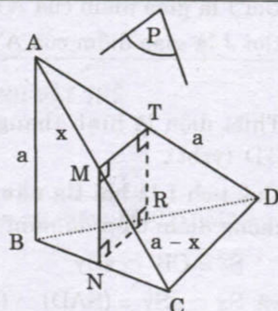
a/ Tìm hình tính thiết diện và cắt tứ diện ABCD ?

b/ Tính diện tích S của thiết diện đó theo a và x.

c/ Định x để S đạt gía trị lớn nhất. Tính trị số lớn nhất này ?

d/ Tính x để $S = m^2$ (m^2 : số dương cho sẵn). Biện luận.

Hướng dẫn



a/ Để ý khi (α) qua M, ta có :

$$\begin{cases} (P) // AB = (CAB) \cap (DAB) \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (CAB) = MN // AB \\ (P) \cap (DAB) = RT // AB \end{cases} \\ (P) // CD = (ACD) \cap (BCD) \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (ACD) = MT // CD \\ (P) \cap (BCD) = MR // CD \end{cases} \end{cases}$$

Hơn nữa : $\begin{cases} AB \perp CD \\ MN // AB \, ; NR // CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp NR$

Do đó thiết diện nhận được là hình chữ nhật MNRT (ycbt).

b/ Theo định lý Thalès ta có : $\begin{cases} MT // CD \Rightarrow \dfrac{MT}{CD} = \dfrac{AM}{AC} \Leftrightarrow MT = CD.\dfrac{AM}{AC} = a.\dfrac{x}{a} = x \\ MN // AB \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{CA} \Leftrightarrow MN = AB.\dfrac{CM}{CA} = a.\dfrac{a-x}{a} = a - x \end{cases}$

Lúc đó : diện tích S của thiết diện chữ nhật MNRT tính theo a và x là :

$$S = S(x) = MT.MN = x(a - x) \qquad (1) \qquad \text{(ycbt)}.$$

c/ Nhận thấy khi AM = x, trong (1) có : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant a - x \leqslant a \end{cases}$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số không âm x và a – x.

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} S(x) = x(a - x) \leqslant \left(\frac{x + (a - x)}{2}\right)^2 \Leftrightarrow S(x) \leqslant \frac{a^2}{4} \quad (2)$$

Trong (2), dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2} \in [0; a]$

Vậy $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant a} S(x) = S\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^2}{2}$ (xảy ra khi $x = \dfrac{a}{2}$ hay M là trung điểm AC) (ycbt).

d/ Cho $x(a - x) = m^2 \Rightarrow$ Độc giả tự giải.

Bài 118

Cho tứ diện ABCD có AB = a, CD = b và AC = c.Gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh AC.

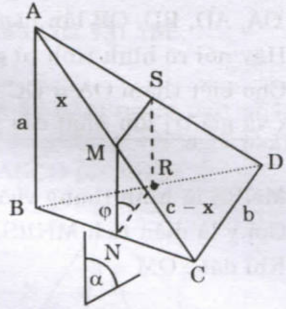
a/ Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với các cạnh AB và CD. Mặt này cắt các cạnh BC, BD, AD của tứ diện tại N, R, S theo thứ tự đó. Tìm hình tính thiết diện; khi nào thiết diện trở thành hình chữ nhật ?

b/ Khi nào thì diện tích thiết diện trên lớn nhất ? Xác định giá trị lớn nhất đó và vị trí thiết diện với giá trị lớn nhất đó ?

Giải

a/ Tương tự bài 117 ở trên thiết diện nhận được là hành bình hành MNRS.

Thiết diện đó là hình chữ nhật $\Leftrightarrow AB \perp CD$ (ycbt).



b/ Ta có : $\begin{cases} \dfrac{SM}{CD} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow SM = \dfrac{b}{c}x \\ \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{CA} \Rightarrow MN = \dfrac{a}{c}(c-x) \end{cases}$

Để ý AB; CD cố định không gian vì tứ diện là cố thể.

$\Rightarrow \varphi = \widehat{MNR} = (\widehat{AB; CD}) = \text{(const)}$

Gọi S là diện tích thiết diện bình hành MNRS, ta có :

$$S = S(x) = SM.MN.\sin\varphi = \frac{ab\sin\varphi}{c^2}.x.(c-x)$$

BĐT Cauchy $\Rightarrow S(x) \leqslant \dfrac{ab.\sin\varphi}{c^2}\left(\dfrac{x+c-x}{2}\right)^2 \Rightarrow S(x) \leqslant \dfrac{ab\sin\varphi}{4}$ (1)

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = c - x \Leftrightarrow x = \dfrac{c}{2}$

$\Rightarrow \max\limits_{0\leqslant x\leqslant c} S = \dfrac{ab\sin\varphi}{4}$ xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{c}{2}$ (lúc đó M trung điểm AC)

Vậy $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant c} S = \dfrac{ab\sin\varphi}{4}$ tương ứng (α) qua 4 trung điểm 4 cạnh AC, BC, BD, AD theo thứ tự đó; tương ứng MNRS là hình thoi (ycbt).

Bài 119

Cho tứ diện đều SABC cạnh a và một mặt phẳng lưu động (π) qua S song song với BC, Cắt AB ở M và AC ở N.

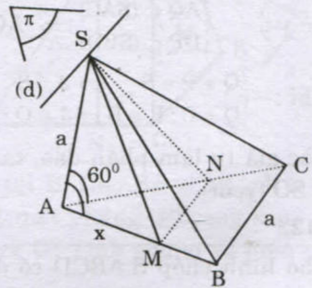
a/ Hình tính thiết diện của (π) với tứ diện?

b/ Chứng tỏ (π) chứa một đường thẳng cố định.

c/ Đặt AM = x. Tính tổng y các bình phương các cạnh tam giác SMN, vẽ đồ thị y = y(x).

Giải

a/ Thiết diện nhận được là tam giác SMN cân tại S (ycbt).



b/ Để ý từ S dựng (d) // BC

$\Rightarrow \begin{cases} \text{(d) cố định} \\ (d) = (SMN) \cap (SBC) \end{cases}$

Do đó (π) chứa (d) cố định (đpcm).

c/ Ta có từ định lý Thalès, khi MN // BC.

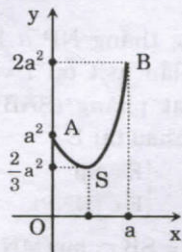
$\Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \Leftrightarrow MN = BC.\dfrac{AM}{AB} = a.\dfrac{x}{a} = x$

Xét $\Delta SAM = \Delta SAN$ (với chú ý $\widehat{SAM} = \widehat{SAN} = 60^0$)

$\Rightarrow SN = SM = \sqrt{SA^2 + AM^2 - 2SA.AM\cos 60^0}$

$= \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax.\dfrac{1}{2}}$

$\Rightarrow SN = \sqrt{a^2 + x^2 - ax}$



Do đó : $y = MN^2 + SM^2 + SN^2 = x^2 + 2a^2 + 2x^2 - 2ax$

$\Rightarrow y = 3x^2 - 2ax + 2a^2$ có đồ thị là cung Parabola $\widehat{ASB}$ (ycbt).

Bài 120

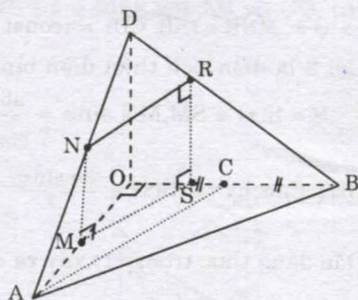
Cho ΔABO vuông tại O, C là trung điểm của OB và một điểm D ở ngoài mặt phẳng chứa tam giác sao cho OD trực giao với AC. Một mặt phẳng (α) lưu động song song với AC và OD cắt OA, AD, BD, OB lần lượt tại M, N, R, S.

a/ Hãy nói rõ hình tính tứ giác MNRS ?

b/ Cho biết thêm OA = OC = OD = a và đặt OM = x. Tính diện tích y của tứ giác trên theo a và x và giá trị lớn nhất của y ?

Hướng dẫn

a/ MNRS là hình thang vuông tại M và S (ycbt).



b/ Gọi y là diện tích MNRS.

Khi đặt : OM = x

$$\Rightarrow \begin{cases} MS = x\sqrt{2} \\ MN = a - x \Rightarrow y = \dfrac{MN + RS}{2}.MS \\ RS = \dfrac{2a - x}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}(4a - 3x)(3x) \leq \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{4a - 3x + 3x}{2}\right)^2$$

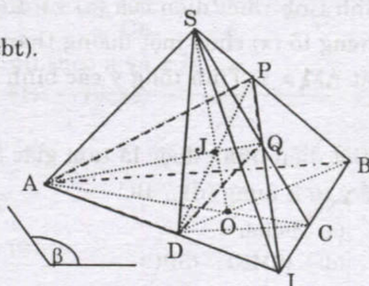
$$\Rightarrow y \leq \frac{\sqrt{2}}{3}a^2 \text{ hay } \max_{0 \leq 0 \leq a} y = \frac{\sqrt{2}}{3}a^2 \Leftrightarrow 4a - 3x = 3x \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3} \text{ (ycbt).}$$

Bài 121

Cho hình thang ABCD (AB là đáy lớn) lấy một điểm S ở ngoài mặt phẳng ABCD. Mặt phẳng β quay quanh AD cắt SB, SC tại P, Q. Tìm thiết diện tạo được và quỹ tích giao điểm J = AQ ∩ DP.

Hướng dẫn

Theo cách dựng thì thiết diện là tứ giác lồi APQD (ycbt).



Gọi O = AC ∩ BD ⇒ SO = (SAC) ∩ (SBD)

Để ý : $\begin{cases} AQ \subset (SAC) \\ DP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow AQ \cap DP = J \in SO$

Khi : $\begin{cases} Q \equiv P \equiv S \Rightarrow J \equiv S \\ Q \equiv C ; P \equiv B \Rightarrow J \equiv O \end{cases}$

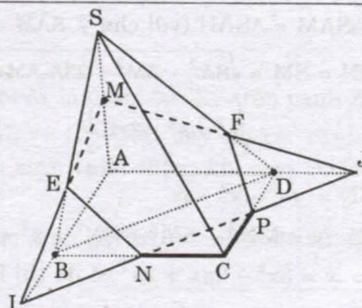
Độc giả tự làm phần đảo, ta được quỹ tích J là đoạn SO (ycbt).

Bài 122

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC và CD. Hãy dựng thiết diện của hình chóp khi cắt mp(MNP).

Hướng dẫn

Đường thẳng NP // BD, nên cắt các đường thẳng AB, AD lần lượt tại I và J; tương tự IM và SB cùng thuộc mặt phẳng (SAB) và chúng không song song nên cắt nhau tại E.



Ta có : $\begin{cases} E \in SB \\ E \in (MNP) \end{cases}$

⇒ E = SB ∩ mp(MNP).

Tương tự như vậy ta cùng xác định được giao điểm: F = SD ∩ mp(MNP).

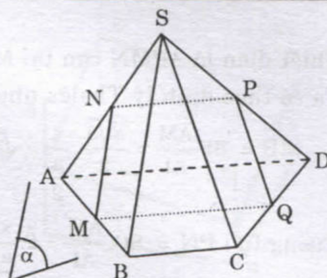
Vậy thiết diện của hình chóp S.ABCD với mp(MNP) là ngũ giác MENPF (ycbt).

Dạng 3 : MẶT PHẲNG CẮT SẼ SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG CỦA VẬT THỂ

Bài 123

Cho hình thang ABCD có hai đáy AD và BC. Gọi S là điểm bất kỳ nằm ngoài mặt phẳng (ABCD). Trên đoạn AB lấy điểm M. Qua M dựng mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SBC). Xác định tính chất thiết diện MNPQ mà α cắt hình chóp S.ABCD tạo thành.

Giải



Để ý khi (α) qua M và đồng thời (α) // (SBC)

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha) \,//\, SB \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MN \,//\, SB \\ (\alpha) \,//\, BC \Rightarrow \begin{cases} (\alpha) \cap (ABCD) = MQ \,//\, BC \\ (\alpha) \cap (SAD) = NP \,//\, BC \end{cases} \\ (\alpha) \,//\, SC \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = PQ \,//\, SC \end{cases}$$

Nối liên tiếp các cạnh giao tuyến tạo thành đường khép kín trên hình chóp S.ABCD.

Ta được thiết diện là hình thang MNPQ (2 đáy MQ // NP) (ycbt)

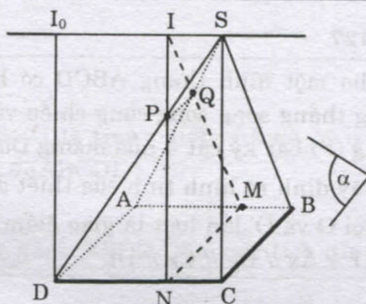
Bài 124

Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là một điểm lưu động trên đoạn AB. Qua M kẻ mặt phẳng α song song với mặt (SBC).

a/ Chứng minh thiết diện với hình chóp S.ABCD nhận được là hình thang.

b/ Tìm quỹ tích giao điểm I của hai cạnh bên hình thang nói ở trên.

Hướng dẫn



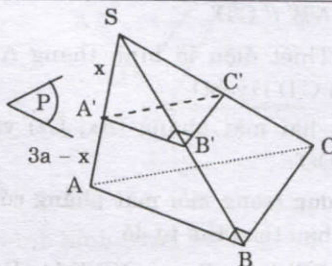
a/ Độc giả tự giải và chứng minh được thiết diện là hình thang MNPQ (đáy lớn là MN) (đpcm).

b/ Quỹ tích I là đoạn SI_0 song song với AB và DC, trong đó $DNII_0$ là hình bình hành (ycbt).

Bài 125

Cho tứ diện SABC mà đáy ABC là một tam giác vuông góc tại B. Cho SA = 3a, AB = 4a, BC = 3a. Từ một điểm A' trên cạnh SA sao cho SA' = x, vẽ một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng ΔABC. Mặt phẳng này cắt SB và SC lần lượt tại B' và C'. Tính chu vi và diện tích thiết diện có được theo x.

Hướng dẫn



Thiết diện là ΔA'B'C' ($\hat{B} = 90^0$)

Theo định lý Thalès ta có :

$$\begin{cases} A'B' = AB.\dfrac{SA'}{SA} = 4a.\dfrac{x}{3a} = \dfrac{4}{3}x \\ B'C' = BC.\dfrac{SA'}{SA} = 3a.\dfrac{x}{3a} = x \\ A'C' = AC.\dfrac{SA'}{SA} = \sqrt{(3a^2) + (4a^2)}.\dfrac{x}{3a} = 5a.\dfrac{x}{3a} = \dfrac{5}{3}x \end{cases}$$

Chu vi : $\mathscr{C}_{\Delta A'B'C'} = \frac{4}{3}x + x + \frac{5}{3}x = 4x$ (ycbt)

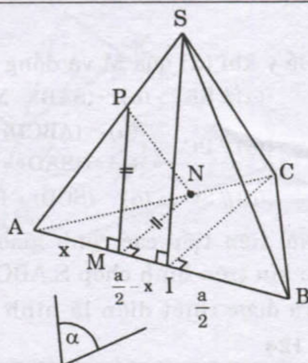
Diện tích : $S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}A'B'.B'C' = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.x.x = \frac{2}{3}x^2$ (ycbt).

Bài 126

Cho tứ diện đều SABC cạnh a. Gọi I là trung điểm AB. M là một điểm lưu động trong đoạn AI. Qua M vẽ một mặt phẳng (P) // (SIC).

a/ Mặt (P) cắt tứ diện theo hình gì ? b/ Tính chu vi y của thiết diện theo x = AM và a.

Hướng dẫn



a/ Thiết diện là ΔPMN cân tại M (ycbt).

b/ Ta có theo định lý Thalès như sau :

$$MP = SI.\frac{AM}{AI} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{x}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.x \Rightarrow MN = MP = \sqrt{3}x.$$

Tương tự : $PN = SC.\frac{AM}{AI} = a.\frac{x}{\frac{a}{2}} = 2x$

Do đó chu vi y của thiết diện là :

$$y = 2(\sqrt{3}.x) + 2x = 2(\sqrt{3} + 1)x;\ \forall a \text{ (ycbt)}.$$

Dạng 4 : MẶT PHẲNG CẮT SẼ CHẮN HAI MẶT PHẲNG SONG SONG LIÊN ĐỚI ĐẾN VẬT THỂ

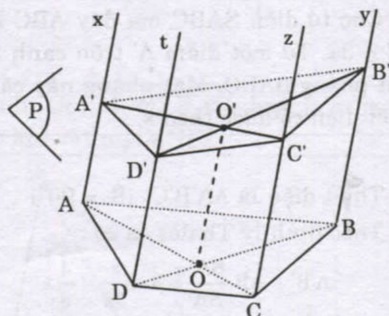
Bài 127

Cho một hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD. Gọi Ax, By, Cz và Dt là các nửa đường thẳng song song cùng chiều và không nằm trong mặt phẳng chứa hình thang. Một mặt phẳng (P) bất kỳ cắt 4 nửa đường thẳng trên lần lượt tại A', B', C', D'.

a/ Hãy định rõ hình tính của thiết diện.

b/ Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của các đường chéo hình thang ABCD và A'B'C'D'. Chứng tỏ OO' // Ax // By // Cz // Dt.

Giải



a/ Để ý (Ax; By) // (Cz; Dt) (1)

$$\Rightarrow \begin{cases}(P) \cap (Ax; By) = A'B' \\ (P) \cap (Cz; Dt) = C'D'\end{cases}$$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ A'B' // C'D'

⇒ Thiết diện là hình thang A'B'C'D' (hai đáy là A'B' và C'D') (ycbt).

b/ Xét hai mặt phẳng (Ax; Cz) và (Cy; Dt) có giao tuyến OO'.

Nhưng trong mỗi mặt phẳng có chứa Cz, By, song song nhau theo thứ tự đó.

⇒ OO' // Cz; By ⇒ OO' // Ax; Dt (theo tính chất bắc cầu)

Vậy OO' // Ax // By // Cz // Dt (đpcm).

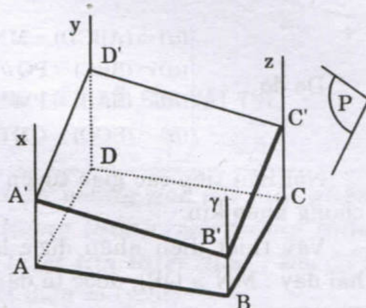
Bài 128

Cho hình bình hành ABCD. Từ những đỉnh của hình bình hành này ta kẻ những nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt song song cùng chiều không nằm trong mặt phẳng ABCD. Một mặt phẳng (P) cắt 4 đường thẳng trên tại A', B', C', D'.

a/ Chứng minh (ABA'B') // (CDC'D'); (BCC'B') // (ADD'A')

b/ Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?

Giải



a/ Để ý : $\begin{cases} AB // CD \\ A'A' // C'C' \end{cases} \Rightarrow$ (ABA'B) // (CDD'C') (đpcm).

Tương tự : (BCC'B') // (ADD'A') (đpcm).

b/ Ta có : $\begin{cases} (P) \cap (ABA'B') = A'B' \\ (P) \cap (CDC'D') = C'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' // C'D'$

và $\begin{cases} (P) \cap (CBC'B') = B'C' \\ (P) \cap (ADD'A') = A'D' \end{cases} \Rightarrow B'C' // B'D'$

$\Rightarrow$ A'B'C'D' là hình bình hành (ycbt).

Bài 129

Cho hai hình bình hành ABCD và A'B'C'D' không nằm cùng trong mặt phẳng.

a/ Chứng minh (AA'B) // (DD'C).

b/ Một mặt phẳng bất kỳ (P) cắt AB, B'A', C'D' và CD tại M, N, R, S. Hãy nói rõ hình tính thiết diện nhận được ?

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

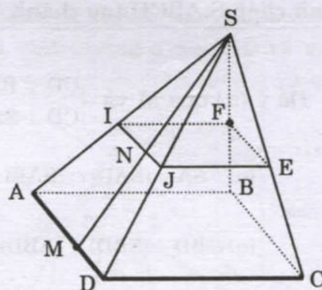
Bài 130

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA và M là điểm lưu động trên cạnh AD. Xét N là điểm thuộc SM thỏa IN // (ABCD).

a/ Tìm quỹ tích các điểm N.

b/ Trong câu này giả sử M chạy trên cả chu vi hình bình hành ABCD. Tìm quỹ tích của N.

Giải



a/ Ta có : $\begin{cases} IN // (ABCD) \\ IN \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow IN // AD$

$\Rightarrow N \in IJ$: là đường trung bình của ΔSAD.

Khi : $\begin{cases} M \equiv A \Rightarrow N \equiv I \\ M \equiv D \Rightarrow N \equiv J \end{cases}$

Đảo lại lấy điểm tùy ý $N_0 \in IJ$.

$\Rightarrow IN_0 // (ABCD)$

Vậy quỹ tích N là đoạn IJ (ycbt).

b/ Gọi E, F thứ tự là trung điểm SC và SB.

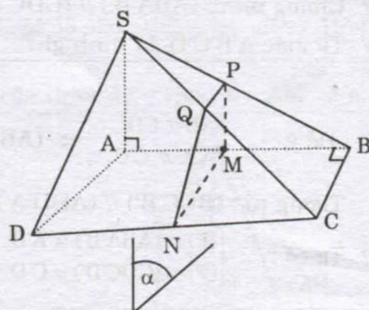
Tương tự ta có quỹ tích của N là chu vi của thiết diện hình bình hành IJEF (ycbt).

Dạng 5 : MẶT PHẲNG CẮT SẼ THẲNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CỦA VẬT THỂ

Bài 131

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ AB; BC ⊥ AB. Tìm thiết diện mà mặt α ⊥ AB tại M ∈ AB cắt hình chóp tạo thành ?

Giải



Để ý (α) qua M, (α) ⊥ (AB) ⇒ $\begin{cases}(\alpha)\ //\ BC\\(\alpha)\ //\ SA\end{cases}$

Do đó : $\begin{cases}(\alpha)\cap(ABCD) = MN\ //\ BC\\(\alpha)\cap(SBC) = PQ\ //\ BC\\(\alpha)\cap(SAB) = PM\ //\ SA\\(\alpha)\cap(SCD) = QN\ \text{(không cần ghi ràng buộc)}\end{cases}$

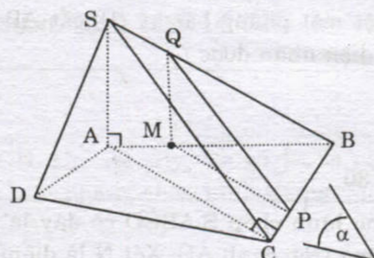
Nối liên tiếp các giao tuyến MN, NQ, QP và PM thấy chúng khép kín.

Vậy thiết diện nhận được là hình thang MNQP (với hai đáy : MN > QP), được tô đậm như trong hình bên.

Bài 132

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ AB; tam giác ABC cân vuông tại C. Gọi M là một điểm lưu động trong đoạn AB. Tìm thiết diện mà mặt α ⊥ AB tại M đồng thời (α) ⊥ BC cắt hình chóp tạo thành ?

Giải



Ta có : (α) qua M và :

$\begin{cases}(\alpha)\perp AB \Rightarrow (\alpha)\ //\ SA \subset (SAB)\\(\alpha)\perp BC \Rightarrow (\alpha)\ //\ AC \subset (ABC)\end{cases}$

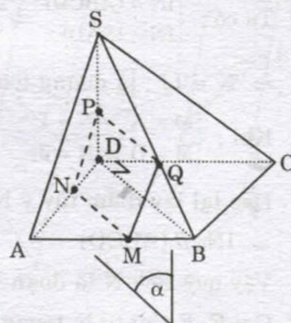
$\Rightarrow \begin{cases}(\alpha)\cap(SAB) = MQ\ //\ SA\\(\alpha)\cap(ABC) = MP\ //\ AC\end{cases}$

Thiết diện nhận được là ΔPMQ.

Bài 133

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn CD và SA ⊥ CD; BD ⊥ CD. Gọi M là một điểm lưu động trên AB.Tìm thiết diện mà mặt α qua M vuông góc với CD và cắt hình chóp S.ABCD tạo thành ?

Giải



Để ý (α) qua M và $\begin{cases}CD\perp BD,\ (\alpha)\perp CD \Rightarrow (\alpha)\ //\ BD\\CD\perp SA,\ (\alpha)\perp CD \Rightarrow (\alpha)\ //\ SA\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}(\alpha)\ //\ SA = (SAD)\cap(SAB) \Rightarrow \begin{cases}(\alpha)\cap(SAD) = NP\ //\ SA\\(\alpha)\cap(SAB) = MQ\ //\ SA\end{cases}\\(\alpha)\ //\ BD = (SBD)\cap(ABD) \Rightarrow \begin{cases}(\alpha)\cap(SBD) = PQ\ //\ BD\\(\alpha)\cap(ABD) = MN\ //\ BD\end{cases}\end{cases}$

Thiết diện nhận được mà (α) tạo với hình chóp S.ABCD là hình bình hành MNPQ.

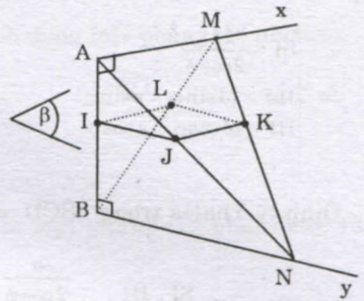
Bài 134

Cho hai tia Ax và By không đồng phẳng, sao cho AB ⊥ Ax và By. Gọi M, N là hai điểm lưu động trên Ax và By theo thứ tự đó còn I là một điểm tuỳ ý trên AB. Dựng thiết diện mà mặt phẳng β qua I vuông góc với AB cắt tứ diện ABMN tạo thành.

Giải

Mặt phẳng (β) ⊥ AB tại I do đó :

$$\Rightarrow \begin{cases} (\beta) // Ax = (BAM) \cap (AMN) \Rightarrow \begin{cases} (\beta) \cap (BAM) = IL // Ax \\ (\beta) \cap (AMN) = JK // Ax \end{cases} \\ (\beta) // Ay = (ABN) \cap (BMN) \Rightarrow \begin{cases} (\beta) \cap (ABN) = IJ // By \\ (\beta) \cap (BMN) = LK // By \end{cases} \end{cases}$$



Thiết diện nhận được khi (β) ⊥ (AB) tạo thành với tứ diện ABMN là hình bình hành IJKL (ycbt).

Dạng 6 : MẶT PHẲNG CẮT SẼ VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG LIÊN ĐỚI CỦA VẬT THỂ

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp là quy đổi bài toán dựng ***thiết diện vuông góc với mặt phẳng*** *(α)* thành bài toán ***dựng thiết diện song song với một đường thẳng, mà đường thẳng đó vuông góc sẵn với mặt phẳng (α) đã cho trong giả thiết tìm thiết diện :*** sau đó áp dụng định lý giao tuyến song song và phương pháp dựng thiết diện ⇒ (ycbt).

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 135

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD); SA = a và ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Dựng và tính diện tích thiết diện qua SO và vuông góc với (SDC).

Giải

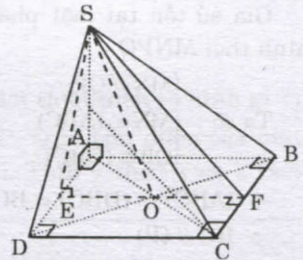
Qua O dựng EF // AB ⊥ (SAD) với E ∈ AD; F ∈ BC

⇒ EF ⊥ (SAD)

Do đó thiết diện nhận được là ΔSEF ($\hat{E} = 90^0$) ycbt.

Gọi S là diện tích thiết diện đó :

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}EF.SE = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a^2\sqrt{5}}{4} \text{ (ycbt).}$$



Bài 136

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường cao hình chóp là SO. Gọi I là trung điểm CD và φ = [SI; (BCD)] (φ > 45⁰). Xét mặt phẳng α qua AB và vuông góc (SCD). Xác định thiết diện của α và hình chóp và tính diện tích thiết diện theo a và φ.

Giải

Gọi J là trung điểm AB ⇒ CD ⊥ (SIJ)

Mà CD ⊂ (SCD) ⇒ (SIJ) ⊥ (SCD)

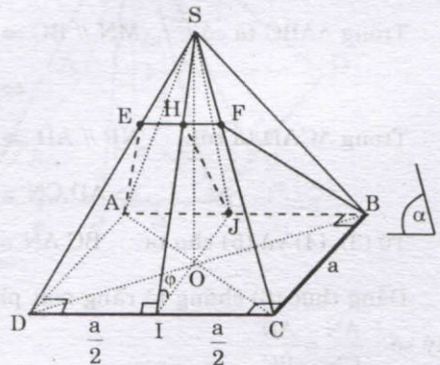
Hạ JH ⊥ (SCD); H ∈ SI

Dựng EF qua H và EF // AB

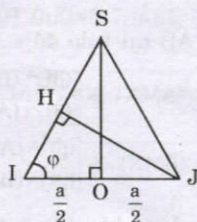
⇒ EF ⊥ (SIJ) với E ∈ SD; F ∈ SC

Thiết diện nhận được là hình thang cân ABEF (đáy lớn AB; đường cao JH)

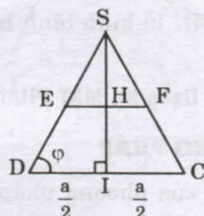
Trong ΔIHJ ($\hat{H} = 90^0$)



$$\Rightarrow \begin{cases} SI = \dfrac{a}{2\cos\varphi} \\ HJ = IJ\sin\varphi = a\sin\varphi \\ HI = IJ\cos\varphi = a\cos\varphi \end{cases}$$



Định lý Thalès trong $\Delta SCD \Rightarrow \dfrac{EF}{CD} = \dfrac{SH}{SI}$



$$\Leftrightarrow EF = CD\frac{SI - HI}{SI} = a.\frac{\dfrac{a}{2\cos\varphi} - a\cos\varphi}{\dfrac{a}{2\cos\varphi}}$$

$\Leftrightarrow EF = a(1 - 2\cos^2\varphi) = -a\cos 2\varphi$

$\Leftrightarrow EF = -a\cos 2\varphi$ (2φ góc tù)

Diện tích S của thiết diện là :

$$S = \frac{1}{2}HJ(EF + AB) = \frac{1}{2}a\sin\varphi\,(a - a\cos 2\varphi) = \frac{a^2}{2}(1 - \cos 2\varphi)\sin\varphi \text{ (ycbt).}$$

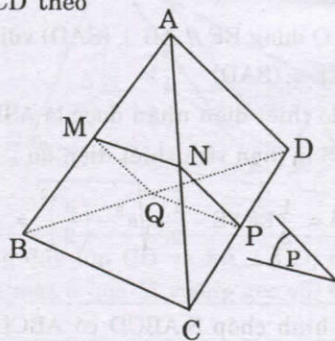
III. GIẢI TOÁN THI

Bài 137 (ĐẠI HỌC KHỐI B MIỀN BẮC – 1973)

ABCD là một tứ diện tùy ý. Chứng minh rằng luôn luôn tồn tại một mặt phẳng (P) cắt tứ diện ấy theo một hình thoi. Hãy chỉ rõ một cách dựng mặt phẳng P.

Giải

Giả sử tồn tại mặt phẳng (P) cắt tứ diện tùy ý ABCD theo hình thoi MNPQ.



Ta có : $\begin{cases} MN \,//\, QP \\ MN \subset (ABC) \\ QP \subset (DBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (ABC) \cap (DBC) = BC \,//\, MN, QP.$

$\Rightarrow BC \,//\, (P)$ (1)

Tương tự : $\begin{cases} MQ \,//\, NP \\ MQ \subset (BAD) \\ NP \subset (CAD) \end{cases}$

$\Rightarrow (BAD) \cap (CAD) = AD \,//\, MQ, MP \Rightarrow AD \,//\, (P)$ (2)

MNPQ là hình thoi $\Rightarrow MN = NP$ (3)

Trong ΔABC ta có : $MN \,//\, BC \Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AN}{AC}$

$\Leftrightarrow BC.AN = AC.MN$ (4)

Trong ΔCAD ta có : $NP \,//\, AD \Rightarrow \dfrac{NP}{AD} = \dfrac{CN}{AC}$

$\Leftrightarrow AD.CN = AC.NP$ (5)

Từ (3), (4) và (5) cho ta : $BC.AN = AD.CN \Leftrightarrow \dfrac{AN}{CN} = \dfrac{AD}{BC}$ (6)

Đẳng thức (6) chứng tỏ rằng mặt phẳng (P) chia đoạn AC thành hai đoạn thành phần theo tỷ số : $\dfrac{AN}{CN} = \dfrac{AD}{BC}$

Như vậy mặt phẳng (P) có tính chất trên là tồn tại và ta có cách dựng mặt phẳng (P) như sau:

- Chia AC thành hai đoạn theo tỷ số : $\dfrac{AN}{CN} = \dfrac{AD}{BC}$ (7)

$\begin{cases} \text{Trong maët phaúng (ABC) keû MN // BC} \\ \text{Trong maët phaúng (CAD) keû NP // AD} \end{cases}$

Dựng mặt phẳng chứa MN và NP cắt BD tại Q, đó chính là mặt phẳng (P) phải dựng và MNPQ là hình thoi.

Thật vậy : Vì : $\begin{cases} MN \,//\, BC \Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AN}{AC} \Leftrightarrow AC.MN = AN.BC & (8) \\ NP \,//\, AD \Rightarrow \dfrac{NP}{AD} = \dfrac{CN}{AC} \Leftrightarrow AC.NP = AD.CN & (9) \end{cases}$

Từ (7) và (9) $\Rightarrow$ AC.NP = AN.BC (10)

Từ (7) và (10) $\Rightarrow$ MN = NP.

Đồng thời : $\begin{cases} (P) \cap (DBC) = PQ \,//\, MN \\ (P) \cap (BAD) = MQ \,//\, NP \end{cases}$. Vậy MNPQ là hình thoi (đpcm).

Bài 138 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM – 1976)

Đáy của hình chóp S.ABCD là hình chữ nhật ABCD có AD = BC = 2a và AB = DC = 5a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên đáy ABCD. Biết rằng điểm H nằm trên đoạn thẳng IJ, trong đó I là trung điểm của AD và J là trung điểm của BC. Cho SH = 2a; IH = a.

1/ Chứng minh rằng tam giác ISJ vuông. Tính giá trị góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

2/ Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp.

3/ Cắt hình chóp bởi một mặt phẳng vuông góc với IJ tại điểm K. Hỏi thiết diện là hình gì ?

4/ Giả sử IK = x. Gọi y là diện tích của thiết diện MNPQ (M, N, P, Q là bốn điểm của mặt phẳng thiết diện ⊥ (ABCD) vuông góc cắt bốn cạnh của hình chóp). Tính y theo a và x (xét trường hợp K nằm giữa I và H hoặc K nằm giữa H và J).

Giải

1/ Xét ΔISJ ta có SH là đường cao :

$\begin{cases} HI.HJ = HI.(AB - HI) = a(5a - a) = 4a^2 \\ SH^2 = 4a^2 \end{cases}$

$\Rightarrow SH^2 = HI.HJ$

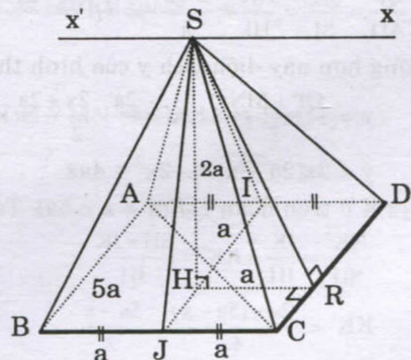
$\Rightarrow$ ΔISJ vuông góc tại S (đpcm).

Ta có :(SBC) $\cap$ (SAD) = x'Sx

$\Rightarrow \begin{cases} SJ \perp BC \Rightarrow SJ \perp x'Sx \\ SI \perp AD \Rightarrow SI \perp x'Sx \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{ISJ} = \alpha = \widehat{[(SBC); (SAD)]} = \widehat{xSx'}$

$\Rightarrow \widehat{ISJ} = \alpha = 90^0$ (đpcm).



2/ Diện tích xung quanh S_{xq} của hình chóp S.ABCD :

$S_{xq} = 2dt(\Delta SAB) + dt(\Delta SBC) + dt(\Delta SAD)$

$$dt(\Delta SAB) = dt(\Delta SCD) = \frac{1}{2} \times CD \times SR$$

Trong đó R là hình chiếu của S trên CD. Ta có :

$$SR^2 = HR^2 + SH^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

$$\Rightarrow \quad SR = a\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} dt(\Delta SAB) = dt(\Delta SCD) = \dfrac{1}{2} \times 5a \times a\sqrt{5} = \dfrac{5a^2\sqrt{5}}{2} \\ dt(\Delta SBC) = \dfrac{1}{2} BC \times SJ = \dfrac{1}{2} \times 2a \times 2a\sqrt{5} = 2a^2\sqrt{5} \\ dt(\Delta SAD) = \dfrac{1}{2} \times AD \times SI = \dfrac{1}{2} \times 2a \times a\sqrt{5} = a^2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad S_{xq} = 5a^2\sqrt{5} + 2a^2\sqrt{5} + a^2\sqrt{5} = 8a^2\sqrt{5} \text{ (ycbt)}$$

Thể tích V của hình chóp S.ABCD :

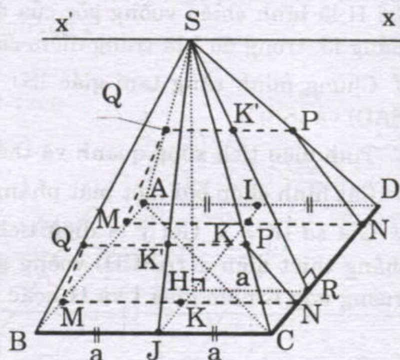
$$V = \frac{1}{3} dt(ABCD) \times SH = \frac{1}{3} \times 2a \times 5a \times 2a = \frac{20a^3}{3} \text{ (ycbt).}$$

3/ Để ý tùy vị trí của M, N trên AB và CD ta có hai trường hợp thiết diện được viết gộp như sau:

Thiết diện (MNPQ) ⊥ IJ ⇒ (MNPQ) // BC // AD.

Mặt phẳng (MNPQ) cắt AB, CD, SD, SA (hoặc SC, SB) theo thứ tự M, N, P, Q. PQ cắt SI (hoặc SJ) tại K', ta có :

MN // PQ // BC// AD



Vậy MNPQ là một hình thang hai đáy là MN và PQ. Để ý thấy hình chóp nhận mặt phẳng (SIJ) làm mặt phẳng đối xứng ⇒ MQ = NP.

Thiết diện MNPQ là một hình thang cân (ycbt).

4/ ❐ **TH_1** : K ở trên HI. Ta có MN = 2a

$$\frac{IK}{IH} = \frac{KK'}{SH} \Rightarrow KK' = \frac{SH \times IK}{IH} = \frac{2a \times x}{a} \Leftrightarrow KK' = 2x$$

$$\frac{QP}{AD} = \frac{SK'}{SI} = \frac{HK}{HI} = \frac{a - x}{a} \Rightarrow QP = \frac{2a \times (a - x)}{a} = 2(a - x)$$

Trường hợp này diện tích y của hình thang MNPQ là :

$$y = \frac{QP + MN}{2} \times KK' = \frac{2a - 2x + 2a}{2} \times 2x$$

$$\Rightarrow \quad y = 2x(2a - x) = -2x^2 + 4ax \qquad (0 < x < a) \text{ (ycbt).}$$

❐ **TH_2** : K ở trên đoạn HJ (a < x < 5a). Ta có :

$$\frac{KK'}{SH} = \frac{JK}{JH} = KK' = \frac{SH \times JK}{JH}$$

$$KK' = \frac{2a \times (5a - x)}{4a} = \frac{5a - x}{2}$$

$$\frac{QP}{BC} = \frac{SK'}{SJ} = \frac{HK}{HJ} = \frac{x - a}{4a} \qquad \Rightarrow \qquad QP = \frac{2a(x - a)}{4a}$$

$$QP = \frac{x - a}{2} \; (a < x < 5a)$$

Trường hợp này diện tích y của hình thang MNPQ là :

$$y = \frac{QP + MN}{2}.KK' = \frac{\frac{x-a}{2} + 2a}{2}.\frac{5a - x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{x + 3a}{4}\right)\left(\frac{5a - x}{2}\right) = \frac{1}{8}(-x^2 + 2ax + 15a^2).$$

Bài 139 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM – KINH TẾ – TÀI CHÍNH – 1977)

Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh AB = 2a; AD = a. Từ A kẻ đường vuông góc với mặt phẳng (P) và trên đó lấy đoạn AS = 3a.

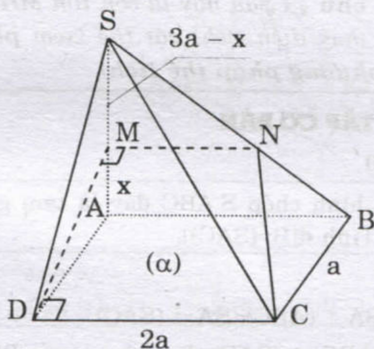
1/ Tính các đoạn SB, SC, SD theo a.

2/ Chứng minh rằng các tam giác SDC và SBC là các tam giác vuông.

3/ Mặt phẳng chứa DC cắt SA tại M và SB tại N. Hãy xác định tính chất của tứ giác CDMN. Đặt AM = x. Tính diện tích của tứ giác CDMN theo a và x.

Giải

1/ Ta có :



- $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 9a^2 + 4a^2 = 13a^2$

  $\Rightarrow SB = a\sqrt{13}$ (ycbt)

- $SC^2 = AC^2 + SA^2 = AB^2 + BC^2 + SA^2$

  $\Rightarrow SC^2 = 4a^2 + a^2 + 9a^2 = 14a^2$

  $\Rightarrow SC = a\sqrt{14}$ (ycbt)

- $SD^2 = AD^2 + SA^2 = a^2 + 9a^2 = 10a^2$

  $\Rightarrow SD = a\sqrt{10}$ (ycbt).

2/ Theo định lý 3 đường vuông góc, ta có :

$$\left.\begin{matrix} SA \perp (P) \\ AD \perp DC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SD \perp DC \Rightarrow \Delta SDC \text{ vuông tại D (đpcm)}$$

$$\left.\begin{matrix} SA \perp (P) \\ AB \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SB \perp BC \Rightarrow \Delta SBC \text{ vuông tại B (đpcm).}$$

3/ Tính chất của tứ giác DCNM.

Gọi (α) là mặt phẳng qua DC; (α) cắt SA tại M và cắt SB tại N.

$$\begin{cases} DC \,//\, AB \quad \Rightarrow MN \,//\, DC \,//\, AB \\ DC \perp (SAD) \Rightarrow MN \perp (SAD) \Rightarrow MN \perp MD \end{cases}$$

Vậy DCNM là một hình thang vuông (hai đáy DC // MN chiều cao là DM) (ycbt).

Diện tích của tứ giác DCNM là :

$$dt(DCNM) = \frac{DC + MN}{2} \times DM$$

Ta có : $\begin{cases} DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + x^2} \\ \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA} \Rightarrow MN = \dfrac{2a(3a - x)}{3a} = \dfrac{2(3a - x)}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad dt(DCNM) = \frac{2a + \frac{2}{3}(3a - x)}{2} \times \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\Rightarrow \quad dt(DCNM) = \frac{6a - x}{3}\sqrt{a^2 + x^2} \text{ (ycbt).}$$

Chuyên đề 8 : CÁC DẠNG KHOẢNG CÁCH VÀ ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG

Loại 1 : TÍNH VÀ XÁC ĐỊNH CÁC DẠNG KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

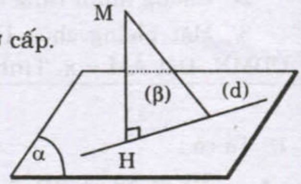
Dạng 1 : TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp cần thực hiện 2 bước cơ bản như sau :

❑ **B_1 :** Xác định đoạn vuông góc MH với (α), bằng cách dựng một mặt phẳng (β) qua M và (β) ⊥ (α) theo giao tuyến (d), hạ MH ⊥ (d) ⇒ MH = d[M; (α)]

❑ **B_2 :** d[M; (α)] = MH được tính bằng phép các định lý hình học sơ cấp.



✪ **Ghi chú $_1$:** *Khoảng cách d[M; (α)] còn gọi là độ dài đoạn vuông góc trong định lý 3 đường vuông góc.*

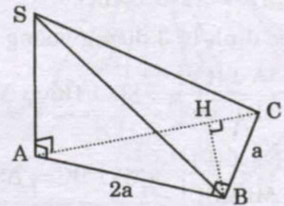
✪ **Ghi chú $_2$:** *Sau này ta còn tìm MH bằng công thức hay thể tích (hay diện tích) vật thể (xem **phương pháp diện tích và phương pháp thể tích**).*

II. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 140

Cho hình chóp S.ABC đáy là tam giác vuông tại B và AB = 2BC = 2a. Biết thêm SA ⊥ (ABC). Tính d[B; (SAC)].

Giải



Do SA ⊥ (ABC); SA ⊂ (SAC)

⇒ (ABC) ⊥ (SAC) theo giao tuyến BC.

Hạ BH ⊥ AC tại H

⇒ BH = d[B; (SAC)].

Hệ thức lượng trong ΔABC ($\hat{B} = 90^0$) :

$$\Rightarrow \frac{1}{HB^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow HB^2 = \frac{4a^2}{5} \Leftrightarrow HB = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Vậy : d[B; (SAC) = $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ (ycbt).

Bài 141

Cho hình chóp S.ABC có SA = h và SA ⊥ (ABC). Lấy điểm M ∈ SB sao cho MS : MB = 1 : 2 và gọi I là trung điểm CM. Tính d[I; (ABC)].

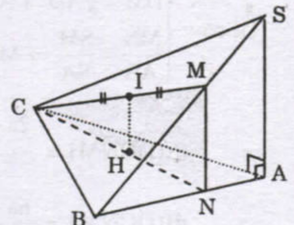
Giải

Dựng MN // SA; N ∈ AB ⇒ MN ⊥ (ABC); mà MN ⊂ (CMN)

⇒ (CMI) ⊥ (ABCD)

Để ý thấy I ∈ (CMN), do đó hạ IH ⊥ (ABCD); H ∈ (ABC) thì IH là đường trung bình của ΔCMN : IH = $\frac{1}{2}$MN (1)

⇒ d[I; (ABC)] = IH



Theo định lý Thalès $\Rightarrow \dfrac{MN}{SA} = \dfrac{BM}{BS} = \dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow MN = \frac{2}{3}SA = \frac{2}{3}h \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) $\Rightarrow IH = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}h = \dfrac{1}{3}h$

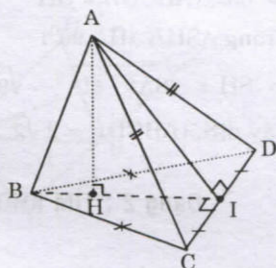
Vậy d[I; (ABC)] = $\dfrac{h}{3}$ (ycbt).

Bài 142

Cho tứ diện ABCD có AB = CD; BC = BD còn AC = AD. Dựng AH ⊥ (BCD).

a/ Chứng minh H nằm trên trung tuyến BI của ΔBCD. b/ Xác định d[A; (BCD)].

Giải



a/ Theo tính chất đường trung tuyến cũng là đường cao hạ từ đỉnh của tam giác cân, ta có :

$$\begin{cases} CD \perp AI \\ CD \perp BI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABI); \text{ mà } CD \subset (BCD)$$

$\Rightarrow$ (ABI) ⊥ (BCD)

Hạ đường cao AH của tứ diện ABCD

$\Rightarrow$ AH ⊥ CD $\quad\Rightarrow$ AH ⊂ (ABI) hay H ∈ BI (ycbt)

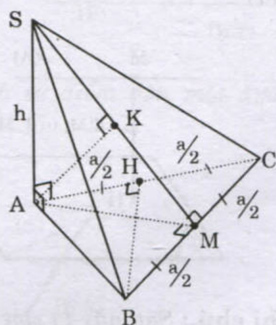
b/ Theo câu trên $\quad\Rightarrow$ AH = d[A; (BCD)] (ycbt).

Bài 143

Cho hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC) và ΔABC đều cạnh a.

a/ Tính d[B; (SAC)]. b/ Giả sử SA = h. Tính d[A; (SBC)].

Giải



a/ Nhận xét thấy (ABC) ⊥ (SAC) theo giao tuyến AC.

Hạ BH ⊥ AC tại H.

$\Rightarrow$ d[B; (SAC)] = BH = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao Δ đều)

b/ Gọi M là trung điểm BC, ta có :

$$\left.\begin{matrix} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAM)$$

Mà BC ⊂ (SBC) $\Rightarrow$ (SAM) ⊥ (SBC) theo giao tuyến SM.

Dựng AK ⊥ SM $\Rightarrow$ AK ⊥ (SBC)

$\Rightarrow$ d[A; (SBC)] = AK

Trong đó : $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{4}{3a^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{3a^2 + 4h^2}{3a^2h^2} \Leftrightarrow AK^2 = \frac{3a^2h^2}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}} \Leftrightarrow AK = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$$

Vậy d[A; (SBC)] = $\dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$ (ycbt).

Bài 144

Cho hình chóp S.ABCD có SA = SB = SD = 3a và $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^0$; $\widehat{BAD} = 60^0$.

Tính d[S; (ABCD)] khi biết BD = 2a.

Giải

Để ý : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^0$ $\Rightarrow$ B, D ở trên đường tròn đường kính AC.

Gọi H là trung điểm AC.

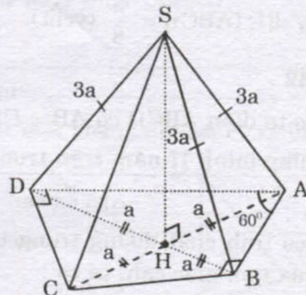
$\Rightarrow$ HA = HB = HD

Giả thiết lại có SA = SB = SD.

Do đó SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABD.

$\Rightarrow$ SH $\perp$ (ABD) $\equiv$ (ABCD)

$\Rightarrow$ d[S; (ABCD)] = SH



Trong ΔSHA ($\hat{H} = 90^0$)

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}.a$

Vậy d[S; (ABCD)] = $2\sqrt{2}$ .a (ycbt).

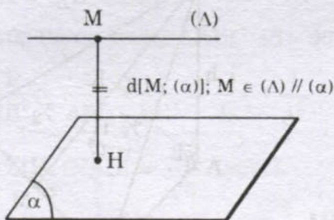
Dạng 2 : TÌM KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐƯỜNG THẲNG (HAY MẶT PHẲNG) SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG

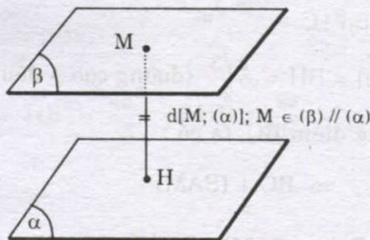
I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp tìm khoảng cách từ đường thẳng (Δ) // (α) hay mặt phẳng (β) // (α) đến (α) ta làm hai bước :

❒ **B_1 :** Lấy một điểm M tùy ý (nhưng phải thỏa tính ưu việt của bài toán để dễ dàng trong quá trình tính toán sau này) trên (Δ) // (α) hay trên (β) // (α).

❒ **B_2 :** Hạ MH $\perp$ (α) $\Rightarrow$ MH là khoảng cách cần tìm trong ycbt (với cách dựng MN đã biết).





✪ **Ghi chú :** *Sau này ta còn tính MH bằng công thức tính **thể tích vật thể**.*

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 145

Cho ΔABC ($\hat{A} = 90^0$) và 2AC = AB = 2a.Gọi Ax và By là hai tia cùng vuông góc với (ABC) về một phía. Tính d[By; (CAx)] và d[Ax; (CBy)].

Giải

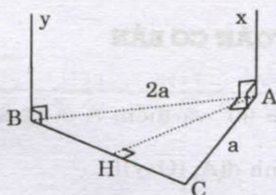
Ta có : By // (α) $\equiv$ (CAx).

Nên chọn B $\in$ By và thấy (Ax; By) $\perp$ (CAx)

$\Rightarrow$ d[By; (CAx)] = BA = 2a (ycbt)

Tương tự hạ AH $\perp$ BC tại H

$\Rightarrow$ d[Ax; (CBy)] = AH = $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ (ycbt).



Bài 146

Cho Ax, By là hai tia vuông góc với mặt phẳng hình thoi ABCD ở cùng một phía. Tính d[(DAx); (CBy)] biết hình thoi cạnh a có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Giải

Để ý thấy hai mặt phẳng (DAx) // (CBy) và chúng cùng vuông góc với mp(ABCD) theo các giao tuyến AD và BC theo thứ tự đó.

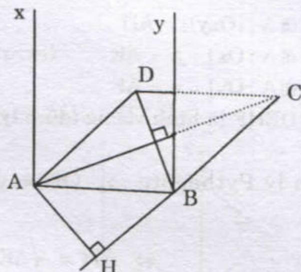
Chọn A $\in$ AD và hạ AH $\perp$ BC; tại H

$\Rightarrow$ AH = d[(DAx); (CBy)]

Lại có với S là diện tích hình thoi ABCD cạnh a.

$$S = \frac{1}{2}.AH.BC \Leftrightarrow \frac{a^2\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2}.AH.a \Leftrightarrow AH = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Vậy : d[(DAx); (CBy)] = $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$a (ycbt).

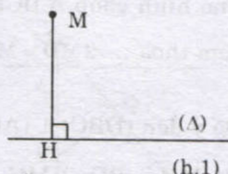


Dạng 3 : TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP

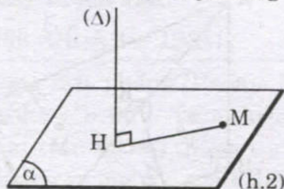
★ **PP_1 :** Cơ sở của phương pháp thứ nhất để tìm khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng (Δ) trong không gian ta cần thực hiện hai bước :

- **B_1 :** Từ điểm M cần tìm khoảng cách trong không gian hạ đường vuông góc MH với đường thẳng (Δ).
- **B_2 :** Độ dài MH = d[M; (Δ)] là khoảng cách cần tìm. (Xem h.1)

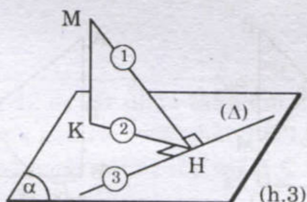


(h.1)

Ghi chú : *Thực tế người ta còn thực hiện tính khoảng cách từ điểm đến một đường thẳng như sau, theo 2 phương pháp nữa :*



(h.2)



(h.3)

★ **PP_2 :** Tìm mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với (Δ) tại H $\Rightarrow$ MH = d[M; (Δ)] (xem h.2)

★ **PP_3 :** Tìm cách ghép (Δ) là đường thứ ③ nằm trong (α) và d[M; (Δ)] = MH là độ dài đường xiên ① (xem h.3)

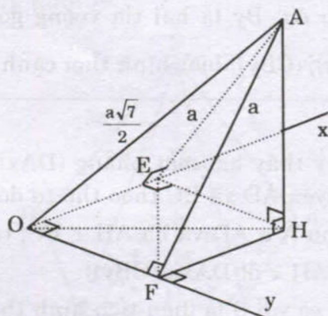
★ **PP_4 :** Thỉnh thoảng người ta còn tìm d[M; (Δ)] bằng công thức tính diện tích hình phẳng (phương pháp diện tích).

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 147

Cho $\widehat{xOy} = 90^0$ và điểm A ở ngoài mặt phẳng Oxy. Cho biết d[A; Ox] = d[A; Oy] = a và $AO = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Tính d[A; (Oxy)].

Giải



Hạ $\begin{cases} AH \perp (Oxy) \\ HE \perp Ox \\ HF \perp Oy \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} AE: \text{là đường xiên} \\ HE: \text{là hình chiếu} \end{cases} \\ \begin{cases} AF: \text{là đường xiên} \\ HF: \text{là hình chiếu} \end{cases} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} d[A;(Oxy)] = AH \\ d[A;Ox] = a = AE \\ d[A;Oy] = a = AF \\ \text{OEHF là hình vuông (định lý 3 đường vuông góc)} \end{cases}$

Định lý Pythagore $\Rightarrow$ $OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{4} - a^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AH = \sqrt{AE^2 - HE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$ (Do OE = HE)

Vậy d[A; (Oxy)] = $\frac{a}{2}$ (ycbt).

Bài 148

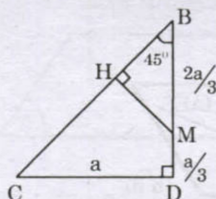
Cho hình chóp A.BCD có ΔBCD vuông cân (DB = DC = a), AB $\perp$ (BCD) và AB = a. Gọi M là điểm thỏa : $-2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB}$. Tính d[M; (AC)].

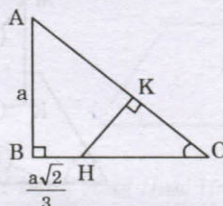
Giải

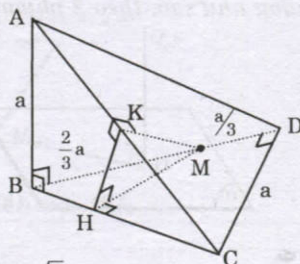
Để ý đến (DBC) $\perp$ (ABC) theo giao tuyến BC.

Hạ MH $\perp$ BC $\Rightarrow$ MH $\perp$ (ABC) và hạ HK $\perp$ AC $\Rightarrow$ $\begin{cases} MK: \text{là đường xiên} \\ HK: \text{là hình chiếu} \end{cases}$

$\Rightarrow$ MK $\perp$ AC (định lý 3 đường vuông góc) $\Rightarrow$ d[M; AC] = MK (1)







Ta có từ tam giác vuông cân BDC $\Rightarrow$ $\begin{cases} MH = BM.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3} \\ BH = MH = \frac{a\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

$\Delta CHK \backsim \Delta CAB \Rightarrow \frac{HK}{AB} = \frac{CH}{CA} \Leftrightarrow HK = AB.\frac{CH}{CA} = a.\frac{a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = a.\frac{2a\sqrt{2}}{3.a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}a$

Định lý Pythagore trong tam giác MHK ($\hat{H} = 90^0$)

$$\Rightarrow KM = \sqrt{MH^2 + HK^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{9} + \frac{8}{27}a^2} = \sqrt{\frac{14a^2}{27}} = \frac{a\sqrt{14}}{3\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{42}}{9}$$

Vậy d[M; AC] = $\frac{a\sqrt{42}}{9}$ (ycbt).

Bài 149

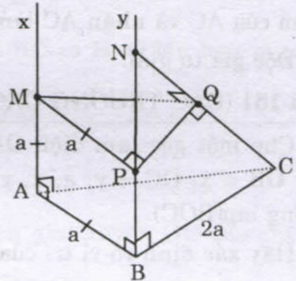
Cho ΔABC ($\hat{B} = 90^0$, AB = a, BC = 2a). Ax và By cùng vuông góc với (ABC) và ở cùng về một phía. Lấy M và N trên Ax và By sao cho AM = a; BN = $2a\sqrt{2}$.

a/ Chứng minh AB ⊥ (C; By)   b/ Tính d[M; CN].

Giải

a/ Ta có : $\begin{cases} AB \perp BC \text{ (}\Delta ABC \text{ vuông tại B)} \\ AB \perp BN \text{ (cách dựng)} \end{cases} \Rightarrow AB \perp (C; By)$ (đpcm).

b/ Hạ MP ⊥ By = (Ax; By) ∩ (C; By) mà (Ax; By) ⊥ (C; By) ⇒ MP ⊥ (C; By)



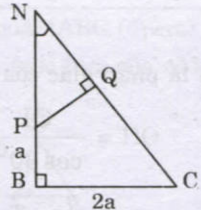
Hạ PQ ⊥ NC ⇒ $\begin{cases} \text{MQ : là đường xiên} \\ \text{PQ : là hình chiếu} \end{cases}$

⇒ MQ ⊥ NC (định lý 3 đường vuông góc)

⇒ d[M; (CN)] = MQ

$$\Delta NPQ \backsim \Delta NCB \Rightarrow \frac{PQ}{CB} = \frac{NP}{NC} \Leftrightarrow PQ = CB.\frac{NP}{NC}$$

$$\Leftrightarrow PQ = 2a.\frac{a(2\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{(2a\sqrt{2})^2 + (2a)^2}} = \frac{a(2\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{3}}$$



Định lý Pythagore trong ΔMPQ cho :

$$MQ = \sqrt{MP^2 + PQ^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2(2\sqrt{2} - 1)^2}{3}} = \frac{2(3 - \sqrt{2})}{\sqrt{3}}.a$$

Vậy : d[[M; CN] = $\frac{2(\sqrt{3} - 1)a}{\sqrt{3}}$ (ycbt).

III. GIẢI TOÁN THI

Bài 150 (ĐỀ A 1 – 1981)

Trong mặt phẳng (P), cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại điểm A và tạo với nhau một góc α ($0 < \alpha \leqslant 90^0$). Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (P) tại A, lấy điểm B với AB = h; trên đường thẳng d'_2 đi qua B và song song với d_2 lấy điểm C với BC = a. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên d_1.

a/ Tính độ dài AD và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD). Từ đó suy ra thể tích của tứ diện ABCD.

b/ Xác định tâm mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D.

c/ Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng d_2.

Giải

a/ Gọi C' là hình chiếu vuông góc của C lên (P), hay lên d_2.

Theo định lý đảo về ba đường vuông góc

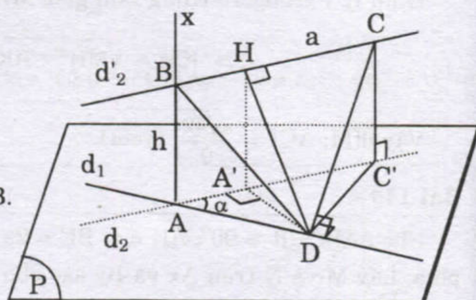
$\Rightarrow$ C'D $\perp$ d_1

$\Rightarrow$ AD = AC'.cosα = acosα.

Vì CC' // AB, nên CC' song song với mặt phẳng (ABD).

$\Rightarrow$ d[C; (ABD)] = d[C'; (ABD)]

Ta có : C'D $\perp$ (ABD) bởi vì C'D $\perp$ AD và C'D $\perp$ AB.



$\Rightarrow$ d[C'; (ABD)] = C'D = C'A sinα = a.sinα

mà $dt(\Delta ABD) = \dfrac{1}{2}AB.AD = \dfrac{1}{2}ha.\cos\alpha$

Nên thể tích V của tứ diện ABCD là :

$$V = \frac{1}{3}dt(\Delta ABD).d[C, (ABD)] = \frac{1}{3}a\sin\alpha.\frac{1}{2}ha.\cos\alpha = \frac{1}{12}a^2h.\sin 2\alpha$$

b/ Các điểm B, D nhìn AC dưới góc vuông nên mặt cầu đi qua A, B, C, D có tâm là trung điểm của AC và nhận AC làm đường kính.

c/ Độc giả tự giải.

Bài 151 (CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG – 1984)

Cho một góc tam diện OABC mà cả ba mặt AOB, BOC, COA đều bằng 60^0. Cho OA = a, đặt OB = x; OC = y; a, x, y là những số thực dương. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mp(BOC).

1/ Hãy xác định rõ vị trí của điểm H và tính độ dài của OH và AH.

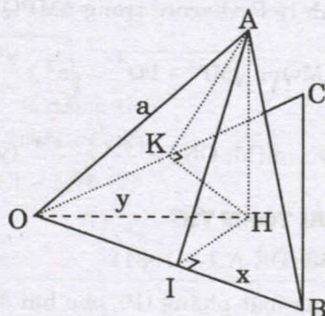
2/ Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC} = 90^0$ thì có hệ thức : $xy - a(x + y) + 2a^2 = 0$ (1)

Hướng dẫn

1/ OH là phân giác của $\widehat{BOC}$,

$$OH = \frac{OI}{\cos 30^0} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



2/ Kết hợp : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

và $OB^2 + OC^2 - 2OB.OC\cos 60^0 =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos 60^0 + OA^2 + OC^2 - 2OA.OC\cos 60^0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = a^2 + x^2 - ax + a^2 + y^2 - ay$

$\Leftrightarrow xy - a(x + y) + 2a^2 = 0$ (ycbt).

Bài 152 (ĐẠI HỌC PHÁP LÝ TP.HCM – 1991)

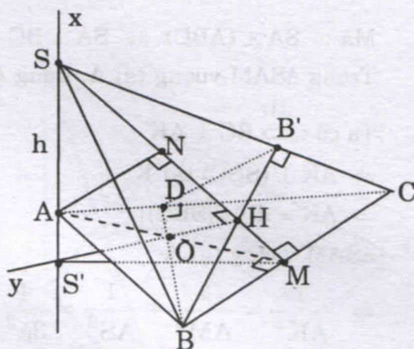
Cho ΔABC đều cạnh a. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A, lấy điểm S với AS = h.

1/ Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

2/ Hy là đường thẳng đi qua trực tâm H của tam giác SBC, và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Chứng tỏ rằng khi S di động trên Ax, đường thẳng Hy luôn luôn đi qua một điểm cố định.

3/ Hy cắt Ax tại S'. Xác định h theo a để đoạn SS' ngắn nhất.

Giải



1/ Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC) :

Dựng SM ⊥ BC. Ta có :

$\left.\begin{matrix} SA\perp(ABC) \\ SM\perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAM)$

$\Rightarrow mp(SBC) \perp mp(SAM)$

theo giao tuyến SM.

Từ A, dựng $AN \perp SM \Rightarrow AN = d[A; (SBC)]$

Trong $\Delta SAM \Rightarrow \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{3a^2 + 4h^2}{3a^2h^2}$

$\Rightarrow AN^2 = \dfrac{3a^2h^2}{3a^2 + 4h^2} \Rightarrow AN = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$ (ycbt).

2/ Dựng BB' ⊥ SC và BD ⊥ AC. Gọi $H = SM \cap BB'$ và $O = AM \cap BD \Rightarrow$ H, O lần lượt là trực tâm của các tam giác SBC và ABC.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC.

Mà : $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Do $BB' \perp SC \Rightarrow SC \perp (BDB') \Rightarrow (SBC) \perp (BDB')$.

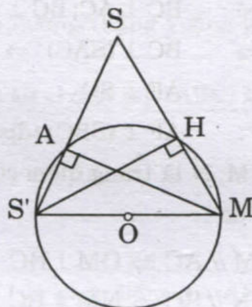
Để ý hai mp(SAM) và mp(BDB') cùng thẳng góc với (SBC) nên giao tuyến OH của chúng phải thẳng góc với (SBC).

Lại thấy Hy và HO cùng thẳng góc với mặt phẳng (SBC).

⇒ Hy và HO trùng nhau. Nói khác đi, Hy qua O là trực tâm (cố định) của ΔABC (đpcm).

3/ Trong mp(M, Ax), OH ⊥ SM nên OH phải cắt Ax tại S' và O cũng là trực tâm của ΔMSS'.

Theo tính chất trực tâm, ta có :



$AS.AS' = AO.AM = \dfrac{2}{3}AM^2 = \dfrac{a^2}{2}$ (không đổi)

Xét : $SS' = AS + AS' \geqslant 2\sqrt{AS.AS'} = 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$ (*)

Dấu đẳng thức trong (*) xảy ra ⇔ AS = AS'.

$\Rightarrow \quad \min SS' = a\sqrt{2}$ tương ứng AS = AS'.

$\Leftrightarrow \quad AS^2 = h^2 = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (ycbt).

Bài 153 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI A VÀ ĐH LUẬT – 1997)

Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác đều cạnh a và SA ⊥ (ABC). Đặt SA = h.

1/ Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a và h.

2/ Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và H là trực tâm của tam giác SBC. Chứng minh OH ⊥ (SBC).

Giải

1/ Gọi M là trung điểm của BC ⇒ AM ⊥ BC

Mà : SA ⊥ (ABC) ⇒ SA ⊥ BC ⇒ BC ⊥ (SAM) (1)

Trong ΔSAM vuông tại A, dựng AK ⊥ SM.

Ta có : $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ BC ⊥ AK

⇒ AK ⊥ (SBC) tại K.

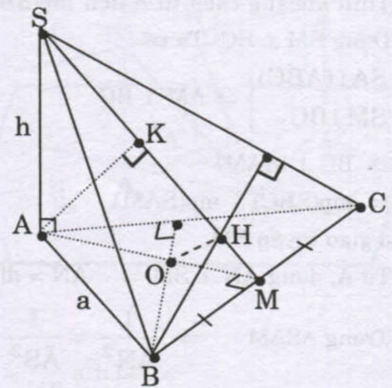
⇒ AK = d[A; (SBC)]

ΔSAM vuông tại A

$$\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{h^2}$$

$$\Leftrightarrow AK^2 = \frac{3a^2h^2}{4h^2 + 3a^2}$$

$$\Leftrightarrow AK = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}} \text{ (ycbt).}$$



2/ Ta có : O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC đều ⇒ BO ⊥ AC ⇒ SC ⊥ BO

Để ý đến H là trực tâm ΔSBC ⇒ BH ⊥ SC ⇒ SC ⊥ (BHO) ⇒ SC ⊥ HO

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ OH ⊥ BC. Vậy : OH ⊥ (SBC) (đpcm).

Bài 154 (ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI CƠ SỞ I – 1999)

Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đáy ABC là tam giác vuông tại C. Cho AC = a, góc giữa mặt bên (SBC) và đáy (ABC) là φ.

1/ Trong mặt bên (SAC), từ A hạ AF vuông góc với SC. Chứng minh AF ⊥ (SBC).

2/ Gọi O là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) theo a và φ.

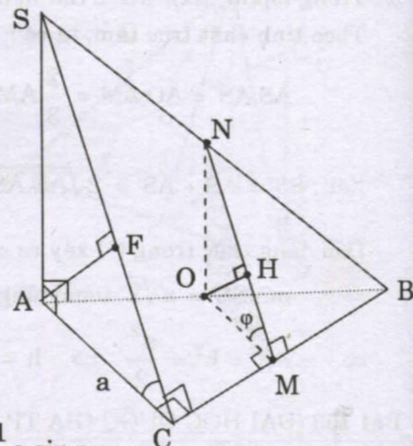
Giải

1/ Ta có : BC ⊥ AC; BC ⊥ SA

⇒ BC ⊥ (SAC) ⇒ BC ⊥ AF

Mà : AF ⊥ SC

Vậy : AF ⊥ (SBC) (đpcm).



2/ Gọi M; N là trung điểm của BC; SB.

Khi đó :

$$\begin{cases} OM \,//\, AC \Rightarrow OM \perp BC \\ MN \,//\, SC \Rightarrow NM \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{NMO} = \varphi \\ BC \perp (OMN) \end{cases}$$

Hạ OH ⊥ MN ⇒ OH ⊥ (SBC) tại H.

Ta có : $\sin\varphi = \dfrac{OH}{OM} \Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}AC.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}a.\sin\varphi$.

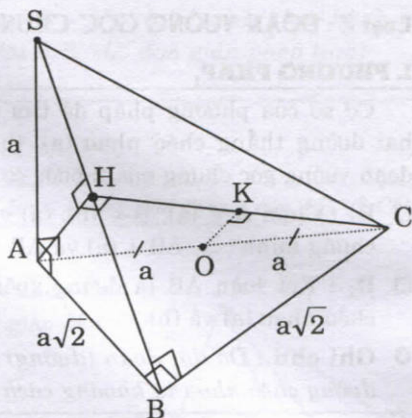
Bài 155 (ĐẠI HỌC HUẾ – KHỐI A – CPB – 2000)

Cho SABC là một tứ diện có ABC là một tam giác vuông cân đỉnh B và AC = 2a; cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SA = a.

1/ Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

2/ Gọi O là trung điểm AC. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

Giải



1/ Hạ $AH \perp SB$ tại H (1)

Để ý thấy :

$$\begin{cases} BC \perp AB \text{ (}\Delta ABC \text{ vuông cân tại B)} \\ BC \perp SB \text{ (định lý ba đường vuông góc)} \end{cases}$$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

Mà : $AH \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH = d[A; (SBC)]$

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy : $d[A; (SBC)] = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (ycbt).

2/ Từ $AH \perp (SBC) \Rightarrow (AHC) \perp (SBC)$ theo giao tuyến HC

Gọi K là trung điểm CH $\Rightarrow OK = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ mà $OK \perp (SBC)$

Vậy : $d[O; (SBC)] = OK = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ (ycbt).

ĐỀ TƯƠNG TỰ

Bài 156 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – KHỐI G – 1997)

Trong mặt phẳng (P) cho điểm O và một đường thẳng d cách O một khoảng OH = h. Lấy trên d hai điểm khác nhau B, C sao cho $\widehat{BOH} = \widehat{COH} = 30^0$. Trên đường thẳng vuông góc với P tại O lấy điểm A sao cho OA = OB.

a/ Tính thể tích tứ diện OABC. b/ Tính khoảng cách từ O đến mp (ABC) theo h.

Hướng dẫn

a/ $V_{OABC} = \frac{2h^3}{9}$ b/ $OI = \frac{2h}{\sqrt{7}}$.

Bài 157 (CAO ĐẲNG SƯ PHẠM HÀ NỘI – KHỐI d – 1997)

Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B đối xứng nhau qua (P). I là giao điểm của AB với (P), O là một điểm ngoài (P), có hình chiếu vuông góc xuống (P) là H. M là một điểm tùy ý trên đường tròn đường kính HI trong (P). Chứng minh :

a/ MI là khoảng cách vuông góc chung của BA và MO.

b/ Khoảng cách từ O và H đến mặt phẳng (BAM) bằng nhau. Tính thể tích tứ diện BOMA biết BA = 2a; HM = b; MI = c.

Hướng dẫn

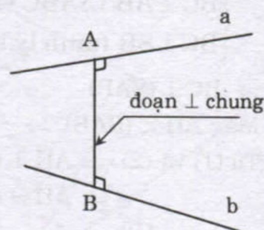
a/ $\begin{cases} HM \perp MI & \Rightarrow MI \perp MO \\ \text{I là trung điểm AB} \Rightarrow AB \perp MI \end{cases}$ $\Rightarrow$ MI là đường vuông góc chung AB và MO.

b/ $V = \frac{1}{3}HM.\frac{1}{2}AB.MI = \frac{1}{3}abc$.

Loại 2 : ĐOẠN VUÔNG GÓC CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

I. PHƯƠNG PHÁP$_1$

Cơ sở của phương pháp để tìm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau (a), (b) là : sử dụng định nghĩa đoạn vuông góc chung qua 2 bước cơ bản như sau :



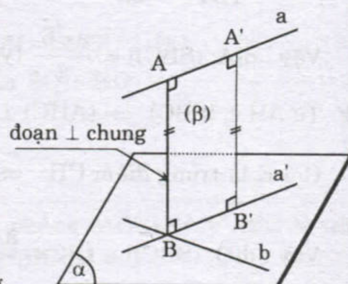
❒ **B_1 :** Chọn $A \in (a)$, $B \in (b)$; (a) và (b) chéo nhau. Sau đó ta chứng minh :⇔ $AB \perp (a)$ và $AB \perp (b)$.

❒ **B_2 :** Kết luận AB là đường vuông góc chung của 2 đường chéo nhau (a) và (b).

✪ **Ghi chú :** *Độ dài đoạn (đường) vuông góc chung của hai đường chéo nhau là khoảng cách ngắn nhất giữa hai đường thẳng đó.*

II. PHƯƠNG PHÁP$_2$

Cơ sở của phương pháp là sử dụng cách dựng thứ I. Độ dài đường vuông góc chung là khoảng cách từ một điểm trên đường thẳng thứ I đến một mặt phẳng chứa đường thẳng thứ II và song song với đường thẳng thứ I, qua 3 bước cơ bản sau:



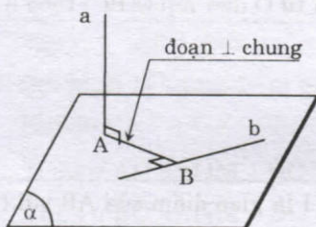
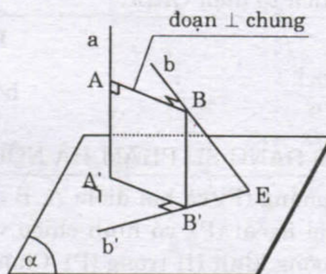
❒ **B_1:** Trong mặt (α) đã chứa b dựng a' // a và $B = a' \cap b$.

❒ **B_2:** Do (a; a') xác định mp(β), nên dựng trong mp(β) đoạn $BA \perp (\alpha)$ và $A \in (a)$.

❒ **B_3:** Kết luận đoạn vuông góc chung là AB = d[(a); (b)] (ycbt).

✪ **Ghi chú :** *AB = A'B' ... là các độ dài đoạn vuông góc chung.*

III. PHƯƠNG PHÁP$_3$

Cơ sở của phương pháp là sử dụng cách dựng thứ II	
(a), (b) chéo nhau và (a) ⊥ (b) (trường hợp đặc biệt)	(a), (b) chéo nhau (trường hợp tổng quát chỉ sử dụng khi chưa tìm được phương án xử lý các trường hợp khác đã biết từ trước)
 Chúng ta cần thực hiện các bước : • Dựng (α) ⊥ (a) tại A và (α) ⊃ (b) • Dựng AB ⊥ (b) (B ∈ (b)) ⇒ AB là đoạn vuông góc chung của (a) và (b). ✪ **Ghi chú$_1$:** *Khi dạng này không khả thi thì ta mới sử dụng các dạng khác.*	 Chúng ta cần thực hiện các bước : • Dựng (α) ⊥ (a) tại A' và chiếu (b) xuống (α) là (b'). • Dựng A'B' ⊥ (b') (B' ∈ (b')) • Dựng B'B // (a) (B ∈ (b)) • Dựng BA // B'A' (A ∈ (a)) ⇒ AB là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau (a), (b).

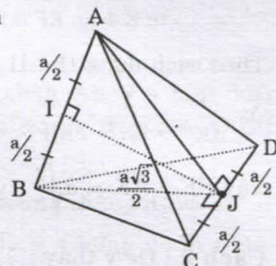
✪ **Ghi chú₂ :** *Ở đây hình chiếu trong trường hợp định lý 3 đường vuông góc là đoạn vuông góc chung.*	✪ **Ghi chú :** *Do AB = A'B' (nên trong thực hành ta hãy tính độ dài A'B' cho đơn giản phép tính)*

IV. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 158

Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Giải



Gọi I, J là trung điểm AB và CD theo thứ tự đó, và theo tính chất của tứ diện đều thì các mặt bên của nó sẽ là các tam giác đều.

$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp BJ \\ CD \perp AJ \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABJ) \supset IJ$

$\Rightarrow CD \perp IJ$ hơn nữa $AB \perp IJ$ (ΔAJB cân tại J)

$\Rightarrow IJ \perp AB$ và CD

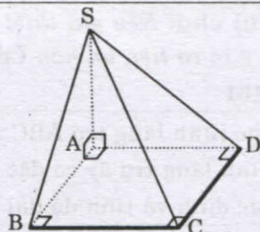
Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD (đpcm)

Ta có : $IJ = \sqrt{BJ^2 - BI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (ycbt).

Bài 159

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD) là hình chữ nhật. Dựng đoạn vuông góc chung của SA và CD.

Giải



Để ý : $\begin{cases} CD \subset (ABCD) \\ SA \perp (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ AD là đoạn vuông góc chung của SA và CD (ycbt).

Bài 160

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B. AB = a; BC = a; AD = 3a; $CD = a\sqrt{7}$ và $SA = a\sqrt{2}$. Khi SA ⊥ (ABCD), hãy dựng và tính độ dài đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng :

a/ SA và CD. b/ AB và SD. c/ AD và SC.

Giải

a/ Để ý thấy trong ΔACD :

$\begin{cases} AC^2 + CD^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{7}\right)^2 = 9a^2 \\ AD^2 = (3a)^2 = 9a^2 \end{cases} \Leftrightarrow AD^2 = AC^2 + CD^2 \Leftrightarrow \Delta ACD\ (\hat{C} = 90^0)$

Lúc đó $AC = a\sqrt{2}$ là đường vuông góc chung của SA và CD (ycbt).

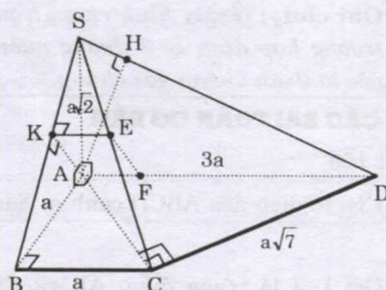
b/ Ta có : $AB \perp (SAD) \supset SD \Rightarrow AB \perp SD$

Dựng AH ⊥ SD tại D (thì AH là hình chiếu)

$\Rightarrow$ AH là đoạn vuông góc chung của AB và SD.

Ta có : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{9a^2} = \dfrac{11}{18a^2}$

$\Leftrightarrow AH^2 = \dfrac{18a^2}{11} \Rightarrow AH = \dfrac{3a\sqrt{22}}{11}$ (ycbt).



c/ Để ý thấy $AD \perp (SBC) \supset SB$ mà SB là hình chiếu của SC xuống (SAB) (vì $CB \perp (SAB)$)

Dựng : $\begin{cases} \text{từ A đoạn } AK \perp SB ; K \in SB \\ \text{từ K đoạn } KE \parallel BC ; E \in SC \\ \text{từ E đoạn } EF \parallel KA ; F \in AD \end{cases}$

Theo cách dựng thứ II ⇒ EF là đoạn vuông góc chung của AD và SC, về độ dài EF = AK, ta có: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Leftrightarrow AK^2 = \dfrac{2a^2}{3}$

Vậy $EF = AK = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (ycbt).

✪ **Cách 2 :** Để ý thấy : $\begin{cases} (SBC) \supset SC \\ (SBC) \parallel AD \end{cases}$ và $(SCB) \perp (SAB)$ theo giao tuyến SB.

Dựng $AK \perp SB \Rightarrow$ AK là độ dài đoạn vuông góc chung của AD và SC.

Dựng : $\begin{cases} KE \parallel BC \\ EF \parallel AK : E \in SC ; F \in AD \end{cases}$

⇒ EF là đoạn vuông góc chung của AD và SC và $EF = AK = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

✪ **Ghi chú:** *Nếu giả thiết chỉ yêu cầu tính độ dài đoạn vuông góc chung của AD và SC thì Cách 2 tỏ ra tiện lợi hơn Cách 1.*

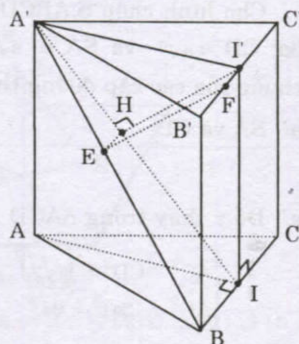
Bài 161

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C các mặt bên đều là các hình vuông cạnh a.

1/ Hình lăng trụ ấy có đặc điểm gì ?

2/ Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của A'B và B'C'.

Giải



1/ Do tất cả các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình vuông bằng nhau nên hai đáy của hình lăng trụ là hai tam giác đều.

Mặt khác : $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AA' \perp AC \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (ABC)$

Vậy lăng trụ ở giả thiết là một lăng trụ tam giác đều, cạnh đáy bằng a và chiều cao cũng bằng a.

2/ Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và B'C'. Để ý thấy $B'C' \perp (A'I'I)$ chứa A'I là hình chiếu của A'B xuống mặt phẳng đó.

- Dựng $I'H \perp IA'$ ($H \in IA'$)
- Dựng $HE \parallel BC$ ($E \in A'B$)
- Dựng $EF \parallel IH'$ ($F \in B'C'$)

EF chính là đoạn vuông góc chung của A'B và B'C'

- Dễ thấy là : $BC \perp (AA'I'I) \Rightarrow B'C' \perp (AA'I'I) \Rightarrow B'C' \perp I'H \Rightarrow B'C' \perp EF$ (tại F)
- Góc A'EF có $EF \parallel (AA'I'I)$, có hình chiếu xuống mặt phẳng (AA'I'I) là góc vuông A'HI' nên chính góc A'EF là góc vuông.

$\widehat{AEF} = 90^0 \Rightarrow A'B \perp EF$ (tại E)

Qua cách dựng ta thấy EHI'F là hình chữ nhật $\Rightarrow EF = I'H$

Tam giác II'A' vuông ở I' $\Rightarrow \dfrac{1}{I'H^2} = \dfrac{1}{I'I^2} + \dfrac{1}{I'A'^2}$

Trong đó : $II' = a$ và $I'A' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{I'H^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{7}{3a^2}$

$$\Rightarrow I'H^2 = \frac{3a^2}{7} \Rightarrow EF = d[(A'B); (B'C')] = \frac{a\sqrt{21}}{7} \text{ (ycbt).}$$

Bài 162

Gọi d_1 và d_2 là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc nhau nhận AB = a làm đoạn vuông góc chung ($A \in d_1$; $B \in d_2$). Gọi O là trung điểm của AB, (r) là đường tròn tâm O bán kính R nằm trong mặt trung trực (P) của AB, M là một điểm thuộc (r).

1/ Chứng minh tồn tại duy nhất một đoạn thẳng d qua M cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

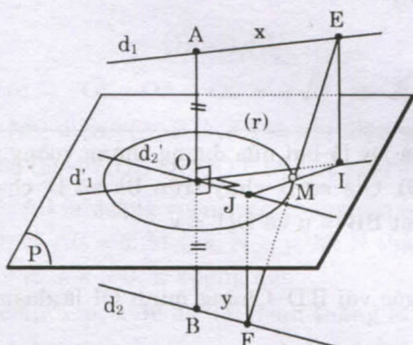
2/ Gọi E; F lần lượt là giao điểm của d với d_1 và d_2. Đặt AE = x; BF = y. Chứng minh rằng : $x^2 + y^2$ là một đại lượng không thay đổi khi M di động trên (r).

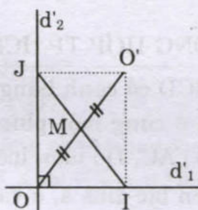
Giải

1/ (P) là mặt phẳng trung trực của AB cho nên : $d_1 // (P)$ và $d_2 // (P)$

Chiếu vuông góc d_1 và d_2 xuống (P) thành d'_1 và d'_2. Ta có : $d'_1 // d_1$ và $d'_2 // d_2$ vì $d_1 \perp d_2$ nên $d'_1 \perp d'_2$

Khi M cho sẵn, ta tìm được duy nhất điểm $I \in d'_1$ và $J \in d'_2$ sao cho M là trung điểm của IJ. Lúc đó ta dựng hai điểm I, J như sau : $\begin{cases} \text{Dựng O' đối xứng với O qua M} \\ \text{Dựng } O'I \perp d'_1 \text{ và } O'J \perp d'_2 \end{cases}$





Do tứ giác OIO'J là hình chữ nhật nên IJ đã được xác định và nhận M làm trung điểm. Từ I dựng đường thẳng song song với AB, nó cắt d_1 ở E. Hiển nhiên OAEI là hình chữ nhật nên IE = OA.

Từ J dựng đường thẳng song song với AB. Đường thẳng này cắt d_2 ở F.

Ta cũng có EF = OB. Vì thế nên : IE = JF

Tứ giác EIFJ là hình bình hành nên E, M, F thẳng hàng và M là trung điểm của EF.

Tóm lại : qua M tồn tại duy nhất một đường thẳng d cắt d_1 ở E và cắt d_2 ở F (ycbt).

2/ Ta có : $x^2 + y^2 = OI^2 + OJ^2 = IJ^2 = 4OM^2 = 4R^2 = \text{const}$ (đpcm).

V. GIẢI TOÁN THI

Bài 163 (ĐẠI HỌC Y – NHA – DƯỢC – 1976)

Cho một tứ diện đều SABC có cạnh là a.

1/ Hãy tính chiều cao SO phát xuất từ đỉnh S và thể tích V của tứ diện SABC.

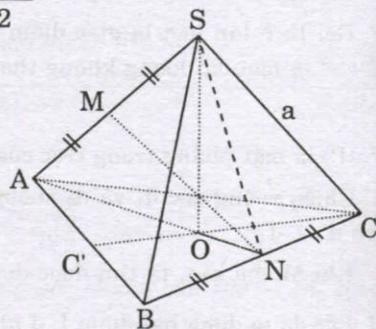
2/ Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Chứng minh MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC. Tính độ dài của MN theo a.

Giải

1/ O là trọng tâm của tam giác đều ABC.

Độc giả tự giải.

$$\Rightarrow \begin{cases} SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \\ V = \dfrac{1}{3}dt(\Delta ABC) \times SO = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3.\sqrt{2}}{12} \end{cases}$$



2a/ Dễ dàng thấy các tam giác SAN và BMC lần lượt cân ở đỉnh N, M

$\Rightarrow$ MN $\perp$ SA và MN $\perp$ BC

$\Rightarrow$ MN là đoạn vuông góc chung của SA và BC (đpcm).

2b/ Ta có: $MN^2 = SN^2 - SM^2$

$$\Rightarrow MN^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ (ycbt).}$$

Bài 164 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP TP.HCM – 1991)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 2a vẽ Bx và Dy là hai nửa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và ở cùng một phía với (ABCD). Giả sử B' chạy trên Bx và D' chạy trên Dy sao cho nhị diện (B', AC, D') luôn luôn vuông. Đặt BB' = u và DD' = v.

a/ Tìm một hệ thức liên lạc giữa a, u và v.

b/ Gọi O là tâm hình vuông ABCD. Hạ OI vuông góc với B'D' Chứng minh OI là đoạn vuông góc chung của AC và B'D'.

c/ Chứng tỏ $OI = a\sqrt{2}$. Suy ra nhị diện (A, B'D', C) cũng vuông.

Giải

a/ Để ý : $\left.\begin{matrix} B'B \perp (ABCD) \\ BD \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (BB'D') \equiv (BB'; DD')$

$$\Rightarrow \widehat{B'OD'} = \widehat{(B'.AC, D')} = 90^0$$

Trong mặt phẳng (BB'; DD') dựng D'E // DB thì BDD'E là hình chữ nhật, nên :

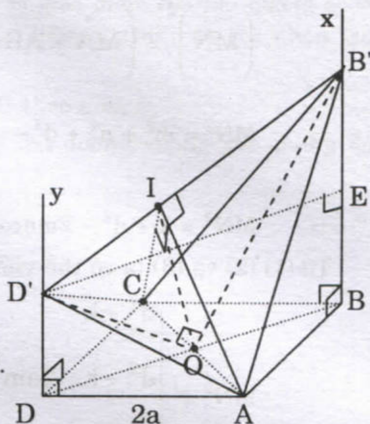
$D'E = DB = 2a\sqrt{2}$; $B'E = |u - v|$

Ta có :

$$\begin{cases} \Delta ED'B' \Rightarrow B'D'^2 = (2a\sqrt{2})^2 + (|u - v|)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad = 8a^2 + u^2 + v^2 - 2uv \\ \Delta BOB' \Rightarrow OB'^2 = u^2 + (a\sqrt{2})^2 = 2a^2 + u^2 \\ \Delta DOD' \Rightarrow OD'^2 = v^2 + (a\sqrt{2})^2 = 2a^2 + v^2 \\ \Delta OD'B' \Rightarrow B'D'^2 = OB'^2 + OD'^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 8a^2 + u^2 + v^2 - 2uv = 4a^2 + u^2 + v^2$

$\Leftrightarrow uv = 2a^2$ (*) (ycbt).



b/ Theo cách dựng: $OI \perp B'D'$ (1)

Theo câu a: $AC \perp (OB'D') \Rightarrow AC \perp OI$ (2)

(1) và (2) chứng tỏ là đoạn vuông góc chung của AC và B'D'.

c/ Đã có: $\left.\begin{array}{l} AC \perp (OB'D') \Rightarrow AC \perp B'D' \\ \text{Theo giả thiết} \Rightarrow OI \perp B'D' \end{array}\right\} \Rightarrow B'D' \perp (IAC)$

$$\Rightarrow \widehat{AIC} = \widehat{(A, B'D', C)}.$$

Xét $\Delta OB'D' \Rightarrow OI.B'D' = OD'.OB'$

$$\Rightarrow OI = \frac{\sqrt{2a^2 + u^2}\sqrt{2a^2 + v^2}}{\sqrt{8a^2 + u^2 + v^2 - 2uv}}$$

$$\Rightarrow OI^2 = \frac{u^2v^2 + 2a^2(u^2 + v^2) + 4a^4}{u^2 + v^2 - 2uv + 8a^2}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} OI^2 = \frac{2a^2(u^2 + v^2) + 8a^4}{u^2 + v^2 + 4a^2} = \frac{2a^2\left[(u^2 + v^2) + 4a^2\right]}{u^2 + v^2 + 4a^2} = 2a^2$$

$$\Rightarrow OI = a\sqrt{2}$$

Ta có : $OI = OA = OC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{AIC} = 90^0$

$\Rightarrow$ Nhị diện : (A, B'D', C) là nhị diện vuông (đpcm).

Bài 165 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – KHỐI A – 1997)

Cho AB là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau x; y. Lấy $A \in x$; $B \in y$, AB cố định và $AB = d$. $M \in x$; $N \in y$; M; N thay đổi và $AM = m$; $BN = n$ ($m; n \geqslant 0$), để ta luôn luôn có $m^2 + n^2 = k > 0$, k không đổi.

a/ Xác định m; n để độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

b/ Trong trường hợp $x \perp y$ và $mn \neq 0$ hãy xác định m; n theo k và d để thể tích tứ diện ABMN đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị đó.

Giải

a/ Gọi $\alpha = \widehat{(x; y)}$ với $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

❒ Nếu $m = 0$: $M \equiv A$ và $k = n^2$

$\Rightarrow \quad MN^2 = AN^2 = AB^2 + BN^2$

$\Rightarrow \quad MN^2 = d^2 + n^2 = d^2 + k$ (1)

❒ Nếu $n = 0$: $N \equiv B$ và $k = m^2$

$\Rightarrow \quad MN^2 = d^2 + k$ (2)

❒ Nếu m, n ≠ 0 :

$$\left(\overrightarrow{MN}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right)^2 = \left(-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad MN^2 = m^2 + n^2 + d^2 - \underbrace{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}}_{0} - 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN} + \underbrace{2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BN}}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad MN^2 = k + d^2 - 2mn\cos(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{BN}) \qquad (3)$$

Từ (1) (2) và (3) ta có thể viết tổng quát :

$$MN^2 = \begin{cases} d^2 + k & : \text{nếu } mn = 0 \\ d^2 + k - 2mn\cos\alpha & : \text{nếu } mn \neq 0 \text{ và } \left(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{BN}\right) = \alpha \qquad (4) \\ d^2 + k + 2mn\cos\alpha & : \text{nếu } mn \neq 0 \text{ và } \left(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{BN}\right) = \pi - \alpha \qquad (5) \end{cases}$$

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN :

- Nếu $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha = 0$ và $MN^2 = d^2 + k$; $\forall m; n$ thoả mãn $m^2 + n^2 = k$

$$\Rightarrow \max MN = \min MN = \sqrt{d^2 + k}$$

- Nếu $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha > 0$ và $2mn \leqslant m^2 + n^2 = k$

(đẳng thức xảy ra khi : $m = n = \sqrt{\dfrac{k}{2}}$) (6)

$$\Rightarrow \underbrace{d^2 + k - \cos\alpha}_{\substack{\min \\ (\text{với đk } (4),(6))}} \leqslant d^2 + k^2 - 2mn\cos\alpha$$

$$< d^2 + k^2 + k + 2mn\cos\alpha \leqslant \underbrace{d^2 + k + \cos\alpha}_{\substack{\max \\ (\text{với đk } (5),(6))}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min MN = d^2 + k - k\cos\alpha \\ \max MN = d^2 + k^2 + k\cos\alpha \end{cases}$$

b/ Do $x \perp y$ và AB là đường vuông góc chung của x và y nên $AM \perp (BAN)$ và ΔBAN vuông ở B

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\,dt\,(\Delta BAN).MA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\,BA.BN.MA$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}mnd \leqslant \frac{1}{6}d.\frac{m^2 + n^2}{2} = \frac{1}{12}kd \qquad (7)$$

Dấu đẳng thức trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow m = n = \sqrt{\dfrac{k}{2}}$.

Vậy : $\max V = \dfrac{1}{12}kd$ (với $m = n = \sqrt{\dfrac{k}{2}}$) (ycbt).

Bài 166 (ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM – 1999)

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình vuông ABCD. Trên đường thẳng Ox vuông góc (P) lấy điểm S. Gọi α là góc nhọn tạo bởi mặt bên và đáy của hình chóp SABCD.

1/ Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp SABCD theo a và α.

2/ Xác định đường vuông góc chung của SA và CD. Tính độ dài đường vuông góc chung đó theo a và α.

Giải

1/ Gọi M là trung điểm DC $\Rightarrow SM \perp DC \Rightarrow DC \perp OM$

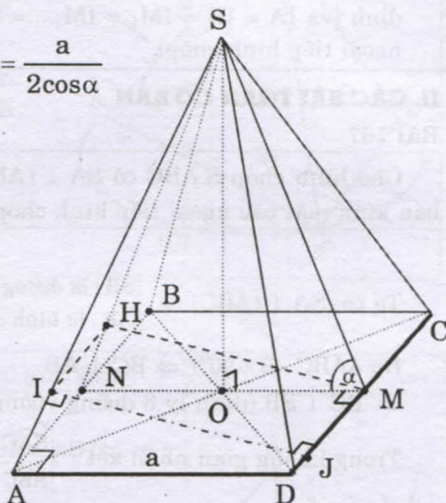
$$\Rightarrow \widehat{SMO} = \alpha;\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Ta có: $\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{SO}{OM} \Rightarrow SO = \dfrac{1}{2}a.\tan\alpha \\ SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}a^2\tan^2\alpha + \dfrac{1}{4}a^2} = \dfrac{a}{2\cos\alpha} \end{cases}$

Vậy: $V_{SABCD} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{6}a^3.\tan\alpha$ (ycbt)

và $S_{tp} = 4.S_{SDC} + S_{ABCD} = 2.SM.DC + S_{ABCD}$

$\Rightarrow S_{tp} = \dfrac{a^2}{\cos\alpha} + a^2 = a^2\left(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$ (ycbt)



2/ Gọi : $N = MO \cap AB$

Ta có: $\begin{cases} MH \perp SN \text{ (cách dựng)} \\ AB \perp (SMN) \Rightarrow AB \perp MH \end{cases}$

$\Rightarrow MH \perp (SAB) \Rightarrow MH \perp SA$

Từ H dựng HI // AB;

(I $\in$ SA) $\Rightarrow$ HI // DC

Từ I dựng IJ // MH.

Khi đó, IJ là đường vuông góc chung của SA và DC.

Với : • $SM = SN = \dfrac{a}{2.\cos\alpha}$

• $MN = a$

• $SO = \dfrac{1}{2}.a.\tan\alpha$

Thì: $S_{SMN} = \frac{1}{2}.SO.MN = \frac{1}{2}.MH.SN$

$\Rightarrow MH = IJ = \dfrac{SO.MN}{SN} = a.\sin\alpha$. (ycbt)

Chuyên đề 9: MẶT CẦU NGOẠI TIẾP – MẶT CẦU NỘI TIẾP

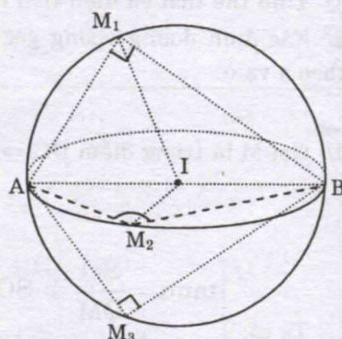
Loại 1 : XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP BẰNG GÓC VUÔNG

I. PHƯƠNG PHÁP $_1$

Cơ sở của phương pháp 1 cần thực hiện 2 bước cơ bản:

- **B_1:** Quản lý giả thiết để tìm được (n – 2) đỉnh có sẵn nhìn hai đỉnh cố định còn lại của hình chóp n đỉnh dưới một góc vuông (xin hiểu n đỉnh gồm 1 đỉnh hình chóp và (n – 1) đỉnh của đa giác đáy).
- **B_2:** Suy ra hình chóp nội tiếp trong mặt cầu có đường kính là khoảng cách giữa hai đỉnh cố định đó.

Lúc đó tâm mặt cầu là trung điểm đoạn nối hai điểm cố định ở trên bán kính là nửa độ dài đoạn nối hai điểm cố định (và $IA = IB = IM_1 = IM_2 .... = R$ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp).

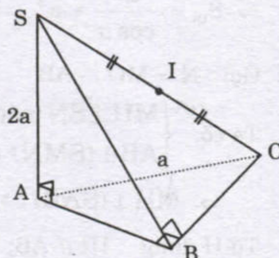


II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 167

Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$; $AC = a$; $\widehat{ABC} = 90^0$ và $SA = 2a$. Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Giải



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SB : \text{là đường xiên} \\ AB : \text{là hình chiếu} \end{cases}$

Do ΔABC $(\hat{B} = 90^0) \Rightarrow BC \perp AB$

$\Rightarrow BC \perp SB$ (định lý 3 đường vuông góc)

Trong không gian nhận xét : $\begin{cases} \widehat{SAC} = 90^0 \\ \widehat{SBC} = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ A; B thuộc mặt cầu đường kính SC.

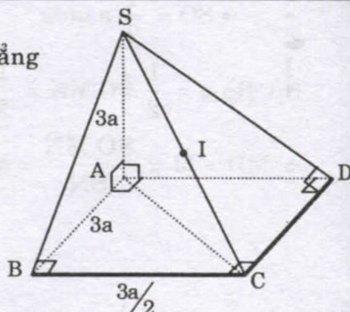
$\Rightarrow$ Mặt cầu tâm I trung điểm SC có bán kính $R = \dfrac{1}{2}SC$ ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Trong đó : $R = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + a^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$ (ycbt).

Bài 168

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó biết : $SA = AB = 2AD = 3a$.

Giải



Bằng định lý ba đường vuông góc và tính chất của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, ta có: $\widehat{SAC} = \widehat{SDC} = \widehat{SBC} = 90^0$

$\Rightarrow$ A; D; B thuộc mặt cầu (S) đường kính SC.

- Tâm của (S) là trung điểm I của SC.
- Bán kính R của (S) là $R = \dfrac{1}{2}SC$

Ta có: $AC^2 = AD^2 + AB^2 = \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 + (3a)^2 = \dfrac{9a^2}{4} + 9a^2 = \dfrac{45a^2}{4}$

$\Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC^2 = (3a)^2 + \frac{45a^2}{4} = 9a^2 + \frac{45a^2}{4} = \frac{81a^2}{4}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}.\frac{9}{2}a = \frac{9}{4}a$

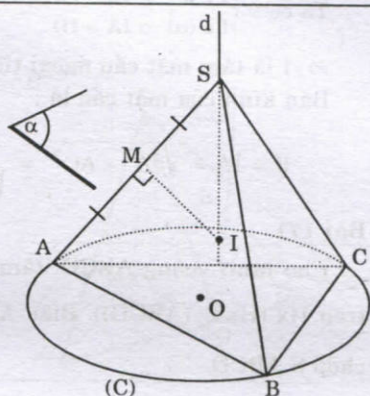
Vậy hình chóp S.ABCD nội tiếp trong mặt cầu (S) tâm I và có bán kính $R = \frac{9}{4}a$ (ycbt).

Loại 2 : XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP BẰNG TRỤC ĐƯỜNG TRÒN VÀ MẶT TRUNG TRỰC

I. PHƯƠNG PHÁP₂

Cơ sở của phương pháp cần thực hiện bốn bước cơ bản:

- B_1 : Dựng trục đường tròn d ngoại tiếp đa giác đáy, thông thường (d) đi qua đỉnh hình chóp (nếu (d) không qua đỉnh, ngoài các biến thể của dạng toán có thể xem thêm phương pháp dựng hai trục đường tròn ở ngay dạng toán sau)
- B_2 : Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên tùy ý có tính ưu việt cho giả thiết (thường chọn cạnh bên vuông góc với đáy là tốt nhất).
- B_3 : Tìm : $(d) \cap (\alpha) = I \Rightarrow$ I là tâm mặt cầu.
- B_4 : Khoảng cách từ tâm đến một đỉnh tùy ý của hình chóp là bán kính mặt cầu: (IS = IA = IB = IC = R).



II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 169

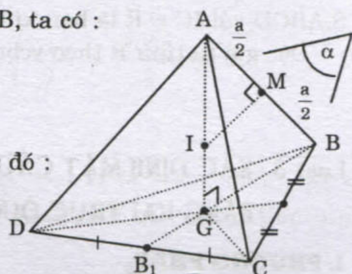
Tìm tâm G và bán tính kính một mặt cầu ngoại tiếp tứ giác đều.

Giải

Gọi G là trọng tâm ΔBCD đều cạnh a và M là trung điểm AB, ta có :

$\begin{cases} GB = GC = GD \\ AB = AC = AD \end{cases}$

⇒ AG là trục đường tròn ngoại tiếp ΔBCD

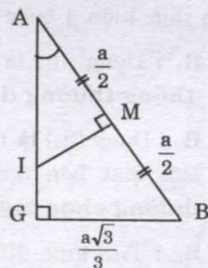


Dựng mặt trung trực (α) qua trung điểm M của cạnh AB, lúc đó :

$AG \cap (\alpha) = I$, ta có : $\begin{cases} I \in AG \Rightarrow IB = IC = ID \\ I \in (\alpha) \Rightarrow IA = IB \end{cases}$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD} \\ \text{bán kính mặt cầu là } R = IA \end{cases}$



Ta có : $\Delta AMI \backsim \Delta AGB \Rightarrow \frac{IA}{AB} = \frac{AM}{AG}$

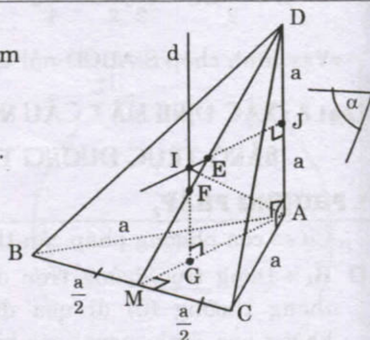
$\Rightarrow IA = AB.\frac{AM}{AG} = a.\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a^2}{2a\sqrt{1-\frac{3}{9}}} = \frac{a}{2.\sqrt{\frac{6}{9}}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều là $R = \frac{\sqrt{6}}{4}.a$ (ycbt).

Bài 170

Cho tứ diện ABCD có ΔABC đều cạnh a; DA = 2a và DA ⊥ (ABC). Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Giải



Gọi G là trọng tâm cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC và để ý đến : AD ⊥ (ABC).

⇒ Trục d của đường tròn (ABC) qua G và song song AD.

Dựng mặt trung trực (α) củs AD qua trung điểm J của AD.

⇒ $d \cap (\alpha) = I$

Ta có : $\begin{cases} I \in d \Rightarrow IB = IC = ID \\ I \in (\alpha) \Rightarrow IA = ID \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = ID$

⇒ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD (ycbt).

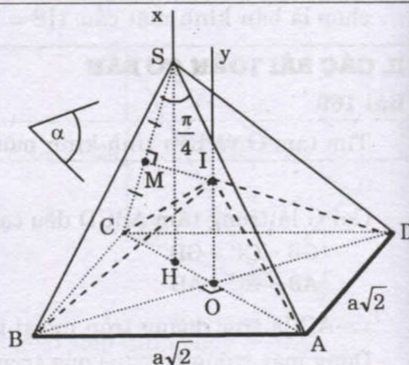
Bán kính của mặt cầu là :

$$R = IA = \sqrt{JA^2 + AG^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{12a^2}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \text{ (ycbt).}$$

Bài 171

Cho hình vuông ABCD, tâm O cạnh $a\sqrt{2}$. Điểm H ∈ AC sao cho AH = $a\sqrt{2}$. Lấy điểm S trên Hx (Hx ⊥ (ABCD)). Biết $\widehat{ASC} = \frac{\pi}{4}$. Định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Hướng dẫn



Dựng Oy // Hx thì Oy là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD. Dựng mặt trung trực đoạn SC là (α).

⇒ $(\alpha) \cap Oy \equiv I$

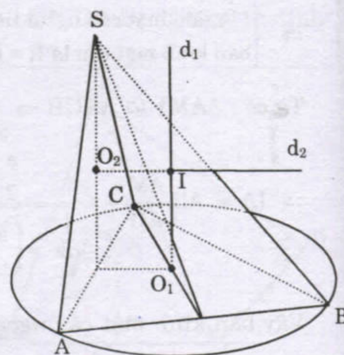
⇒ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD với IC = R là bán kính.

Độc giả tự tính R theo ycbt.

Loại 3 : XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP BẰNG HAI TRỤC ĐƯỜNG TRÒN PHÂN BIỆT

I. PHƯƠNG PHÁP$_3$

Cơ sở của phương pháp 3 để xác định mặt cầu ngoại tiếp cần thực hiện 4 bước cơ bản :



- ❒ **B_1 :** Dựng (d_1) là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy (**thông thường d_1 không qua đỉnh hình chóp**).
- ❒ **B_2 :** Dựng (d_2) là trục đường tròn ngoại tiếp với tam giác là một mặt bên (**có tính ưu việt cho giả thiết thông thường chọn mặt bên vuông góc với mặt đáy**).
- ❒ **B_3 :** Tìm giao điểm của hai trục đường tròn $d_1 \cap d_2 = I$ (thường tồn tại I).

⇒ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cần tìm.

❐ B_4 : Khoảng cách từ tâm I đến một đỉnh tùy ý của hình chóp là bán kính mặt cầu :

(IS = IA = IC = R).

❍ **Ghi chú :** *Một mặt cầu khi biết tâm I và bán kính được xem là đã xác định.*

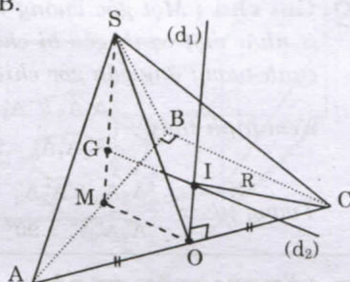
II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 172

Cho ΔABC vuông cân tại B với AB = 2a. Từ trung điểm M của AB ta dựng đường thẳng vuông góc với (ABC) và chọn trên đó điểm S để ΔSAB đều. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC.

Giải

Gọi O, M, G thứ tự là trung điểm AC, AB và trọng tâm ΔSAB.



Để ý đến (SAB) ⊥ (ABC), dựng :

$$\begin{cases} d_1 \text{ qua O và } d_1 \perp (ABC) \\ d_2 \text{ qua G và } d_2 \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (d_1) \text{ là trục đường tròn (ABC).} \\ (d_2) \text{ là trục đường tròn (SAB).} \end{cases}$$

Trong mặt phẳng (SMO) ⇒ $(d_1) \cap (d_2) = I$,

Ta có: $\begin{cases} I \in (d_2) \Rightarrow IA = IB = IS \\ I \in (d_1) \Rightarrow IA = IB = IC \end{cases}$

⇒ IC = IB = IC = IS = R

⇒ I là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

ΔSAB đều cạnh 2a ⇒ $SM = a\sqrt{3} \Rightarrow GM = \frac{1}{3}.SM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Để ý đến $IO = GM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

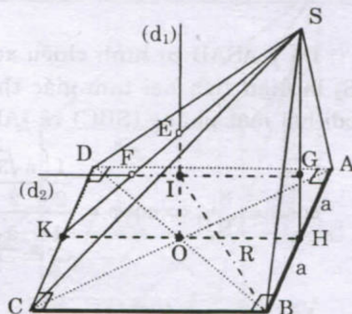
$$\Rightarrow R = IC = \sqrt{IO^2 + OC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{12a^2}{9}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \text{ (ycbt).}$$

Bài 173

Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình vuông cạnh 2a. Gọi H là trung điểm AB và $SH = a\sqrt{3}$ là độ dài đường cao hình chóp. Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Hướng dẫn

Dựng : $\begin{cases} d_1 \text{ là trục đường tròn (ABCD)} \\ d_2 \text{ là trục đường tròn (SAB)} \end{cases}$



Trong (SHK) : $(d_1) \cap (d_2) = I$

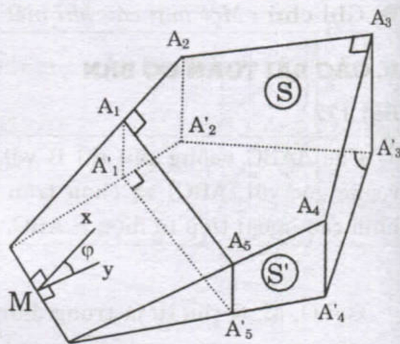
⇒ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Bán kính mặt cầu:

$$R = \sqrt{OI^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}.a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{21}}{3} \text{ (ycbt).}$$

Loại 4 : DIỆN TÍCH VÀ HÌNH CHIẾU

I. PHƯƠNG PHÁP



- Trong một số trường hợp việc tính diện tích một đa giác là khó khăn. Ta áp dụng định lý diện tích và hình chiếu để tính nó. Việc chọn diện tích cần tìm là S hay S' cần tế nhị và nên dựa vào góc chiếu φ như sau :

$$\boxed{S = S'\cos\varphi}.$$

- Khi tính gián tiếp góc của nhị diện hay góc của hai mặt phẳng ta sử dụng công thức :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{S}{S'}}$$

✪ **Ghi chú :** *Một góc vuông khi chiếu được bảo toàn thì ít nhất một cạnh góc bị chiếu phải song song với một cạnh tương ứng của góc chiếu.*

Xem hình thấy : $\begin{cases} A_1A_5 \,//\, A_1'A_5' \\ \widehat{A_2'A_1'A_5'} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{A_2A_1A_5} = 90^0$

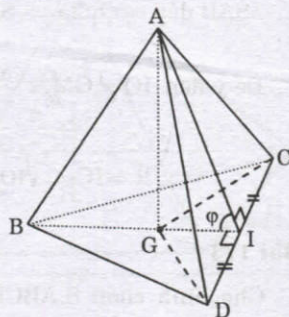
Tương tự $\Rightarrow \begin{cases} A_2A_3 \not\parallel A_2'A_3' \\ \widehat{A_2'A_3'A_4'} \neq 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{A_2A_3A_4} = 90^0$.

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 174

Cho tứ diện đều cạnh a. Tính góc phẳng của nhị diện bất kỳ tạo bởi các mặt của nhị diện đó.

Giải



Gọi G là trọng tâm ΔBCD đều và AI là trung tuyến ΔACD.

Ta có : $\varphi = \widehat{GIA} = \widehat{(CD)}$

Đồng thời ΔACD có hình chiếu xuống (BCD) là ΔGCD, còn diện tích hai tam giác có tỷ lệ là :

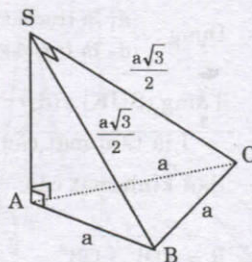
$$3 = \frac{BI}{GI} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Do đó góc của nhị diện (CD) là : $\varphi = \widehat{(CD)} = \arccos\frac{1}{3}$ (ycbt).

Bài 175

Cho tứ diện SABC có SA ⊥ (ABC) và ΔABC đều cạnh a; $\widehat{BSC} = \frac{\pi}{2}$; $SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Giải



Để ý ΔSAB có hình chiếu xuống (ABC) là ΔABC. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai tam giác theo thứ tự đó và φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), ta có:

$$\cos\varphi = \frac{S_1}{S_2} \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy : $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (ycbt).

Bài 176

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M, N, P thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC và DD_1 theo thứ tự đó.

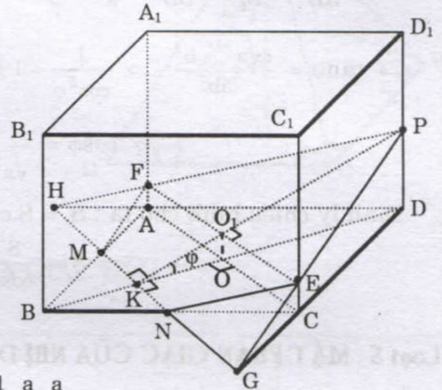
1/ Xác định thiết diện mà mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương.

2/ Tính diện tích thiết diện đó.

3/ Chứng minh rằng trong thiết diện đó không có 2 đường chéo nào vuông góc nhau.

Giải

1/ Độc giả tự giải và thiết diện nhận được là ngũ giác MNEPF (ycbt).



2/ Gọi K là trung điểm MN $\Rightarrow \begin{cases} MN \perp DB \text{ tại } K \\ MN \perp PK \text{ tại } K \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi = \widehat{PKD} = \widehat{[(MNEPF); (ABCD)]}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{KD}{PK}$

$$= \frac{\frac{3}{4}.BD}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}.BD\right)^2 + PD^2}} = \frac{\frac{3}{4}.a\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

Định lý diện tích và hình chiếu cho :

$$S' = S\cos\varphi \Rightarrow S = \frac{S'}{\cos\varphi} \Leftrightarrow S_{MNEPF} = \frac{S_{AMNED}}{\cos\varphi} = \frac{a^2 - \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}}{\frac{3}{\sqrt{11}}} = \frac{21\sqrt{11}}{88}a^2 \text{ (ycbt).}$$

3/ Để ý đến một đôi đường chéo của thiết diện là FE và đoạn PK tạo thành $\widehat{PO_1E}$ có hình chiếu xuống (ABCD) là $\widehat{KOC}$.

Nhưng : $\begin{cases} O_1E \,//\, OC \\ \widehat{KOC} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{KO_1E} = 90^0 \Rightarrow PK = AC \Rightarrow$ PM, FE không vuông góc.

Độc giả tự chứng minh các đôi đường chéo còn lại đôi một không vuông góc nhau ⇒ đpcm.

Bài 177

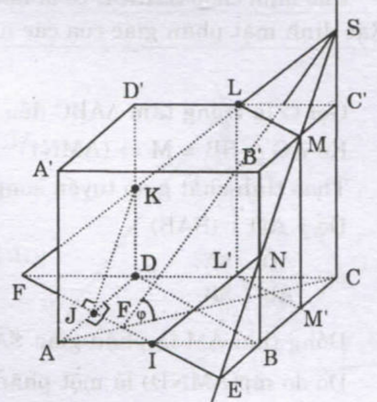
Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với các cạnh là : AB = a; AD = b; AA' = c. Gọi I, J, K là trung điểm của AB, AD, DD'.

1/ Dựng thiết diện của mp(IJK) với hình hộp.

2/ Tính diện tích thiết diện đó.

Giải

1/ Dựng : $\begin{cases} \text{Đường thẳng IJ cắt BC; CD tại E và F} \\ \text{Đường thẳng FK cắt D'C' và CC' tại L và S} \\ \text{Nối SE cắt B'C' tại M và BB' tại N} \end{cases}$



Nối liên tiếp các giao tuyến thì thiết diện là lục giác IJKLMN (ycbt).

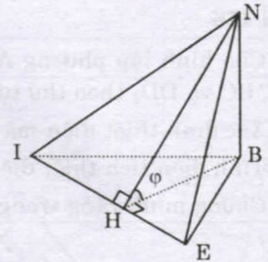
2/ Chiếu thiết diện xuống mặt đáy ABCD ta được lục giác IJDL'M'B, trong đó L', M' là trung điểm của CD và CB. Diện tích của hình chiếu :

$$S' = dt\,(ABCD) - 2\,dt\,\Delta AIJ = ab - 2.\frac{1}{2}.\frac{ab}{4} = \frac{3ab}{4}$$

Dựng BH ⊥ IE ⇒ NH ⊥ IE (định lý ba đường vuông góc)

⇒ góc của mặt phẳng thiết diện và mặt đáy là :

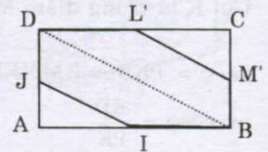
$\varphi = \widehat{NHB}$ (hoặc $\widehat{SFC}$)



Do ΔNBH vuông ở B ⇒ $\tan\varphi = \dfrac{NB}{HB}$ (1)

Từ cách dựng ta suy ra N là trung điểm của BB' ⇒ $NB = \dfrac{c}{2}$

Và : $\dfrac{1}{HB^2} = \dfrac{1}{BI^2} + \dfrac{1}{BE^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} \Rightarrow HB = \dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$



$\overset{(1)}{\Rightarrow} \tan\varphi = \dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \dfrac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Định lý chiếu hình cho ta : S' = S.cosφ (vì S là diện tích thiết diện)

$$\Rightarrow S = \frac{S'}{\cos\varphi} = \frac{3}{4}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \text{ (ycbt).}$$

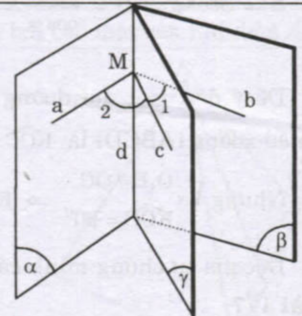
Loại 5 : MẶT PHÂN GIÁC CỦA NHỊ DIỆN

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp dựng mặt phân giác theo định nghĩa cần phải thực hiện ba bước cơ bản :

- ❐ **B_1 :** Dựng góc nhị diện $\widehat{aMb}$ của nhị diện (α; d; β).
- ❐ **B_2 :** Dựng tia phân giác Mc của $\widehat{aMb}$
- ❐ **B_3 :** Dựng mặt γ = (d; Mc) với d = α ∩ β. Thì γ là mặt phân giác của (α; β).

✪ **Ghi chú**: *Một điểm trên mặt phân giác có khoảng cách đến hai mặt nhị diện bằng nhau.*



II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 178

Cho hình chóp S.ABCD có là tam giác SAB đều và ABCD là hình vuông. Giả sử (SAB) ⊥ (ABCD). Xác định mặt phân giác của các nhị diện (B; AD; S).

Giải

Gọi G là trọng tâm ΔABC đều.

Kẻ AG ∩ SB = M ⇒ (AMN) ∩ SC = N

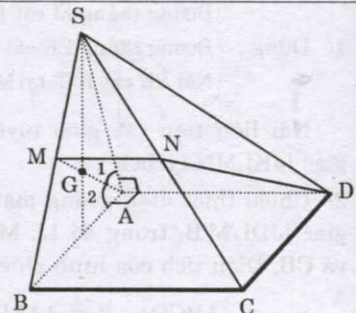
Theo tính chất giao tuyến song song ta có MN // CD.

Để ý AD ⊥ (SAB)

$\Rightarrow \begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp SB \end{cases}$

Đồng thời AM là phân giác $\widehat{SAB}$.

Do đó mp(AMND) là một phân giác góc nhị diện (S; AD; B) (ycbt).

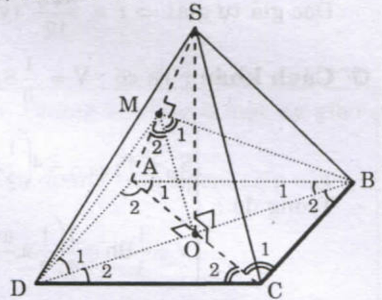


Bài 179

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Chứng minh rằng SO là giao tuyến của các mặt phân giác tương ứng với các cặp nhị diện (SA), (SB) và (SB), (SC) và (SC), (SD) và (SD), (SA).

Giải

Do tính chất đối xứng ta chỉ cần xét một cặp nhị diện (SA), (SB) là đủ.



Để ý đến nhị diện (SA), dựng BM ⊥ SA ⇒ $\begin{cases} DM \perp SA \\ OM \perp SA \end{cases}$

⇒ OM là tia phân giác của $\widehat{DMB} = \widehat{(SA)}$

⇒ (SOA) là mặt phân giác nhị diện (SA).

Tương tự do tính đối xứng :

$\begin{cases} \text{(SOB) là mặt phân giác nhị diện (SB)} \\ \text{(SOC) là mặt phân giác nhị diện (SC)} \\ \text{(SOD) là mặt phân giác nhị diện (SD)} \end{cases}$

Do đó SO là giao tuyến tương ứng trong ycbt (đpcm).

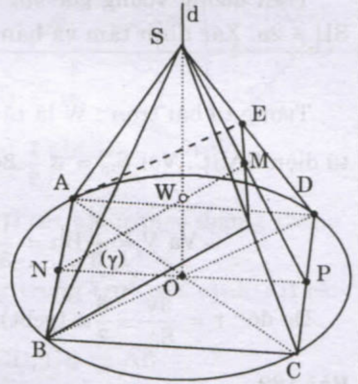
Loại 6 : XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NỘI TIẾP HÌNH CHÓP ĐA GIÁC ĐỀU

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp thường sử dụng cho hình chóp tam giác đều qua ba bước :

- **B_1 :** Xác định trục đường tròn d của đa giác đáy (thông thường d qua đỉnh S).
- **B_2 :** Xác định mặt phân giác (γ) của một mặt bên tùy ý và đáy.
- **B_3 :** (d) ∩ (γ) = W là tâm mặt cầu cần tìm và khoảng cách từ W đến các mặt bên hay đáy của hình chóp là bán kính r của mặt cầu.

Ghi chú : *Sau này ta có thể tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp bằng thể tích **V** và diện tích toàn phần **S_{tp}** như sau:* $r = \frac{3V}{S_{tp}}$.



II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 180

Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện đều cạnh a.

Giải

Gọi G là trọng tâm ΔABC đều. ⇒ GB = GD = GC (1)

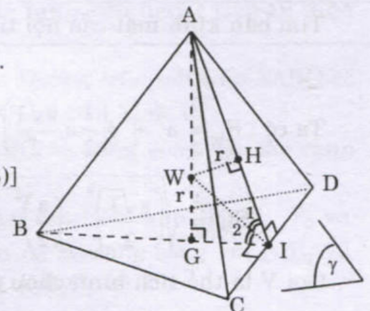
Tứ diện đều ABCD cạnh a. ⇒ AB = AD = AC (2)

Từ (1) và (2) cho ta AG là trục đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Dựng mặt phân giác (γ) của góc nhị diện cạnh CD là $\widehat{AIB}$.

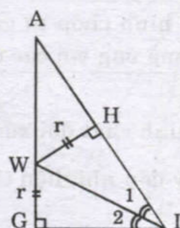
⇒ γ ∩ AG = W

Ta có: $\begin{cases} W \in AG \Rightarrow d[W; (ABC)] = d[W; (ACD)] = d[W; (ADB)] \\ W \in \gamma \Rightarrow d[W; (ACD)] = d[W; (BCD)] \end{cases}$



⇒ $\begin{cases} \text{W là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện đều ABCD (ycbt)} \\ \text{WH = WG = r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện} \end{cases}$

Định lý đường phân giác và diện tích cho: $IW = \dfrac{2AI.IG\cos(\widehat{WIG})}{AI + IG}$



$\Rightarrow r = WG = \sqrt{IW^2 - GI^2} = \sqrt{\dfrac{4AI^2.GI^2}{(AI + GI)^2}.\cos^2(\widehat{WIG}) - GI^2}$

Độc giả tự giải $\Rightarrow r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$ (ycbt).

✪ **Cách khác :** Ta có : $V = \dfrac{1}{3}S_{tp}.r \Rightarrow r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$ (1)

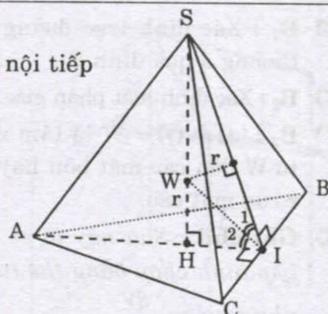
Trong đó : $\begin{cases} S_{tp} = 4S_{ABCD} = 4\left(\dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}a^2 \\ V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12} \end{cases}$

Do đó : $\overset{(1)}{\Rightarrow} r = \dfrac{3.\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3}{\sqrt{3}a^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$ (ycbt).

Bài 181

Trên đường vuông góc với tam giác đều ABC cạnh a tại trực tâm lấy một điểm S sao cho SH = 2a. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện SABC.

Hướng dẫn



Tương tự bài trên : W là tâm và r = WH là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện SABC. Với $S_{tp} = 3\left(\dfrac{1}{2}.BC.SI\right) + \dfrac{1}{2}.BC.AI$

Và $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\right).2a = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{6}$

Do đó : $r = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{6}{7}a$ (ycbt).

Bài 182

Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ABC có ΔABC đều cạnh a cho SA = SB = SC và góc nhị diện (BC) là α.

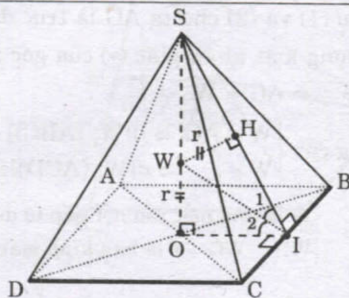
Hướng dẫn

Độc giả tự giải, tương tự bài trên.

Bài 183

Tìm bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy là a.

Giải



Ta có : $S_{tp} = a^2 + 4\left(\dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\sqrt{3} + 1\right)a^2$

$SO = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi V là thể tích hình chóp tứ giác đều.

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

$$\text{Do đó : } r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{3.\frac{\sqrt{2}}{6}a^3}{(\sqrt{3}+1)a^2} = \frac{\sqrt{2}.a}{2(\sqrt{3}+1)} \text{ (ycbt).}$$

III. GIẢI TOÁN THI

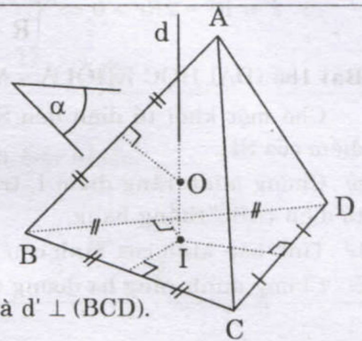
Bài 184 (ĐẠI HỌC CÔNG AN TRUNG ƯƠNG – 1970)

1/ Người ta xem 6 mặt trung trực của 6 cạnh của một tứ diện. Chứng tỏ rằng 6 mặt ấy giao nhau tại một điểm.

2/ Gọi r và R lần lượt là bán kính của đường tròn nội tiếp và của đường tròn ngoại tiếp của một mặt tam giác tùy ý của tứ diện trên.

Chứng minh rằng : $\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}$.

Giải



1/ Cho tứ diện ABCD.Gọi I là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác BCD.

⇒ I là tâm đường tròn ngoại tiếp (BCD).

Hai mặt trung trực của hai cạnh BC và CD có điểm chung I, nên phải cắt nhau theo giao tuyến d.

⇒ d ⊥ (BCD).

Hai mặt trung trực của cạnh BD và CD cũng có điểm chung I, nên phải cắt nhau theo giao tuyến (d') qua I và d' ⊥ (BCD).

⇒ (d') ≡ (d)

Vậy ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh của tam giác (BCD) cắt nhau theo đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (BCD) tại I.

Cạnh AB xiên góc so với mặt phẳng (BCD), nên mặt phẳng trung trực của cạnh AB cắt đường thẳng d tại một điểm O.

⇒ O là điểm chung của bốn mặt trung trực của bốn cạnh BC, CD, DB và AB.

⇒ OB = OC = OD = OA. Các đẳng thức OC = OA và OD = OA chứng tỏ O cũng đồng thời thuộc các mặt trung trực AC và AD.

Vậy O là giao điểm của sáu mặt trung trực của sáu cạnh của tứ diện đã cho (đpcm).

❑ **Cách khác ta có thể lập luận đơn giản như sau :**

Rõ ràng một điểm tùy ý thuộc đồng thời cả sáu mặt phẳng trung trực của sáu cạnh của tứ diện khi và chỉ khi điểm đó cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

Chỉ có một điểm duy nhất có tính chất này, đó là tâm của hình cầu ngoại tiếp tứ diện ⇒ (đpcm).

2/ Giả sử gọi ΔABC là tam giác cần xét trong giả thiết và gọi : Đường tròn nội tiếp ΔABC có tâm O_1 và bán kính r; còn đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm O_2 và bán kính R.

• Dựng tam giác $A_1B_1C_1$ có các cạnh đi qua các đỉnh của ΔABC và song song với các cạnh của ΔABC.

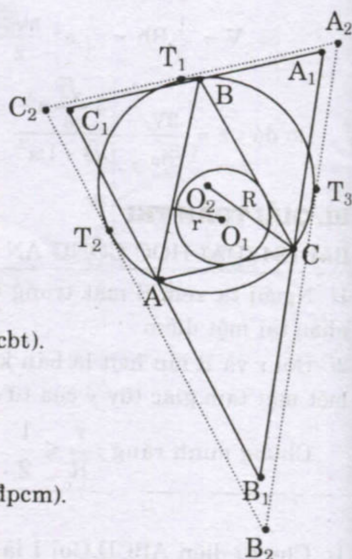
• Dựng các tiếp tuyến của đường tròn tâm O_2 (bán kính R) tại các tiếp điểm T_1, T_2, T_3 và song song với các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ sao cho tiếp tuyến A_2 B_2 song song với A_1B_1 và tiếp điểm T_2 nằm trên cung AB (chứa điểm C), ta được tam giác $A_2B_2C_2$.

Theo cách dựng trên đây, miền trong tam giác $A_1B_1C_1$ nằm hẳn ở trong của miền trong tam giác $A_2B_2C_2$ và $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$

$\Rightarrow$ Gọi thêm R_1 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.

$\Rightarrow R_1 \leqslant R$.

Mặt khác, tỷ số đồng dạng của bán kính của đường tròn nội tiếp hai tam giác đồng dạng $A_1B_1C_1$ và ABC bằng tỷ số các cạnh của hai tam giác đó, tức là :



$$\frac{R_1}{r} = \frac{A_1B_1}{AB} = 2 \Leftrightarrow R_1 = 2r \Leftrightarrow 2r \leqslant R \Leftrightarrow \frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2} \text{ (ycbt).}$$

☐ **Cách khác :**

Đặt $O_1O_2 = l$, từ công thức Euler : $l^2 = R^2 - 2Rr$.

$$\Leftrightarrow l^2 = R^2 - 2Rr \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R > 0 \text{ (hiển nhiên)} \\ R - 2r \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2} \text{ (đpcm).}$$

Bài 185 (ĐẠI HỌC KHỐI A – MIỀN BẮC – 1972)

Cho một khối tứ diện đều SABC. Gọi SH là đường cao của khối tứ diện đó và I là trung điểm của SH.

a/ Chứng minh rằng điểm I, trọng tâm T của tam giác ABC và tâm hình cầu ngoại tiếp khối tứ diện IABC thẳng hàng.

b/ Tính bán kính của hình cầu nội tiếp khối tứ diện IABC theo cạnh a của tứ diện đều SABC.

c/ Chứng minh rằng ba đường thẳng AI, BI và CI từng đôi một vuông góc với nhau.

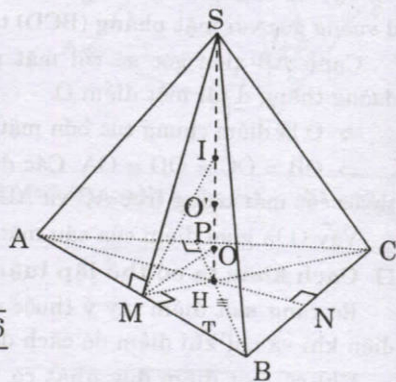
Giải

a/ Để ý do tính chất đều của tứ diện SABC nên SH chứa I là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $T \equiv H$

Gọi I' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$\Rightarrow I' \in IH = IS$

$\Rightarrow$ I', I, H thẳng hàng (đpcm).

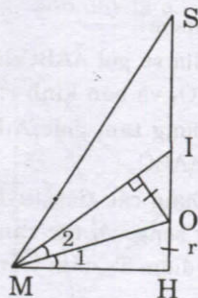


b/ Gọi O là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện IABC, thì O nằm trên IH, đồng thời O nằm trên mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh AB, tức là O là giao điểm của IH và đường phân giác góc IMH, và r = OH là bán kính hình cầu nội tiếp khối tứ diện IABC.

Ta có : $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow IH = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Xét tam giác vuông IMH ta có :



$$\tan\widehat{IMH} = \frac{IH}{MH} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \quad (1)$$

Mặt khác : $IM = \sqrt{MH^2 + IH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{a}{2}$

Theo công thức nhân : $\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2\tan M_1}{1 - \tan^2 M_1} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\tan^2 M_1 + 2\tan M_1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan M_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 0 \\ \tan M_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \tan M_1 = \tan\frac{\widehat{IMH}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

Xét tam giác vuông OMH, ta có :

$$r = OH = MH \tan\widehat{OMH} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{6\sqrt{2}} \text{ (ycbt).}$$

Ghi chú : *Độc giả có thể tính $r = \frac{V}{S_{tp}}$, bài toán sẽ đơn giản hơn nhiều!*

c/ Như ta đã tính được trong câu b) : $IM = \frac{a}{2}$ tương tự ta có : $IN = \frac{a}{2}$, $IP = \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow IM = \frac{1}{2}AB,\ IN = \frac{1}{2}BC,\ IP = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow$ Các tam giác AIB, BIC và CID đều vuông tại I, trung tuyến có độ dài bằng nửa cạnh đó.

$\Rightarrow$ AI, BI và CI đôi một vuông góc nhau (đpcm).

Bài 186 (ĐẠI HỌC KHỐI B – MIỀN BẮC – 1972)

Cho hình thang ABCD, vuông ở A và D, AB = AD = a, DC = 2a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ABCD tại D lấy một điểm S sao cho SD = a.

a/ Các mặt bên của hình chóp SABD là những tam giác như thế nào ?

b/ Xác định tâm và bán kính hình cầu đi qua các điểm S, B, C, D.

c/ Gọi M là điểm giữa SA. Mặt phẳng DMC cắt hình chóp SABCD theo thiết diện gì ? Hãy tính diện tích của thiết diện đó.

Giải

a/ Một cách đơn giản chúng ta sẽ chứng minh được các mặt bên của hình chóp là bốn tam giác vuông.

Độc giả tự giải. Chẳng hạn ta tính được :

$$\begin{cases} SC = \sqrt{SD^2 + CD^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5} \\ SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow SC^2 = SB^2 + BC^2 = 5a^2 \\ BC = a\sqrt{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông ở B (đpcm)

b/ Gọi O là trung điểm của SC. Để ý thấy hai tam giác SDC vuông và SBC vuông theo thứ tự tại D và B nên ta có :

$$OS = OD = OB = OC = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Vậy S, B, C, D nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính:

$$R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

c/ Hai mặt phẳng (DMC) và (SAB) có điểm M chung nên chúng cắt nhau theo một giao tuyến MN (N nằm trên SB) và vì AB // CD nên MN // CD (và MN // AB).

⇒ CDMN là hình thang, đó là thiết diện của hình chóp với mặt phẳng DMC. Mà CD ⊥ CM

⇒ Thiết diện CDMN là hình thang vuông tại D và tại M. (ycbt)

Do M là trung điểm SA nên ta có : $DM = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

Vậy diện tích thiết diện CDMN bằng :

$$S = \frac{CD + MN}{2}.DM = \frac{2a + \frac{a}{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{8} \text{ (ycbt).}$$

Bài 187 (ĐẠI HỌC KHỐI A – MIỀN BẮC – 1973)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD đỉnh S, đáy là một hình vuông ABCD cạnh bằng a, các mặt bên làm với mặt phẳng đáy với một góc φ. Ta dựng mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh BC trong hình chóp (tức là góc nhị diện của hình chóp xác định bởi mặt BCS và mặt BCAD); mặt phẳng phân giác này cắt SD ở M và SA ở N. Tính thể tích của hình chóp S.BCMN theo a và φ.

Giải

Gọi I, L theo thứ tự là trung điểm của BC, AD. Và do hình chóp S.ABCD là hình chóp tứ giác đều ⇒ ΔSIL là tam giác cân mà góc ở đáy $\widehat{SIL} = \widehat{SLI} = \varphi$ và SH là đường cao của hình chóp. H = AC ∩ BD

Mặt phẳng phân giác (α) của nhị diện cạnh BC chính là mặt phẳng đi qua BC và đường phân giác IK của $\widehat{SIK}$ và K là trung điểm của MN. Từ đó dễ dàng thấy rằng thiết diện BCMN là một hình thang cân.

Diện tích hình thang BCMN được tính theo công thức :

$$S_{BCMN} = \frac{1}{2}(BC + MN).IK$$

Theo định lý hàm sin trong ΔLKI ta có : $\frac{IL}{\sin\widehat{IKL}} = \frac{KI}{\sin\widehat{KLI}}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin\left(\pi - \frac{3\phi}{2}\right)} = \frac{IK}{\sin\phi} \Leftrightarrow \quad \frac{IK}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin\frac{3\varphi}{2}} \Leftrightarrow IK = \frac{a\sin\varphi}{\sin\frac{3\varphi}{2}}$$

Theo định lý hàm sin trong ΔSKI, ta có :

$$\frac{SK}{\sin\widehat{SIK}} = \frac{SI}{\sin\widehat{SKI}} \Leftrightarrow \frac{SK}{SI} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}}$$

Nhưng : $\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{SK}{SL} = \dfrac{SK}{SI} \Rightarrow MN = AD.\dfrac{SK}{SI} = a\dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}}$

$$\Rightarrow S_{BCMN} = \frac{1}{2}a\left(1 + \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}}\right).a\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{3\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{BCMN} = \frac{1}{2}a^2.\left(\sin\frac{3\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right).\frac{\sin\varphi}{\sin^2\frac{3\varphi}{2}} = \frac{a^2\sin^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{3\varphi}{2}}.$$

Do (SKI) ⊥ (BCMN) nên đường vuông góc SJ hạ từ S xuống IK cũng chính là đường cao của hình chóp SBCMN. Trong tam giác vuông SJI ta có :

$$SJ = SI\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a\sin\frac{\varphi}{2}}{2\cos\varphi}$$

$$V_{S.BCMN} = \frac{1}{3}S(BCMN).SJ = \frac{1}{3}\frac{a^2\sin^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{3\varphi}{2}}.\frac{a\sin\frac{\varphi}{2}}{2\cos\varphi} = \frac{a^3\sin^3\varphi}{12\sin^2\frac{3\varphi}{2}\cos\varphi} \text{ (ycbt).}$$

Bài 188 (ĐẠI HỌC KHỐI B – 1974 – MIỀN BẮC)

Trong mặt phẳng P cho hình thoi ABCD với AB = a và $BD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Trên đường vuông góc với mặt phẳng P và đi qua giao điểm hai đường chéo của hình thoi trên, người ta lấy điểm S sao cho SB = a.

a/ Chứng minh rằng tam giác ASC là vuông.

b/ Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp S.ABCD.

c/ Chứng minh rằng góc nhị diện tạo nên bởi các mặt SAB và SAD là vuông.

Giải

a/ Gọi O = AC ∩ BD : trong tam giác vuông OAB ta có:

$$OA^2 = AB^2 - OB^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

Trong tam giác vuông OBS ta có :

$$OS^2 = SB^2 - OB^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

Như vậy : $OC = OA = OS = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Nói cách khác tam giác ASC có đường trung tuyến SO bằng nửa cạnh đáy AC, ASC là tam giác vuông tại S (đpcm).

b/ Ta có : $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO.dt(ABCD)$

Trong đó : $dt(ABCD) = OA.BD \Rightarrow dt(ABCD) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}a^2}{3}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{2\sqrt{2}a^2}{3} = \frac{4a^3}{9\sqrt{3}} \text{ (ycbt).}$$

Trước hết ta nhận xét rằng các mặt bên (SAB), (SBC), (SDC), (SAD) là bốn tam giác bằng nhau.

Thật vậy, với SA = SC, SB = SD và từ giả thiết : AB = BC = CD = AD thì 4 tam giác đó có các cạnh tương ứng bằng nhau.

Hạ BH ⊥ SA, ΔBSA là tam giác cân (BA = BS) nên BH cũng là trung tuyến của tam giác BSA, tức là $HA = HS = \frac{AS}{2}$

Trong tam giác vuông OSA ta có :

$$SA^2 = OS^2 + OA^2 = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow SA = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - HA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$dt(SAB) = \frac{1}{2}SA.BH = HA.BH = \frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$$

Cuối cùng ta được :

$$S_{tp} = dt(ABCD) + 4dt(SAB) = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3} + \frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{tp} = 2a^2\sqrt{2} \text{ (ycbt).}$$

c/ Nối D với H ⇒ DH là đường cao của tam giác cân DSA.

Do vậy $\widehat{DHB} = \widehat{(SA)} = \widehat{[(SAB); (SAD)]}$

Ta có : $DH^2 = BH^2 = \frac{2a^2}{3}$

$$\Rightarrow DH^2 + BH^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = \frac{4a^2}{3} = BD^2$$

$\Rightarrow$ ΔBHD vuông tại đỉnh H.

$\Rightarrow$ Góc nhị diện cạnh (SA) là nhị diện vuông (ycbt).

Bài 189 (ĐẠI HỌC KHỐI B, N – 1975)

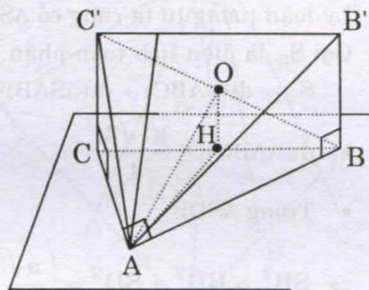
Cho một tam giác vuông cân ABC, AB = AC = a. BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC), ở cùng một phía đối với mặt phẳng đó và BB' = CC' = a.

a/ Chứng minh rằng tam giác AB'C' là tam giác đều.

b/ Tính thể tích của hình chóp có đỉnh là A và đáy là tứ giác BCC'B'.

c/ Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, C', B' cùng nằm trên một mặt cầu. Tìm thể tích của hình cầu tương ứng.

Giải



a/ Các tam giác ΔABC, ΔBAB', ΔCAC' vuông cân.

$\Rightarrow BC = AB' = AC' = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow B'C' = AC' = AB' = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ ΔAB'C' là tam giác đều (đpcm).

b/ Hạ $AH \perp BC$. Và thấy $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AH$

Lại có : $\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$

Điều đó chứng tỏ AH là đường cao của hình chóp A.BCC'B'.

Trong Δ vuông cân ABC : $\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{3}AH.dt(BCC'B') = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}.\left(a.a\sqrt{2}\right) = \frac{a^3}{3}$ (ycbt).

c/ Gọi O là tâm hình chữ nhật BCC'B'. Ta có :

$$OB = OB' = OC = OC' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Trong tam giác vuông HOA $\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do OH là đường trung bình của tam giác BCC'.

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}CC' = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OA = OB = OB' = OC = OC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó O là tâm hình cầu đi qua năm điểm A', B, B', C, C' và thể tích V_c của hình cầu đó bằng:

$$V_c = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2} \text{ (ycbt).}$$

Bài 190 (ĐẠI HỌC KHOA HỌC KHỐI A – 1977)

Cho ΔABC đều cạnh a, nội tiếp trong một đường tròn tâm O chứa trong một mặt phẳng (P). Gọi D là điểm xuyên tâm đối của A trên đường tròn này, còn SD là một đoạn thẳng có chiều dài là a và vuông góc với (P).

1/ Chứng minh SAC và SAB là những tam giác vuông.

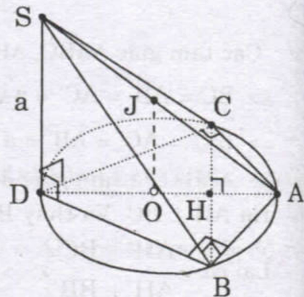
2/ Tính diện tích toàn phần của hình chóp SABC.

3/ Định tâm của hình cầu đi qua 5 điểm S, A, B, C, D.

Giải

1/ Ta có : D là xuyên tâm đối của A

$\Rightarrow \begin{cases} AD \perp BC \text{ (tại H)} \\ SD \perp (P) \text{ và } AB \perp BD \end{cases}$ (theo định lý 3 đường vuông góc)



$\Rightarrow AB \perp SB \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại B (đpcm).

Lý luận tương tự ta cũng có ΔSAC vuông tại C (đpcm).

2/ Gọi S_{tp} là diện tích toàn phần của hình chóp SABC, ta có :

$S_{tp} = dt(\Delta ABC) + dt(\Delta SAB) + dt(SAC) + dt(\Delta SBC)$

- $dt(\Delta ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- Trong ΔSDB

$\Rightarrow SB^2 = BD^2 + SD^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2$

$\Rightarrow SB^2 = \dfrac{3a^2}{9} + a^2 = \dfrac{12a^2}{9} \Rightarrow SB = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Nên : $dt(\Delta SAB) = \dfrac{1}{2}AB.SB = \dfrac{1}{2}a.SB.$

$\Rightarrow dt(\Delta SAB) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3} = dt(\Delta SAC)$

Xét : $SH^2 = HD^2 + SD^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + a^2 = \dfrac{3a^2}{36} + a^2 = \dfrac{39a^2}{36}$

$\Rightarrow SH^2 = \dfrac{39a^2}{36} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$

$\Rightarrow dt(\Delta SBC) = \dfrac{1}{2}BC.SH = \dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{39}}{6} = \dfrac{a^2\sqrt{39}}{12}$

Lúc đó : $S_{tp} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3} + \dfrac{a^2\sqrt{39}}{12} = \dfrac{a^2\sqrt{39}}{12}(11 + \sqrt{13})$ (ycbt).

3/ Để ý đến ba tam giác SAB, SAC, SAD chung cạnh SA và lần lượt vuông tại B, C, D nên năm điểm A, B, C, D, S nằm trên mặt cầu, bán kính $R = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2}}{2} = a$ và tâm của hình cầu là trung điểm I của đoạn SA (ycbt).

Bài 191 (ĐẠI HỌC KHỐI A – 1976)

Cho một tam diện ba mặt vuông Oxyz. Người ta lấy lần lượt trên Ox, Oy, Oz các điểm P, Q, R cùng khác điểm O. Gọi A, B, C theo thứ tự là điểm giữa của các đoạn PQ, QR, RP.

a/ Chứng minh rằng các mặt của khối tứ diện OABC là những tam giác bằng nhau.

b/ Cho OP = a, OQ = b, OR = c. Tính thể tích khối tứ diện OABC.

c/ Tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện OABC.

d/ Chứng minh rằng tồn tại một mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của khối tứ diện OABC. Tìm tâm mặt cầu đó.

e/ Chứng minh rằng nếu các góc nhị diện OA của khối tứ diện OABC là góc nhị diện vuông thì hai góc B và C của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức : $\tan\hat{B}.\tan\hat{C} = 2$ và ngược lại.

Giải

a/ Tính chất đường trung bình của tam giác.

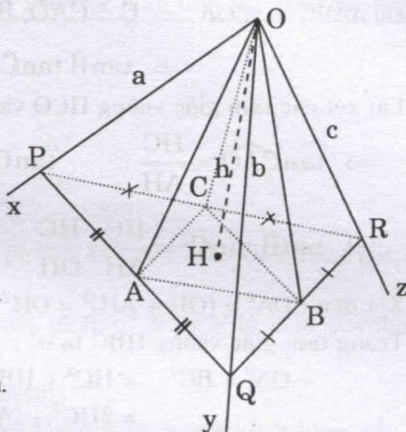
$\Rightarrow AB = \dfrac{PR}{2}$; $BC = \dfrac{PQ}{2}$; $AC = \dfrac{QR}{2}$

Do các tam giác POQ; QOR; ROP là vuông tại O:

$\Rightarrow OA = \dfrac{PQ}{2}$; $OB = \dfrac{QR}{2}$; $OC = \dfrac{PR}{2}$

$\Rightarrow$ OA = BC; OB = AC; OC = AB.

$\Rightarrow$ Các mặt của tam diện OABC bằng nhau (ycbt).



b/ Gọi H là chân đường cao của tứ diện OABC hạ từ O và h chính là đường cao của tứ diện OPQR hạ từ O.

Để ý 4 tam giác QAB, BCR, CBA, APC là bằng nhau.

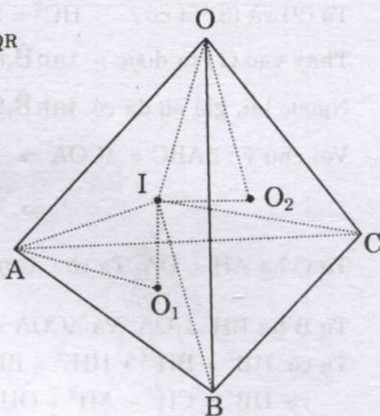
$\Rightarrow dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{4}.dt(\Delta PQR)$

$\Rightarrow V_{O.ABC} = \dfrac{1}{3}h.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3}.h.\dfrac{1}{4}.dt(\Delta PQR) = \dfrac{1}{4}V_{O.PQR}$

Mặt khác ta có thể tính thể tích tứ diện vuông OPQR là :

$V_{O.PQR} = \dfrac{1}{3}PO.\ dt(QOR) = \dfrac{1}{3}a.\dfrac{1}{2}bc = \dfrac{1}{6}abc$

$\Rightarrow V_{O.ABC} = \dfrac{1}{4}V_{O.PQR} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{6}abc = \dfrac{1}{24}abc$ (ycbt).



c/ Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.

Từ O_1 ta kẻ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và từ O_2 ta kẻ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (OBC) : đó là hai trục đường tròn (ABC) và (OBC).

Hai đường thẳng này cắt nhau tại I (vì chúng cùng nằm trong mặt phẳng trung trực của đoạn BC).

$\Rightarrow$ giao điểm I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC, (vì IA = IB = IC = IO = R).

d/ Từ I hạ IO_3, IO_4 lần lượt vuông góc với mặt phẳng (AOB) và (OAC).

$\Rightarrow$ O_3; O_4 thứ tự là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác AOB và ΔOAC.

Vì bốn tam giác OAB, OBC, OAC, ABC bằng nhau nên các đường tròn ngoại tiếp chúng cùng bán kính R_1.

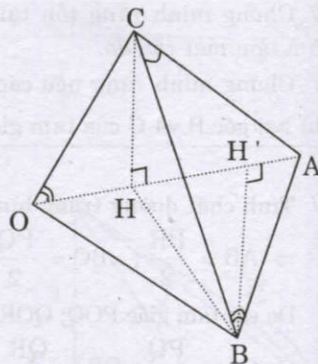
Xét tam giác vuông IO_1A và IO_2O ta có : $\begin{cases} IA = IO = R \\ O_1A = O_2O = R_1 \end{cases} \Rightarrow IO_1 = IO_2$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có : $IO_3 = IO_1$; $IO_4 = IO_2$

$\Rightarrow IO_1 = IO_2 = IO_3 = IO_4 = r$ (tính chất bắc cầu)

$\Rightarrow$ I chính là tâm mặt cầu tiếp xúc với bốn mặt của tứ diện OABC (tâm mặt cầu nội tiếp) (đpcm).

e/ Với điều kiện ban đầu góc nhị diện cạnh OA là vuông.



Hạ từ C : $CH \perp OA \Rightarrow CH \perp (AOB)$.

Nối HB ta có $CH \perp HB$

$\Rightarrow \Delta HBC$ vuông tại H.

Hạ từ B : $BH' \perp OA \Rightarrow BH' = CH$, và $OH = BH'$.

Do $\Delta ABC = \Delta COA \Rightarrow \hat{C} = \widehat{CAO}; \hat{B} = \widehat{COA}$

$\Rightarrow \tan\hat{B}.\tan\hat{C} = \tan\widehat{COA}.\tan\widehat{CAO}$

Lại xét các tam giác vuông HCO và HCA ta có :

$\Rightarrow \tan\widehat{CAO} = \dfrac{HC}{AH}$; $\tan\widehat{COA} = \dfrac{HC}{OH}$

$\Rightarrow \tan\hat{B}.\tan\hat{C} = \dfrac{HC}{AH}.\dfrac{HC}{OH} = \dfrac{HC^2}{AH.OH}$ (1)

Xét đến : $OA^2 = (OH + AH)^2 = OH^2 + AH^2 + 2AH.OH$ (2)

Trong tam giác vuông HBC ta có :

$OA^2 = BC^2 = HC^2 + HB^2 = HC^2 + H'B^2 + HH'^2$

$= 2HC^2 + (AH - OH)^2$

$= 2HC^2 + AH^2 + OH^2 - 2OH.AH$ (3)

Từ (2) và (3) ta có : $HC^2 = 2AH.OH$

Thay vào (1) ta được : $\tan\hat{B}.\tan\hat{C} = 2$

Ngược lại, giả sử đã có $\tan\hat{B}.\tan\hat{C} = 2$

Với chú ý : $\Delta ABC = \Delta COA \Rightarrow \hat{B} = \widehat{COA}; \hat{C} = \widehat{CAO}$

$\Rightarrow \tan\widehat{COA}.\tan\widehat{CAO} = 2.$

Từ C hạ $AH \perp OA$. Ta có : $\tan\widehat{COA} = \dfrac{CH}{OH}$; $\tan\widehat{CAO} = \dfrac{CH}{AH}$

Từ B hạ $BH' \perp OA$. Và $\Delta COA = \Delta BAO : \Rightarrow CH = BH'$; $OH = AH'$.

Ta có: $HB^2 = BH'^2 + HH'^2 = BH'^2 + (AH - OH)^2$

$\Rightarrow HB^2 = CH^2 + AH^2 + OH^2 - 2AH.OH = AH^2 + OH^2$

$\Rightarrow CH^2 + HB^2 = CH^2 + AH^2 + OH^2$

Mặt khác ta có: $BC^2 = OA^2 = (OH + HA)^2$

$\Rightarrow BC^2 = AH^2 + OH^2 + 2AH.OH = AH^2 + OH^2 + CH^2$

Tóm lại ta có: $BC^2 = CH^2 + HB^2$

$\Rightarrow \Delta HBC$ vuông tại H $\Leftrightarrow CH \perp BH$.

Ta đã có $CH \perp OA \Rightarrow CH \perp (OAB) \Rightarrow (COA) \perp (AOB)$

$\Leftrightarrow$ nhị diện (OA) là nhị diện vuông (đpcm).

Bài 192 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM HỆ 4 NĂM – KHỐI A – 1976)

Trong một mặt phẳng (P) người ta cho một tam giác vuông cân ABC với AB = AC = a. Bu và Cv là những nửa đường thẳng góc với (P) tại B và C và ở cùng một phía đối với (P). Trên Bu và Cv người ta lần lượt lấy những điểm M và N di động sao cho tam giác AMN vuông góc tại M. Đặt : RM = x và CN = y.

1/ Hãy tính y khi x = a; tính diện tích tam giác AMN, suy ra cosin của góc nhọn hợp bởi mặt phẳng (AMN) với (P).

2/ I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng góc AMI là góc phẳng của nhị diện có cạnh là MN và có các mặt phẳng BMNC và AMN. Tính giá trị của góc này khi x = a.

3/ Chứng minh :

a/ Bốn điểm C, I, M, N cùng nằm trên vòng tròn.

b/ Năm điểm A, C, I, M, N cùng nằm trên một mặt cầu. Hãy xác định tâm của hình cầu này.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải và đáp số như sau :

1/ $y = 2a$; $dt(\Delta AMN) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$; 2/ $= 30^0$.

Bài 193 (ĐẠI HỌC KT – TC – KT – SP TP.HCM – KHỐI A – 1979)

Cho hình chóp V.ABC có các mặt bên hợp với mặt phẳng đáy ABC thành những góc nhị diện bằng nhau có góc phẳng là φ.

1/ Chứng minh rằng chân của đường cao hình chóp xuất phát từ đỉnh V là tâm của đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC.

2/ Tìm điểm O cách đều các mặt bên và mặt đáy hình chóp.

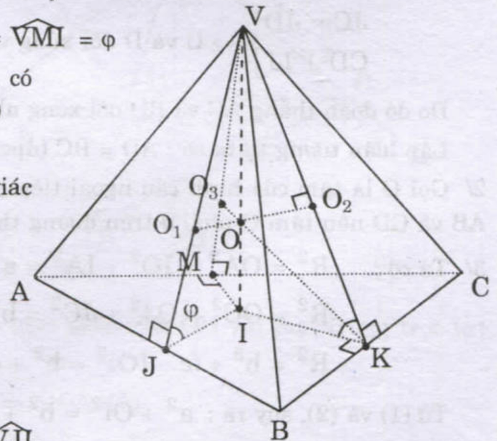
3/ Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC và R là bán kính hình cầu nội tiếp trong hình chóp V.ABC, tính R theo r và φ.

Giải

1/ Gọi $\begin{cases} \text{I là hình chiếu của V xuống (ABC)} \\ \text{J, K, M là hình chiếu của V lên các cạnh AB, BC, CA.} \end{cases}$

Theo định lý 3 đường vuông góc, ta có : $\left.\begin{matrix} VI \perp (ABC) \\ VJ \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow IJ \perp AB$

Tương tự, $IK \perp BC$ và $IM \perp AC \Rightarrow \widehat{VJI} = \widehat{VKI} = \widehat{VMI} = \varphi$



Ba tam giác vuông VIJ, VIK, VIM bằng nhau (vì có chung cạnh góc vuông VI và có góc nhọn φ bằng nhau)

⇒ IJ = IK = IM.

Vậy I là tâm của đường tròn nội tiếp của tam giác ABC (đpcm).

2/ Giả sử đã tìm được điểm O cách đều 4 mặt của hình chóp V.ABC. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là hình chiếu của O trên các mặt (VAB), (VBC), (VCA) theo thứ tự đó.

Ta có : $OI = OO_1 = OO_2 = OO_3$.

$OI = OO_1 \Rightarrow$ O ở trên phân giác của $\widehat{VJI}$.

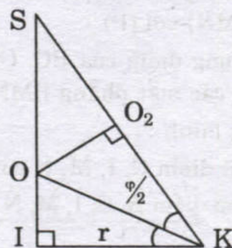
$OI = OO_2 \Rightarrow$ O ở trên phân giác của $\widehat{VKI}$.

$OI = OO_3 \Rightarrow$ O ở trên phân giác của $\widehat{VMI}$.

Vậy chỉ cần O là chân đường phân giác của $\widehat{VJI}$ là đủ (ycbt).

3/ Tính R theo r và φ.

Ta có : $R = OO_2$; $IJ = IK = IM = r$.



Trong $\Delta OO_2K \Rightarrow OO_2 = OK\sin\dfrac{\varphi}{2}$ (3)

Trong $\Delta OIK \Rightarrow OK = \dfrac{IK}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}$ (4)

Thay (4) vào (3), ta có : $OO_2 = IK\dfrac{\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}} = r\tan\dfrac{\varphi}{2}$

Vậy : $R = r\tan\dfrac{\varphi}{2}$ (ycbt).

Bài 194 (ĐẠI HỌC Y – NHA – DƯỢC – QUÂN Y TP.HCM – 1980)

Trong không gian cho một đoạn thẳng IJ. Trên một đường thẳng d vuông góc với IJ và đi qua I; lấy về hai phía của I hai điểm A, B với AI = IB = a; trên một đường thẳng (d') vuông góc với IJ và đi qua J; lấy về hai phía của J hai điểm C, D với CJ = JD = b. Các đường thẳng (d) và (d') không nằm trong cùng một mặt phẳng.

1/ Chứng minh rằng : AC = BD và AD = BC.

2/ Chứng minh rằng tâm của hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nằm trên đường thẳng IJ.

3/ Tính bán kính R của hình cầu trên theo a, b và c = IJ.

Giải

1/ Ta có : $\left.\begin{array}{l} AI = IB \\ AB \perp IJ \end{array}\right\} \Rightarrow$ A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng IJ.

$\left.\begin{array}{l} JC = JD \\ CD \perp IJ \end{array}\right\} \Rightarrow$ C và D đối xứng với nhau qua đường thẳng IJ.

Do đó đoạn thẳng AC và BD đối xứng nhau qua IJ, suy ra AC = BD (đpcm).

Lập luận tương tự ta có : AD = BC (đpcm).

2/ Gọi O là tâm của hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Vì IJ là một đường trung trực của cả AB và CD nên tâm O phải ở trên đường thẳng IJ.

3/ Ta có :

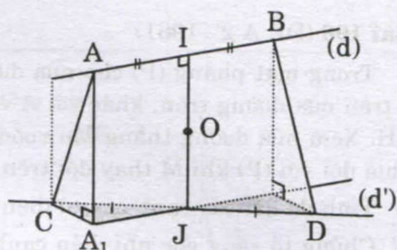
$$R^2 = OA^2 = IO^2 + IA^2 = a^2 + OI^2 \quad (1)$$

$$R^2 = OC^2 = OJ^2 + JC^2 = b^2 + (IJ - OI)^2$$

$$R^2 = b^2 + (c - IO)^2 = b^2 + c^2 + OI^2 - 2c.OI \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra : $a^2 + OI^2 = b^2 + c^2 + OI^2 - 2c.OI$

$\Rightarrow OI = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.



Thay $OI = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$ vào (1)

$\Rightarrow R^2 = a^2 + \left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2$

Vậy : $R = \dfrac{1}{2c}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2}$ (đpcm).

Bài 195 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM – NÔNG NGHIỆP – TỔNG HỢP – KHỐI B – 1981)

Cho góc tam diện Oxyz với các góc phẳng ở đỉnh $\widehat{xOy} = 60^0$; $\widehat{yOz} = 90^0$; $\widehat{zOx} = 120^0$. Trên Ox, Oy, Oz lấy các điểm A, B, C với OA = OB = OC = a.

a/ Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

b/ Chứng minh rằng trung điểm H của đoạn AC là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng ABC. Từ đó suy ra thể tích của tứ diện OABC.

c/ Xác định tâm I và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Giải

a/ Ta có : $\begin{cases} \Delta AOB \text{ cân} \Rightarrow \Delta AOB \text{ đều} \Rightarrow AB = a \\ \Delta BOC \text{ vuông cân} \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \\ \Delta AOC \Rightarrow AC = a\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3a^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B (đpcm).

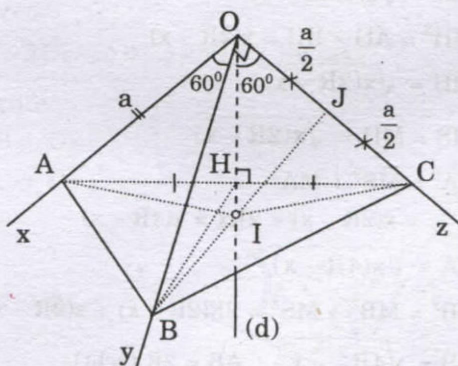
b) Để ý : $OH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{a}{2}$; $BH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow OH \perp HB$.

Từ : $\left.\begin{matrix} OH \perp HB \\ OH \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ H là hình chiếu của O xuống mp(ABC).

Lúc đó thể tích V của hình chóp OABC là :



$V_{OABC} = \dfrac{1}{3}\,dt\,(\Delta ABC) \times OH$

$= \dfrac{1}{6} AB \times BC \times OH$

$\Rightarrow V = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$ (ycbt).

c) OH là trục (d) của ΔABC.

Tâm I của hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là giao điểm của OH với mặt trung trực (α) của OC.

Ta có: IO = IA = IC $\Rightarrow \Delta IOC$ cân có $\widehat{AOI} = 60^0 \Rightarrow \Delta IOA$ đều.

$\Rightarrow$ IO = IA = IC = a = R (bán kính hình cầu) (ycbt).

Bài 196 (ĐỀ A 2 –1981)

Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Giả sử M là một điểm tuỳ ý trên nửa đường tròn, khác với A và B. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AB, đặt x = AH. Xem nửa đường thẳng Mu vuông góc với (P) tại M, giả thiết Mu luôn luôn ở về cùng một phía đối với (P) khi M thay đổi trên Mu lấy điểm S với SM = MH.

a/ Tính độ dài các cạnh của tứ diện SABM.

b/ Chứng tỏ rằng góc nhị diện cạnh AB tạo bởi các mặt phẳng (P) và (SAB) có giá trị không đổi khi M thay đổi.

c/ Xác định vị trí tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABM Tính bán kính hình cầu ấy theo R và x. Với giá trị nào của x thì bán kính ấy có giá trị lớn nhất ?

Giải

(Xem Đề ĐẠI HỌC SP – KT – KT – NN – KHỐI A – 1982)

Bài 197 (ĐẠI HỌC SP – KT – KT – NN – KHỐI A – 1982)

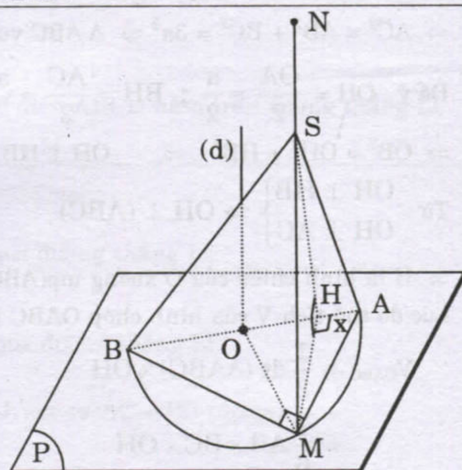
Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Giả thử M là một điểm tùy ý trên nửa tròn, khác với A và B, gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB, đặt AH = x. Xem nửa đường thẳng MN vuông góc với (P) tại M. Giả thiết MN luôn luôn ở về cùng một phía đối với (P) khi M thay đổi, trên MN lấy điểm S với SM = MH.

a/ Tính độ dài các cạnh của tứ diện SAMB.

b/ Chứng tỏ rằng góc nhị diện cạnh AB tạo nên bởi các mặt phẳng (P) và (SAB) có giá trị không đổi khi M thay đổi.

c/ Xác định vị trí tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABM. Tính bán kính hình cầu ấy theo R và x. Với giá trị nào của x thì bán kính ấy có giá trị lớn nhất ?

Giải



a/ Hệ thức lượng trong tam giác cho :

$AM^2 = AH \times AB = 2Rx \Rightarrow AM = \sqrt{2Rx}$

$BM^2 = BH \times AB = 2R(2R - x)$

$\Rightarrow BM = \sqrt{2R(2R - x)}$

$MH^2 = AH \times BH = x(2R - x)$

$\Rightarrow MH = \sqrt{x(2R - x)}$

$\Rightarrow MS = MH = \sqrt{x(2R - x)}$

$SA^2 = MS^2 + MA^2$

$= x(2R - x) + 2Rx = x(4R - x)$

$\Rightarrow SA = \sqrt{x(4R - x)}$

$SB^2 = MB^2 + MS^2 = 2R(2R - x) + x(2R - x) = 4R^2 - x^2$

$\Rightarrow SB = \sqrt{4R^2 - x^2}$; AB = 2R (ycbt).

b/ Góc nhị diện tạo bởi (P) và (SAB) không đổi.

$\left.\begin{matrix} SM \perp (P) \\ MH \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow SH \perp AB$ (định lý 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow \varphi = [\widehat{CD; (SAB)}] = (\widehat{AB}) = \widehat{SHM}$ (ΔSMH vuông cân)

$\Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4} = \text{const}$ (ycbt).

c/ Trục của ΔAMB là đường thẳng (d) ⊥ (P) tại O (trung điểm AB).

Lúc đó tâm I của hình cầu ngoại tiếp tứ diện SAMB là giao điểm I của (d) và mặt phẳng trung trực (α) của SM.

Bán kính R_1 của mặt cầu là : $IA = IB = IM = IS = R_1$

$$R_1^2 = IM^2 = IO^2 + OM^2 = \frac{MS^2}{4} + R^2$$

$$R_1^2 = \frac{x(2R - x)}{4} + R^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{x + 2R - x}{2}\right)^2 + R^2$$

$$\Rightarrow R_1^2 \leqslant \frac{5R^2}{4} \qquad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra ⇔ x = 2R – x ⇔ x = R

Vậy x = R thì $\max R_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}R$ (ycbt).

Bài 198 (ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC – TỔNG HỢP – NÔNG NGHIỆP – 1984)

Cho ba nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz không cùng nằm trong một mặt phẳng và một điểm A nằm trên Oz. Hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (Oxy), Ox, Oy lần lượt là A', B, C.

1/ Chứng minh rằng nếu $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \alpha$, thì OA' là đường phân giác của $\widehat{xOy}$ và BC là trực giao với OA.

2/ Cho biết $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \alpha$ ($45^0 < \alpha < 90^0$) và $\widehat{xOy} = 90^0$. Gọi β là góc hợp bởi đường thẳng Oz và mặt phẳng (Oxy); γ là góc nhọn hợp bởi mặt phẳng (ABC) và (Oxy). Tìm hệ thức giữa tanβ và tanγ; giữa cosβ và cosα. Suy ra biểu thức của tanγ theo tanα. Tính β nếu $\alpha = 60^0$.

3/ Cùng giả thiết như ở phần 2, hãy xác định tâm của hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC và xác định tiếp diện của hình cầu này tại A. Cho biết OA = a và $\alpha = 60^0$. Hãy tính diện tích thiết diện của mặt phẳng (ABC) với hình cầu trên.

4/ Mệnh đề "Nếu BC trực giao với OA thì $\widehat{xOz} = \widehat{yOz}$" có đúng không ? Tại sao ?

Giải

1/ Theo định lý ba đường vuông góc ⇒ $\begin{cases} A'B \perp Ox \\ A'C \perp Oy \end{cases}$

ΔAOB = ΔOAC

⇒ AB = AC và OB = OC

Hai đường xiên AB = AC có hai hình chiếu A'B = A'C tương ứng.

⇒ Điểm A' nằm cách đều 2 cạnh của $\widehat{xOy}$.

⇒ A' nằm trên đường phân giác At của góc đó.

⇒ OA' là đường phân giác của $\widehat{xOy}$ (đpcm).

Để ý ΔOBC cân, có OA' là đường phân giác ⇒ OA' ⊥ BC.

Mà : AA' ⊥ (OBC) ⇒ AA' ⊥ BC.

⇒ BC ⊥ (OAA') và OBA'C là hình vuông. ⇒ BC ⊥ OA

2/ Ta có : $\begin{cases} \widehat{AHA'} = \gamma = \widehat{[(ABC); (xOy)]} \\ \widehat{AOA'} = \beta = [Oz; (xOy)] \end{cases}$; còn $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \alpha$

Nên $\begin{cases} \Delta AOA' \Rightarrow AA' = OA'.\tan\beta & (1) \\ \Delta AHA' \Rightarrow AA' = HA'\tan\gamma = \dfrac{1}{2}.OA'.\tan\gamma & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ⇒ $\frac{1}{2}OA'\tan\gamma = OA'\tan\beta$ hay $\tan\gamma = 2\tan\beta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta AOB \Rightarrow OB = OA.\cos\alpha & (3) \\ \Delta AOA' \Rightarrow OA' = OA.\cos\beta & (4) \end{cases}$$

⇒ $OA' = OB\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông OBA'C)

Kết hợp với (3) và (4) : $OA\cos\beta = \sqrt{2}\,OA.\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\beta = \sqrt{2}\cos\alpha$

α, β là hai góc nhọn nên ⇒ $\tan\gamma = 2\tan\beta$

$\Rightarrow \tan^2\gamma = 4\tan^2\beta = 4\left(\dfrac{1}{\cos^2\beta} - 1\right) = \dfrac{4}{2\cos^2\alpha} - 4 = 2(1 + \tan^2\alpha) - 4$

$\Leftrightarrow \tan^2\gamma = 2(\tan^2\alpha - 1)$ vì $45^0 < \alpha < 90^0$

⇒ $\tan\alpha > 1$, vì γ là góc nhọn ⇒ $\tan\gamma > 0$

⇒ $\tan\gamma = \sqrt{2(\tan^2\alpha - 1)}$ (ycbt).

Nếu $\alpha = 60^0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{2}\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45^0$ (ycbt).

3/ Xét : $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$, nên B, C nằm trên mặt cầu đường kính OA. Vậy tâm của hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là trung điểm I của OA.

Ta biết tiếp diện của hình cầu tại điểm A là mặt phẳng (T) vuông góc với đường kính OA tại A. Do đó thiết diện được xác định như sau :

Qua A vẽ mặt phẳng vuông góc với Oz, cắt Ox tại B', cắt Oy tại C'.

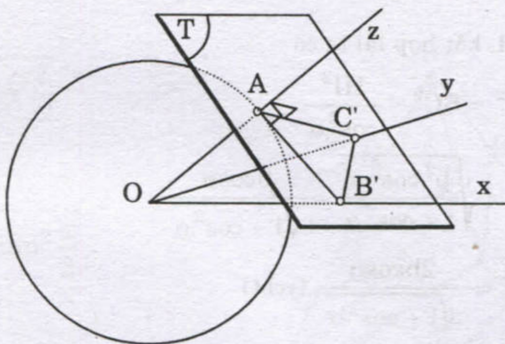
Mặt phẳng (T) ≡ (AB'C') ⊥ OA tại A nên nó là tiếp diện phải xác định (ycbt).

Mặt phẳng (ABC) cắt hình cầu theo hình tròn (P) ngoại tiếp ΔABC.

Nếu OA = a và $\alpha = 60^0 \Rightarrow \begin{cases} OB = OC = \dfrac{a}{2} \\ BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, AB = AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Gọi M là trung điểm AB. Kẻ đường trung trực của cạnh AB trong tam giác cân ABC nó cắt đường cao HA tại J thì JA là bán kính hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\Delta AJM \backsim \Delta ABH \Rightarrow \dfrac{AJ}{AB} = \dfrac{AM}{AH} \Rightarrow AJ = \dfrac{AB^2}{2AH}$ (3)



$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{10a^2}{16} \quad \Rightarrow \quad AH = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Thay vào (3) $\Rightarrow$ $AJ = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4}}{\dfrac{2a\sqrt{10}}{4}} = \dfrac{3a}{2\sqrt{10}}$

Diện tích thiết diện : $S = \pi.AJ^2 = \dfrac{9\pi a^2}{40}$ (ycbt).

4/ $\widehat{OBA'} = \widehat{OCA'} = 90^0$ nên tứ giác OBA'C nội tiếp trong hình tròn đường kính OA'. Nếu $BC \perp OA$ và theo trên $BC \perp AA'$ thì $BC \perp (OAA')$ tức là $BC \perp OA'$. Trong hình tròn đường kính OA' có dây $BC \perp OA'$ nên OA' cắt BC tại trung điểm H của BC. Rõ ràng OA' là đường trung trực của BC nên OB = OC. Hai tam giác vuông OAB và OAC có OA chung. OB = OC nên chúng bằng nhau.

Suy ra : $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$ hay $\widehat{xOz} = \widehat{yOz}$.

Vậy mệnh đề : "BC trực giao với OA thì $\widehat{xOz} = \widehat{yOz}$. là đúng" (ycbt).

Bài 199 (ĐỀ BÁCH KHOA – KIẾN TRÚC – TỔNG HỢP TP.HCM – 1985)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đỉnh là S; cạnh bên là b; mặt bên hợp với đáy góc α.

1/ Tính cạnh đáy, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

2/ Trong trường hợp tâm của hình cầu nội tiếp trùng với tâm của hình cầu ngoại tiếp hình chóp hãy chứng minh : $\cos\alpha = \sqrt{2} - 1$

3/ Cho biết $\cos\alpha = \sqrt{2} - 1$; và gọi φ là góc hợp với cạnh bên và mặt đáy.

a/ Tính $\tan\varphi$.

b/ Trình bày đầy đủ cách dựng thiết diện tạo bởi một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh A, song song với đường chéo BD và hợp với cạnh AB một góc 30^0.

Giải

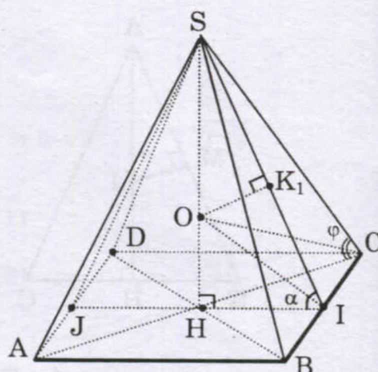
1/ Gọi I là trung điểm cạnh đáy BC $\Rightarrow$ $\widehat{SIH} = \alpha$.

Trong tam giác vuông SHI $\Rightarrow$ $HI = SI.\cos\alpha$.

Mặt khác : $SI \perp BC$ và trong tam giác vuông SIC ta có :

$$IC^2 = SC^2 - SI^2.$$

Vì IC = IH, kết hợp lại ta có :



$$HI^2 = SC^2 - \frac{HI^2}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow HI = \sqrt{\frac{b^2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}} = \frac{b\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

Từ đó : $BC = \dfrac{2b\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$ (ycbt)

Ta có : $SI = \dfrac{HI}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$

Ta gọi diện tích toàn phần của hình chóp là S_{tp} thì :

$$S_{tp} = 4dt(\Delta SBC) + dt(ABCD) = 4.\frac{1}{2}.SI.BC + BC^2$$

$$\Rightarrow S_{tp} = 4.\frac{b}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}.\frac{b\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}} + \left(\frac{2b\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{\cos\alpha(4+4\cos\alpha)b^2}{1+\cos^2\alpha} \text{ (ycbt)}$$

Trong tam giác vuông SHI $\Rightarrow$ $SH = SI.\sin\alpha = \dfrac{b\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$

Vậy : $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SHdt(ABCD) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4b^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{(1+\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$ (ycbt).

2/ Giả sử O là tâm hình cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình chóp, và K_1 là chân đường cao hạ từ O tới (SBC) $\Rightarrow K_1 \in SI$.

Theo giả thiết : $\begin{cases} OH = OK, OS = OC \\ \widehat{OIH} = \dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$

Xét tam giác vuông OHI $\Rightarrow$ $OH = HI.\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

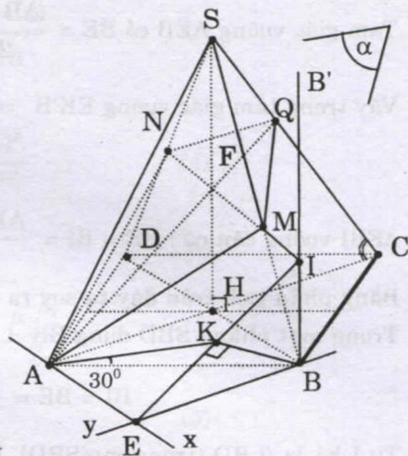
Xét tam giác vuông OHC $\Rightarrow$ $OC = \sqrt{OH^2 + HC^2}$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{HI^2\tan^2\frac{\alpha}{2} + 2HI^2} = HI\sqrt{2+\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Từ đó : $SH = SO + OH = OC + OH = HI\left(\tan\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{2+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)$ (1)

Lại xét tam giác vuông SHI và (1).

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{SH}{HI} = \tan\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$



$$\Leftrightarrow \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2}.\left(\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \sqrt{2+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan^4\frac{\alpha}{2} + 2\tan^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2\frac{\alpha}{2} = -1+\sqrt{2} \\ \tan^2\frac{\alpha}{2} = -1-\sqrt{2} < 0 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}-1$$

Mặt khác $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} - 1$ (đpcm).

3a/ Ta có : $\widehat{SCH} = \varphi$. Mặt khác theo (1), thì :

$$SH = HI\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (2)$$

mà $HC = HI.\sqrt{2}$ (3)

Lấy $\dfrac{(2)}{(3)} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SH}{HC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\tan\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{2+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)$ (4)

Với giả thiết $\cos\alpha = \sqrt{2} - 1$, đã có được : $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}+1}\right) \text{ (ycbt).}$$

b/ Giả sử thiết diện của mp(α) và hình chóp S.ABCD đã dựng được.

Vì $(\alpha) \,//\, BD \Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = MN \,//\, BD$

Mặt khác nếu gọi K' là chân đường vuông góc hạ từ B xuống (α)

$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{K'AB} = 30^0 \\ BK' \perp MN \end{cases}$ mà $BD \,//\, MN \Rightarrow BK' \perp BD$

$\Rightarrow$ BK' nằm trên mặt phẳng vuông góc với BD. Gọi đó là mặt phẳng (BB'y).

Giả sử $MN \cap BB' = I$; $By \cap Ax = E \Rightarrow (\alpha) \cap (BB'E) = IE$ và $K' \in IE$

Tam giác vuông AK'B có $\widehat{K'AB} = 30^0 \Rightarrow K'B = \dfrac{1}{2}AB$

Tam giác vuông AEB có $BE = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2}$

Vậy trong tam giác vuông EK'B $\Rightarrow EK' = \sqrt{EB^2 - BK'^2} = \dfrac{AB}{2} = K'B$

$\Rightarrow \Delta BK'E$ vuông cân có $\widehat{BEK'} = 45^0$

ΔEBI vuông cân có : $BE = BI = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2}$.

Bằng phân tích trên đây ta suy ra cách dựng như sau :

- Trong mặt phẳng SBD dựng BB' $\perp$ BD, trên BB' lấy điểm I sao cho:

$$BI = BE = \frac{AB\sqrt{2}}{2}.$$

Từ I kẻ Iz // BD (trong mp(SBD), Iz cắt SB, SD tương ứng tại M, N và cắt SH ở F. Nối A với F (trong (SAC), AF cắt SC tại Q. Tứ giác AMQN là thiết diện cần dựng.

- Để ý thấy với giả thiết đã cho, thiết diện luôn luôn dựng được. Thực vậy điều đó tương đương với FH < SH. Nhưng ta đã có :

$$\begin{cases} SH = \dfrac{1}{2}AB\left(\sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}+1}\right) \\ FH = BI = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow FH < SH \text{ (ycbt).}$$

Bài 200 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM – 1988)

Cho một hình chóp tam giác đều D.ABC có cạnh đáy a, các mặt bên nghiêng với đáy một góc α.

a/ Tính các diện tích s và S của các mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp với hình chóp và diện tích toàn phần S_{tp} của hình chóp theo a và α.

b/ Biểu diễn S_{tp} theo s và S.

Giải

a/ Gọi E là trung điểm của BC. Gọi H là trọng tâm ΔABC.

$\Rightarrow$ DH là đường cao hình chóp và $\widehat{AED} = \alpha$.

Gọi O, I, r, R lần lượt là tâm và bán kính các mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình chóp. Do tính đối xứng của hình chóp đều nên dễ thấy O và I $\in$ DH.

Để ý thấy: $\widehat{HEO} = \widehat{OED} = \dfrac{\alpha}{2}$; IA = ID = R

$$\Rightarrow r = OH = HE.\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.\tan\frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

$$\text{Vậy : } s = 4\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{3}\tan^2\frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

Ta có: $DH = HE\tan\alpha = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}\tan\alpha$

$\Delta HIA \Rightarrow IA^2 = AH^2 + IH^2 = AH^2 + (DH - DI)^2$

hay : $R^2 = \left(\dfrac{a}{2\sqrt{3}}\tan\alpha - R\right)^2 + \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow R = \dfrac{a(\tan^2\alpha + 4)}{4\sqrt{3}\tan\alpha}$ (3)

Vậy diện tích S_R của mặt cầu ngoại tiếp.

Vậy: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\dfrac{a^2(\tan^2\alpha + 4)^2}{48\tan^2\alpha} = \dfrac{\pi a^2(\tan^2\alpha + 4)^2}{12\tan^2\alpha}$ (4)

Mặt khác : $DE = \dfrac{HE}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 3S_{DBC} + S_{ABC} = 3.\frac{1}{2}a.DE + \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow S_{tp} = \dfrac{a^2\sqrt{3}(1 + \cos\alpha)}{4\cos\alpha}$ (5)

b/ Từ (2) ta có : $a^2 = \dfrac{3S}{\pi\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$. Thay vào (5) ta được :

$\overset{(5)}{\Rightarrow} S_{tp} = \dfrac{3\sqrt{3}s(1 + \cos\alpha)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{4\sin^2\dfrac{2}{\alpha}\cos\alpha} = \dfrac{3\sqrt{3}s}{4\pi}.\dfrac{(1 + \cos\alpha)^2}{\cos\alpha(1 - \cos\alpha)}$ (6)

Từ (1) đến (4) suy ra :

$$\sqrt{\frac{S}{s}} = \frac{R}{r} = \frac{2a(\tan^2\alpha + 4)\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\tan\alpha.a.\tan\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1 + 3\cos^2\alpha}{2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{S}{s}} = \frac{1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{S}{s}} = \frac{(1 + \cos\alpha)^2 - 2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)}{2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)} = \frac{(1 + \cos\alpha)^2}{2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)} - 1$$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{\dfrac{S}{s}} = \dfrac{(1 + \cos\alpha)^2}{2\cos\alpha(1 - \cos\alpha)}$ (7)

Từ (6) và (7), ta có : $S_{tp} = \dfrac{3\sqrt{3}s}{2\pi}\left(1 + \sqrt{\dfrac{S}{s}}\right)$ (ycbt).

Bài 201 (ĐẠI HỌC NÔNG LÂM TP.HCM – 1991)

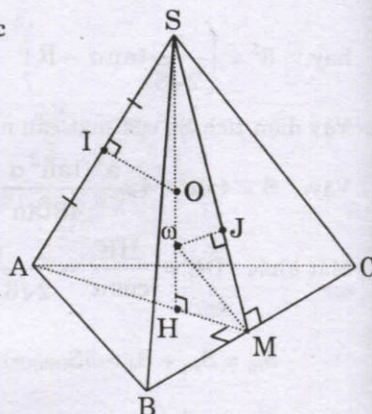
> Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy là a, đường cao SH = h.
>
> 1/ Tính a theo h và bán kính r, R của mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp của hình chóp.
>
> 2/ Khi a cố định và h thay đổi, xác định h để tỉ số $\dfrac{r}{R}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

1/ Gọi H là trực tâm (hoặc trọng tâm) ΔABC

$\Rightarrow$ SH = h là đường cao của hình chóp S.ABC.

Do hình chóp đều nên các tâm ω và O lần lượt của các mặt cầu nội, ngoại tiếp đều nằm trên SH.



Ta có : $\left.\begin{matrix} SH \perp (ABC) \\ AH \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SM \perp BC$

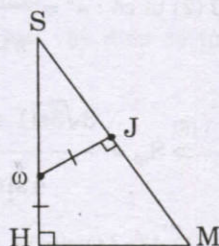
$BC \perp SH$ và $BC \perp SM \Rightarrow BC \perp (SAM)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$ nên từ ω hạ $\omega J \perp SM$

thì $\omega J \perp (SBC)$.

Do $\omega H = \omega J = r$ nên ω là giao điểm của SH và đường phân giác của $\widehat{AMS}$.

$\Delta S\omega J \backsim \Delta SMH \Rightarrow \dfrac{\omega J}{HM} = \dfrac{S\omega}{SM} = \dfrac{SH - \omega H}{SM}$



$$\Rightarrow r = \frac{(h-r)}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}}.\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{h-r}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 12h^2} + a} \text{ (ycbt).}$$

Trong tam giác SAM, trung trực cạnh SA gặp SH tại O :

$$\Delta SIO \backsim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SI}{SH} = \frac{SA}{2SH}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{9h^2 + 3a^2}{18h} = \frac{3h^2 + a^2}{6h} \Leftrightarrow R = \frac{3h^2 + a^2}{6h} \text{ (đpcm).}$$

2/ Xét : $y = \dfrac{r}{R} = \dfrac{6ah^2}{(a^2 + 3h^2)(a + \sqrt{a^2 + 12h^2})}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6\frac{h^2}{a^2}}{(1 + 3\frac{h^2}{a^2})(1 + \sqrt{1 + 12\frac{h^2}{a^2}})}$$

Đặt : $12\dfrac{h^2}{a^2} = \tan^2 x \Rightarrow \tan x = 2\sqrt{3}\dfrac{h}{a} \Rightarrow h = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}\tan x > 0$

Lúc đó : $y = \dfrac{2\tan^2 x}{(4 + \tan^2 x)(1 + \sqrt{1 + \tan^2 x})}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\left(4 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)} = \frac{2\sin^2 x \cos x}{(1 + 3\cos^2 x)(1 + \cos x)}$$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{2\cos x(1 - \cos x)}{1 + 3\cos^2 x}$; $\forall x$

$\Leftrightarrow g(x) = (3y + 2)\cos^2 x - 2\cos x + y = 0; \forall x$ (5)

* Do $y > 0$ nên $3y + 2 > 0; \forall y > 0$

* Phương trình (5) có nghiệm cần có $\Delta_g \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y(3y + 2) = -3y^2 - 2y + 1 \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq \dfrac{1}{3} \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < y \leq \dfrac{1}{3}$$

Vậy : $\max(y) = \dfrac{1}{3}$ xảy ra khi (5) có nghiệm kép.

$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{3y + 2} = \dfrac{1}{3.\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2} = \dfrac{1}{3} \in (0; 1)$ (nhận)

Từ : $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; với $\cos x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \tan^2 x = 9 - 1 = 8$

Lúc đó : $\tan x = 2\sqrt{2} \Rightarrow h = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}.2\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy chọn : $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ thì $\max(y) = \max\left(\dfrac{r}{R}\right) = \dfrac{1}{3}$ (ycbt).

Bài 202 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP TP.HCM – KHỐI D – 1991)

Cho ABCD là hình thang cân trong mặt phẳng (P) với hai đáy AB và CD thỏa AB = 4CD. Hình tròn tâm O bán kính a nội tiếp trong hình thang ABCD lần lượt tại M, N, P, Q.

1/ Tính độ dài bốn cạnh và diện tích của hình thang ABCD theo a.

2/ Lấy điểm S thỏa $SO \perp (P)$ và SO = 2a. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp S.ABCD theo a.

3/ Chứng minh O cách đều bốn mặt bên của hình chóp S.ABCD. Từ đó xác định tâm và bán kính (theo a) của mặt cầu nội tiếp trong hình chóp

Giải

1/ Tính độ dài các cạnh và diện tích hình thang cân ABCD :

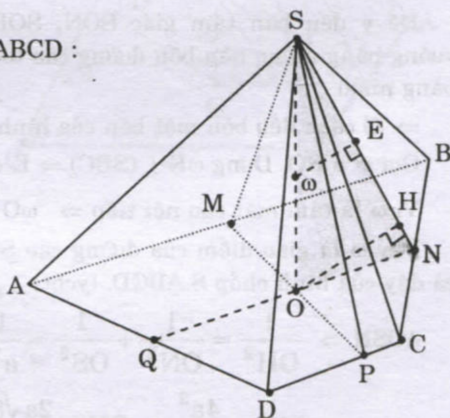
Đặt PC = x $\Rightarrow$ MB = 4x

Dựng $CC' \perp AB$ thì MPCC' là hình chữ nhật nên :

MC' = x $\Rightarrow$ C'B = 3x.

Theo tính chất tiếp tuyến ở ngoài đường tròn thì:

$\left.\begin{array}{l} CN = CP = x \\ BN = BM = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow BC = BN + NC = 5x$

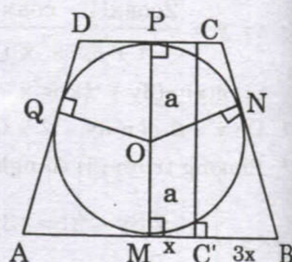


$\Delta C'CB \quad \Rightarrow BC^2 = BC'^2 + C'C^2$

$\Leftrightarrow 25x^2 = 9x^2 + 4a^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Đáy nhỏ } DC = 2x = a \\ \text{Đáy lớn } AB = 8x = 4a \\ \text{Cạnh xiên } BC = DA = 5x = \dfrac{5a}{2} \end{cases} \quad \text{(ycbt).}$$



$$\Rightarrow dt(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD).MP = \frac{1}{2}(4a + a).2a = 5a^2$$

2/ Ta có $\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \\ OP \perp DC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad SP \perp DC$

Lập luận tương tự $\Rightarrow$ $SQ \perp DA$; $SM \perp AB$; $SN \perp BC$

Do $OM = ON = OP = OQ = a \quad \Rightarrow \quad SM = SN = SP = SQ$

$$S_{xq} = \frac{1}{2}SM.AB + \frac{1}{2}SN.BC + \frac{1}{2}SP.CD + \frac{1}{2}SQ.DA$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{1}{2}SP\,(AB + BC + CD + DA)$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + a^2}\left(4a + \frac{5a}{2} + a + \frac{5a}{2}\right) = \frac{1}{2}a\sqrt{5}.10a = 5\sqrt{5}a^2$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 5\sqrt{5}\,a^2 + 5a^2 = 5a^2(\sqrt{5} + 1) \text{ (ycbt)}$$

$$V = \frac{1}{3}dt(ABCD).SO = \frac{1}{3}.5a^2.2a = \frac{10a^3}{3} \text{ (ycbt).}$$

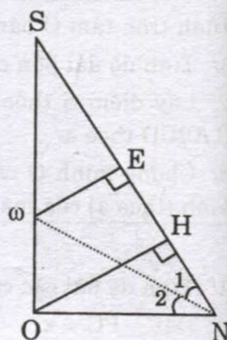
3/ Ta có : $\left.\begin{array}{l} BC \perp SQ \\ BC \perp ON \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (OSN)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (OSN)$ theo giao tuyến SN, nên hạ từ O, $OH \perp SN$

$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow OH = d[O; (SBC)]$.

Lập luận tương tự, hạ $OK \perp SP$; $OI \perp SQ$ và $OJ \perp SM$

$\Rightarrow$ OK, OI, OJ lần lượt là khoảng cách từ O đến các mặt (SDC), (SDA) và (SAB).



Để ý đến bốn tam giác SON, SOP, SOQ, SOM là 4 tam giác vuông bằng nhau, nên bốn đường cao tương ứng OH, OK, OI, OJ cũng bằng nhau.

$\Rightarrow$ O cách đều bốn mặt bên của hình chóp S.ABCD (đpcm).

Gọi $\omega \in SO$. Dựng $\omega E \perp (SBC) \Rightarrow E \in SN$, và $\omega E \,//\, OH$.

Vì ω là tâm mặt cầu nội tiếp $\Rightarrow \omega O = \omega E \Rightarrow$ ω nằm trên đường phân giác góc $\widehat{SNO}$.

Vậy ω là giao điểm của đường cao SO và mặt phân giác của góc nhị diện tạo bởi mặt bên và đáy của hình chóp S.ABCD. (ycbt)

$$\Delta OSN \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{4a^2}{5} \Leftrightarrow OH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

$\Delta S\omega E \backsim \Delta SOH$: $\dfrac{\omega E}{OH} = \dfrac{S\omega}{SO} = \dfrac{SO - \omega O}{SO} = \dfrac{SO - \omega E}{SO}$

$$\Rightarrow 2a.\omega E = \frac{2a\sqrt{5}}{5}(2a - \omega E) \Leftrightarrow (5 + \sqrt{5})\omega E = 2a\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow r = \omega E = \frac{2a\sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} \text{ (ycbt).}$$

Bài 203 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT – KHỐI B – 1993)

> Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, có cạnh đáy bằng a và $\widehat{ASB} = \alpha$.
> 1/ Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
> 2/ Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.
> 3/ Chứng minh rằng hai tâm mặt cầu đó trùng nhau khi và chỉ khi $\alpha = 45^0$.

Giải

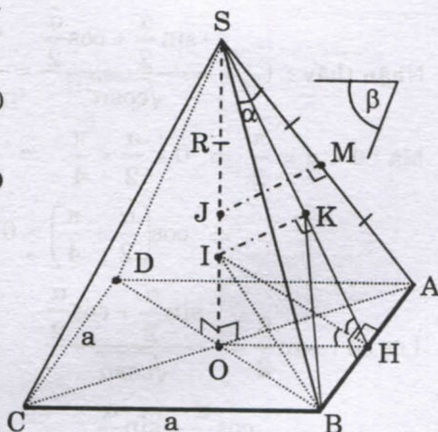
1/ Trong mặt phẳng (SAO) mặt trung trực (β) của SA cắt trục đường tròn ngoại tiếp (ABCD) là SO tại J.

$\Rightarrow$ J là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD (ycbt).

Gọi M là trung điểm SA thì :

$$\Delta SMJ \backsim \Delta SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SJ}{SA} \Rightarrow SJ.SO = SM.SA = \frac{SA^2}{2}$$

$$\Rightarrow R = SJ = \frac{SA^2}{2.SO} = \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}} \text{ (ycbt).}$$



2/ Gọi H là trung điểm của cạnh đáy AB.

Trong (SHO), mặt phân giác của nhị diện (AB) chia đôi góc $\widehat{SHO}$ sẽ cắt SO tại I

$\Rightarrow$ I là tâm hình cầu nội tiếp hình chóp S.ABCD (ycbt).

Theo định lý đường phân giác trong; ta có:

$$\frac{IO}{IS} = \frac{HO}{HS} \Rightarrow r = IO = HO\frac{IS}{HS}$$

Với: $OH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

$$\Rightarrow r = IO = \frac{a}{2}.\frac{IS}{HS}$$

Dựng $IK \perp SH \Rightarrow \Delta SKI \backsim \Delta SOH \Rightarrow \dfrac{IS}{HS} = \dfrac{IK}{OH} = \dfrac{IO}{OH}$ (1)

Gọi : $\widehat{SHO} = \beta \Rightarrow \dfrac{IO}{OH} = \tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{IS}{HS}$ (do (1))

$$\Rightarrow r = \frac{a}{2}\tan\frac{\beta}{2} \quad (2)$$

Ta có : $\begin{cases} SH = \dfrac{a}{2}\cot\dfrac{\alpha}{2} \\ SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}} \\ \tan\beta = \dfrac{SO}{OH} = \dfrac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \end{cases}$

Đặt: $t = \tan\dfrac{\beta}{2}$; $t > 0 \Rightarrow \tan\beta = \dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$; $t > 0$

$$\Leftrightarrow f(t) = \sqrt{\cos\alpha}.t^2 + 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).t - \sqrt{\cos\alpha} = 0 \text{ ; } t > 0$$

(có : $\Delta'_f = \sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \sqrt{\Delta'_f} = \cos\dfrac{\alpha}{2}$)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-\sin\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}} < 0 \text{ (loại)} \\ t_2 = \dfrac{-\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}} \end{array}\right.$$

Nhận thấy : $t_2 = \dfrac{-\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}} = \dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\cos\alpha}}$ (3)

Mà : $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow$ nhận giá trị ở (3).

Lúc đó : $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{-\sin\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} r = \dfrac{a}{2}.\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$ (*) (ycbt).

3/ Giả sử : I ≡ J. Ta có : $\begin{cases} IK \perp (SAB) \Rightarrow IK \perp KB \\ IO = IK \Rightarrow \Delta IOB = \Delta IKB \Rightarrow OB = KB \end{cases}$

Suy ra : hai đường tròn ngoại tiếp ABCD và SAB bằng nhau.

$\Rightarrow \widehat{ASB} = \widehat{ACD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$) $\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (4)

Kiểm tra sự đúng đắn của (4) dễ dàng nhờ (*) (đpcm).

Bài 204 (ĐẠI HỌC TÀI CHÁNH KẾ TOÁN – 1993)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là một tam giác cân có AB = AC = a, (SBC) ⊥ (ABC); SA = SB = a, SC = x.

1/ Chứng tỏ rằng BC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

2/ Hãy xác định tâm và bán kính của hình cầu ngoại tiếp hình chóp trên.

Giải

1/ Gọi I là trung điểm BC ⇒ AI ⊥ BC

Ta có : (SBC) ⊥ (ABC) ⇒ AI ⊥ SI

Xét ΔSAI và ΔAIC có : AS = AC ⇒ ΔAIC = ΔSAI

⇒ SI = CI = IB ⇒ ΔCSB vuông ⇒ $\widehat{CSB} = \frac{\pi}{2}$

Vậy BC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔSBC (đpcm).

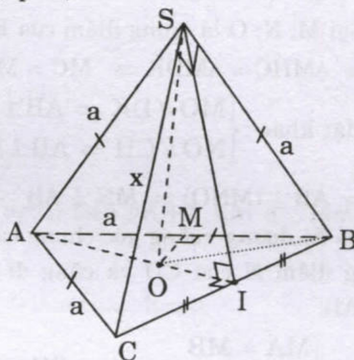
2/ Gọi O là giao điểm giữa đường trung trực của AB với AI

Ta có : OA = OB = OC

Mặt khác : ΔSOI = ΔBOI (vì IB = SI)

⇒ SO = BO

⇒ OA = OB = OC = OS



⇒ O là tâm hình cầu ngoại tiếp S.ABC (ycbt).

Ta có : ΔAMO ∽ ΔAIB

$$\Rightarrow \frac{AO}{AB} = \frac{AM}{AI} \Rightarrow AO = R = \frac{AB.AM}{AI}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a^2}{2.AI}.$$

Mà: $AI^2 = AS^2 - SI^2 = AS^2 - (SB^2 - BI^2) = AS^2 - (SB^2 - \frac{BC^2}{4})$

$$\Rightarrow AI^2 = AS^2 - \left(SB^2 - \frac{SC^2 + SB^2}{4}\right) = \frac{a^2 + x^2}{4}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2}$$

Vậy $R = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ (ycbt).

Bài 205 (ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM – 1993)

Cho tứ diện ABCD.

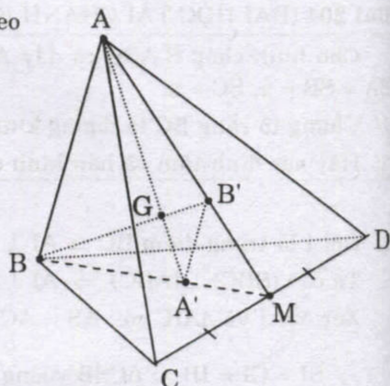
1/ Chứng tỏ rằng các đường thẳng nối mỗi đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại điểm G.

2/ Nếu điểm G trùng với tâm hình cầu nội tiếp, chứng tỏ rằng các mặt của tứ diện là bằng nhau.

Giải

1/ Gọi M là trung điểm DC; A' và B' lần lượt là trọng tâm ΔBCD và ΔACD.

Trong ΔABM, ta gọi G là giao điểm của AA' với BB'. Theo tính chất của trọng tâm, ta có :



$$\frac{AM}{MB'} = \frac{BM}{MA'} = 3 \Rightarrow A'B' \,//\, AB$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{A'G} = \frac{BG}{B'G} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AM}{B'M} = 3$$

Vậy : BB' cắt AA' tại G cố định.

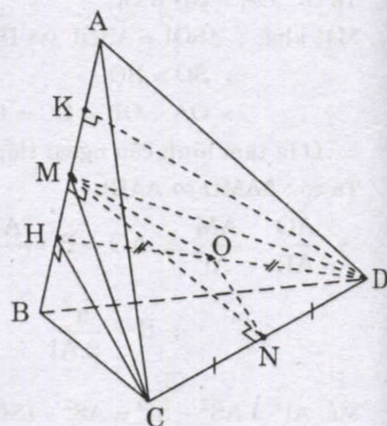
Tương tự, các đường thẳng nối C với trọng tâm C' của ΔABD và nối D với trọng tâm D' của ΔABC cũng đi qua G. Từ các lập luận đó ⇒ (đpcm).

2/ Giả sử G cũng là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện.

Dựng : $CH \perp AB$; $DK \perp AB$. Xét : $S_{ABC} = S_{ABD} \Rightarrow CH = DK$

Gọi M; N; O là trung điểm của KH; CD; HD thì :

$\Rightarrow \Delta MHC = \Delta MDK \Rightarrow MC = MD \Rightarrow MN \perp DC$



Mặt khác : $\begin{cases} MO \,//\, DK \Rightarrow AB \perp MO \\ NO \,//\, CH \Rightarrow AB \perp NO \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (MNO) \Rightarrow MN \perp AB$

Do đó đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm N của CD và cũng đi qua trung điểm M của AB.

$\Rightarrow \begin{cases} MA = MB \\ MK = MH \end{cases} \Rightarrow AK = BH$

$\Rightarrow \Delta CHB = \Delta DKA \Rightarrow BC = AD$

Lý luận tương tự : AC = BD; AB = CD

Vậy các mặt tứ diện là các tam giác bằng nhau (đpcm).

Bài 206 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP Khối A – B 1994)

Hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác cân AB = AC = a; $(ABC) \perp (SBC)$ và SA = SB = a.

1/ Chứng tỏ rằng SBC là một tam giác vuông.

2/ Xác định tâm và bàn kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp, biết SC = x.

Giải

(Xem Đề ĐẠI HỌC TÀI CHÁNH KẾ TOÁN – 1993)

Bài 207 (ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM – 1994)

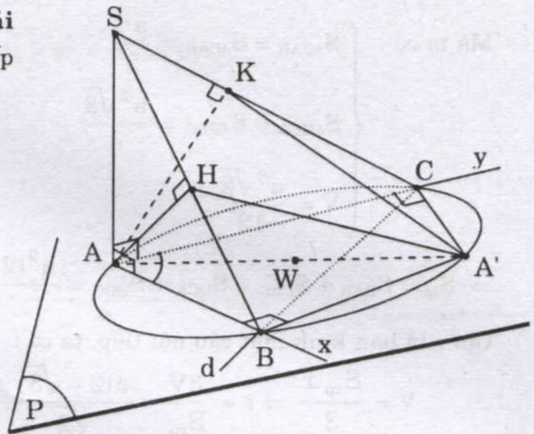
Trong mặt phẳng (P) cho một đường thẳng (d) và một điểm A ngoài (d). Một góc $\widehat{xAy}$ di động quay quanh A, cắt (d) tại B và C. Trên đường thẳng qua A và vuông góc với (P) lấy điểm S. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

1/ Chứng minh A, B, C, H, K thuộc cùng một mặt cầu.

2/ Tính bán kính mặt cầu trên biết AB = 2, AC = 3, $\widehat{BAC} = 60^0$.

3/ Giả sử tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCHK luôn đi qua một đường tròn cố định khi S thay đổi.

Giải



1/ Gọi AA' là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có :

$AB \perp A'B \Rightarrow A'B \perp (SAB)$

$\Rightarrow A'B \perp AH$

Mà: $AH \perp BH$

$\Rightarrow AH \perp (A'BH)$

$\Rightarrow AH \perp A'H$

Tương tự, ta có : $AK \perp A'K$

Vậy A; B; C; H; K cùng thuộc mặt cầu tâm W đường kính AA' (đpcm).

2/ Áp dụng định lý hàm cosin, ta có :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.AB.AC.\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

Áp dụng định lý hàm sin $\Rightarrow \dfrac{BC}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$ (ycbt).

3/ Với $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ (d) chứa đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCHK di động trên (d) cố định.

Vậy khi S thay đổi, mặt cầu chứa đường tròn qua A nhận (d) làm trục (đpcm).

Bài 208 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – 1995)

Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AB = x. Hai mặt (ACD) và (BCD) là những tam giác đều cạnh a. Gọi M là trung điểm của cạnh AB.

a/ Xác định x khi DM là đường cao của hình tứ diện ABCD.

b/ Giả sử DM vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình tứ diện ABCD.

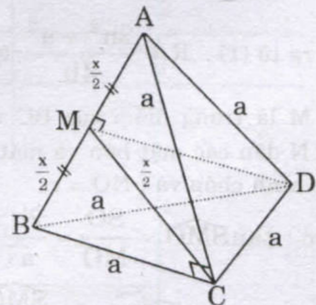
Giải

a/ Do DM là đường cao tứ diện ABCD (hay hình chóp D.ABC)

$\Rightarrow DM \perp (ABC)$ và DA = DB = DC = a nên hình chiếu của chúng trên mặt phẳng (ABC) bằng nhau $\Leftrightarrow$ MA = MB = MC.

$\Rightarrow$ ΔABC vuông cân tại C (vì trung tuyến $CM = \dfrac{AB}{2}$)

Vậy $x = AB = a\sqrt{2}$ (ycbt).



b/ Với giả thiết đó tương tự xét : ΔDAB

$\Rightarrow AD = BD = a$ và $AB = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow DM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $MA = MB = MC = MD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Mà ta có : $\begin{cases} S_{\Delta DAB} = S_{\Delta CAB} = \dfrac{a^2}{2} \\ S_{\Delta DCA} = S_{\Delta DBC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \end{cases}$

$\Rightarrow S_{tp} = S_{DAB} + S_{CAB} + S_{DCA} + S_{DBC} = \dfrac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$ (ycbt)

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp, ta có :

$$V = \frac{S_{tp}.r}{3} \Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}.$$

Bài 209 (ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG – ĐỀ 3 – 1994)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD đỉnh S, cạnh đáy bằng a; chiều cao bằng h.

1/ Tính các bán kính R và r của các hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp tương ứng của hình chóp đó.

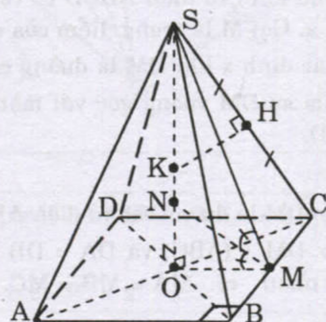
2/ Gọi W là thể tích hình chóp, V_1, là thể tích hình cầu ngoại tiếp V_2 là thể tích hình cầu nội tiếp hình chóp. Xác định quan hệ giữa a và h sao cho :

a/ $\dfrac{V_2}{W}$ đạt giá trị lớn nhất. b/ $\dfrac{V_2}{V_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

1/ Gọi O là tâm hình vuông ở đáy và HK là đoạn trung trực của SC trong ΔSOC, $K \in SO$, ta có: KS = KC = KB = KA = KD

Khi đó, bán kính hình cầu ngoại tiếp là : R = SK



Ta có : $\Delta SHK \backsim \Delta SOC \Rightarrow \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{SH}{SO}$

$\Rightarrow R = \dfrac{SH.SC}{SO} \Rightarrow R = \dfrac{SC^2}{2.SO}$ (1)

Với : $\begin{cases} AC^2 = 2a^2 \Rightarrow OC^2 = \dfrac{a^2}{2} \\ SC^2 = SO^2 + OC^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{2} \end{cases}$

Suy ra từ (1) : $R = \dfrac{2h^2 + a^2}{4h}$ (ycbt).

Gọi M là trung điểm của BC và MN là phân giác của $\widehat{OMS}$ trong ΔOMS. Thì khoảng cách từ N đến các mặt bên và mặt đáy của hình chóp đều bằng nhau, hay N là tâm hình cầu nội tiếp hình chóp và : NO = r.

Ta có : $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{MO} = \dfrac{2h}{a}$

Đặt : $t = \tan\widehat{NMO} = \tan\dfrac{\widehat{SMO}}{2}$, thì : $\dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{2h}{a}$; $1 \neq t > 0$

$\Rightarrow h(t) = h.t^2 + a.t - h = 0;\ 1 \neq t > 0$ (có : $\Delta_h = a^2 + 4h^2 > 0$)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 4h^2}}{2h} < 0 \text{ (loại)} \\ t_2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4h^2} - a}{2h} > 0 \end{array}\right.$$

Suy ra: $\tan\widehat{NMO} = \dfrac{NO}{MO} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4h^2} - a}{2h} \Rightarrow r = \dfrac{a.(\sqrt{a^2 + 4h^2} - a)}{4h}$ (ycbt).

2/ Ta có :

- **Thể tích hình chóp :** $W = \dfrac{1}{3}h.a^2$
- **Thể tích hình cầu ngoại tiếp:** $V_1 = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{\pi\left(2h^2 + a^2\right)^3}{48h^3}$
- **Thể tích hình cầu nội tiếp :** $V_2 = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{\pi a^3\left(\sqrt{4h^2 + a^2} - a\right)^3}{48h^3}$

Khi đó :

a/ $$\frac{V_2}{W} = \frac{\pi a\left(\sqrt{4h^2 + a^2} - a\right)^3}{16h^4} = \frac{4\pi.a.h^2}{\left(\sqrt{4h^2 + a^2} + a\right)^3} = \frac{\pi\dfrac{4h^2}{a^2}}{\left(\sqrt{\dfrac{4h^2}{a^2} + 1} + 1\right)^3}$$

Lại đặt : $\tan\alpha = \dfrac{2h}{a} \Rightarrow \dfrac{V_2}{W} = \dfrac{\pi\tan^2\alpha}{\left(\sqrt{\tan^2\alpha + 1} + 1\right)^3} = \dfrac{\pi(\tan^2\alpha + 1) - \pi}{\left(\sqrt{\tan^2\alpha + 1} + 1\right)^3}$

Đặt : $\cos\alpha = x \Rightarrow \dfrac{V_2}{W} = \dfrac{\pi x(1 - x)}{(x + 1)^2}$

Xét : $f(x) = \dfrac{x(1 - x)}{(x + 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1 - 3x}{(x + 1)^3} = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{8}$

x		1/3	
f '(x)	+	0	−
f(x)	↗	1/8	↘

Nên : $\max\left(\dfrac{V_2}{W}\right) = \dfrac{\pi}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = 2\sqrt{2} \Rightarrow h = a\sqrt{2}$ (ycbt).

b/ $$\frac{V_2}{V_1} = \left[\frac{4h^2a}{\left(2h^2 + a^2\right)\left(a + \sqrt{4h^2 + a^2}\right)}\right]^3 = \left[\frac{\dfrac{4h^2}{a^2}}{\left(2\dfrac{h^2}{a^2} + 1\right)\left(1 + \sqrt{\dfrac{4h^2}{a^2} + 1}\right)}\right]^3$$

Tương tự : $\exists \max\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right) \Leftrightarrow h = a\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}}$ (ycbt).

Bài 210 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM – 1995)

Cho góc tam diện Sxyz đỉnh S với $\widehat{xSy} = 120^0$, $\widehat{zSy} = 60^0$, $\widehat{xSz} = 90^0$. Trên các tia Sx, Sy, Sz theo thứ tự lấy các điểm A, B, C sao cho SA = SB = SC = a.

1/ Chứng tỏ rằng ABC là một tam giác vuông. Xác định hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) và bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện SABC theo a.

2/ Tính góc phẳng của nhị diện cạnh AC.

Giải

1/ Ta có : $\begin{cases} AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = a\sqrt{2} \\ BC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos\dfrac{\pi}{3}} = a \\ AB = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos\dfrac{2\pi}{3}} = a\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 = 3a^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C. (ycbt)

Gọi H là trung điểm AB

$\Rightarrow SH \perp AB$ (1)

Dựng : MH // BC cắt AC tại M

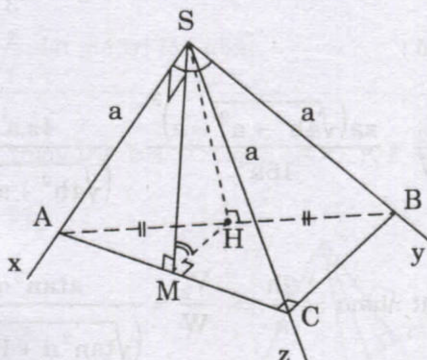
$\Rightarrow HM \perp AC$

Để ý $AC \perp SM$

Nên $AC \perp (SMH)$

$\Rightarrow AC \perp SH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SH \perp (ABC)$



Vậy H là hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) (ycbt).

Ta có: $\begin{cases} V = V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \\ S_{tp} = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)}{2} \end{cases}$

Suy ra : $r = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}$ (ycbt).

2/ Ta có : $\widehat{SMH} = \widehat{(AC)}$. Mà: $\tan\varphi = \dfrac{SH}{MH} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Vậy góc phẳng nhị diện cạnh AC bằng $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ (ycbt).

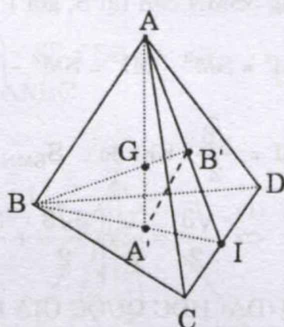
Bài 211 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI – 1995)

1/ Chứng minh rằng trong một hình tứ diện, 4 đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại 1 điểm, điểm này chia mỗi đoạn thẳng ấy theo tỉ số 3 : 1 tính từ đỉnh.

2/ Chứng minh rằng trong mọi hình tứ diện nếu R và r là bán kính của hình cầu ngoại tiếp và hình cầu nội tiếp, ta đều có $R \geqslant 3r$.

Giải

1/ Gọi A'; B'; C'; D' theo thứ tự là trọng tâm các mặt tam giác ΔBCD, ΔCDA, ΔABC, ΔABD với I là trung điểm của CD. Hai đoạn AA', BB' cùng nằm trong mặt phẳng (ABI).



$\Delta ABI \Rightarrow \dfrac{IA'}{IB} = \dfrac{IB'}{IA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow A'B' \,//\, AB$ (1)

Nhưng : $\overset{(1)}{\Rightarrow} \dfrac{GA'}{GA} = \dfrac{GB'}{GB} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{GA}{GA'} = \dfrac{GB}{GB} = 3$

Tương tự hai đoạn CC', DD' cũng đồng quy ở G và :

$$\frac{GC}{GC'} = \frac{GD}{GD'} = \frac{3}{1} \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

2/ Nếu một hình cầu có điểm chung với cả bốn mặt của hình tứ diện thì bán kính thì $R_1 \geqslant r$ (2)

Dấu đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi hình cầu ấy trùng với hình cầu nội tiếp.

Phép đồng dạng phối cảnh (vị tự trong không gian) tâm $(G; -\dfrac{1}{3})$ biến hình tứ diện ABCD thành hình tứ diện A'B'C'D'.

⇒ Bán kính của hình cầu ngoại tiếp hình tứ diện A'B'C'D' bằng $\dfrac{R}{3}$.

Hình cầu ấy có các điểm chung A'; B'; C; D' với cả bốn mặt hình tứ diện ABCD

$\Rightarrow \dfrac{R}{3} \geqslant r \Leftrightarrow R \geqslant 3r$ (đpcm).

Bài 212 (ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN HÀ NỘI – 1997)

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có đường cao SO = 1 và đáy ABC có cạnh $2\sqrt{6}$. Điểm M, N là trung điểm của cạnh AC, AB tương ứng. Tính thể tích hình chóp S.AMN và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp đó.

Giải

Ta có : $S_{AMN} = \dfrac{1}{2} AM.AN.\sin A = \dfrac{1}{2}\sqrt{6}.\sqrt{6}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (đvdt)

$\Rightarrow V_{SAMN} = \dfrac{1}{3} SO.S_{AMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (đvtt)

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện SAMN, ta có :

$V_{SAMN} = \dfrac{1}{3} r\left(S_{AMN} + S_{ASM} + S_{ASN} + S_{SMN}\right)$ (1)

Trong ΔCOM vuông tại M có :

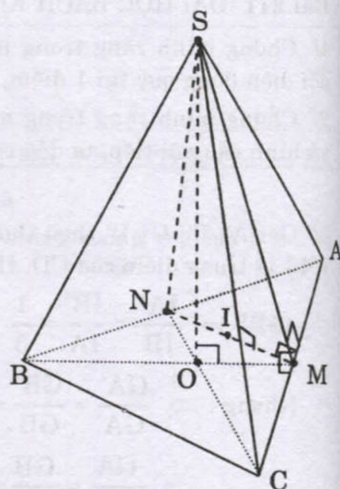
$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{OM}{CM} \Rightarrow OM = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SM = \sqrt{OM^2 + SO^2} = \sqrt{3}$$

Nhận thấy, trong tứ diện đều SABC

$\Leftrightarrow \Delta SNA = \Delta SMA$

$$\Rightarrow S_{SNA} = S_{SMA} = \frac{1}{2}SM.MA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



Trong ΔSMN cân tại S, gọi I là trung điểm MN $\Rightarrow MN \perp SI$

$$\Rightarrow SI^2 = SM^2 - MI^2 = SM^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = SM^2 - \left(\frac{BC}{4}\right)^2 = \frac{6}{4}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{\sqrt{6}}{2}. \text{ Khi đó : } S_{SMN} = \frac{1}{2}SI.MN = \frac{3}{2}$$

Vậy : $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}r\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1}$ (ycbt).

Bài 213 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – KHỐI D – 1998)

Cho đường tròn tâm O bán kính R. Xét hình chóp SABCD có SA vuông góc với mặt phẳng đáy (S và A cố định), SA = h cho trước, đáy ABCD là tứ giác tuỳ ý nội tiếp một đường tròn đã cho mà các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.

1/ Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp (đi qua 5 đỉnh của hình chóp).

2/ Hỏi đáy ABCD là hình gì để thể tích hình chóp đạt giá trị lớn nhất ?

Giải

1/ Dựng $Ox \perp (ABCD) \Rightarrow$ Ox là trục đường tròn.

Trong ΔSAO, gọi Ky là tia trung trực của SA.

Gọi : $O' = Ky \cap Ox \Rightarrow O'S = O'A = O'B = O'C = O'D$

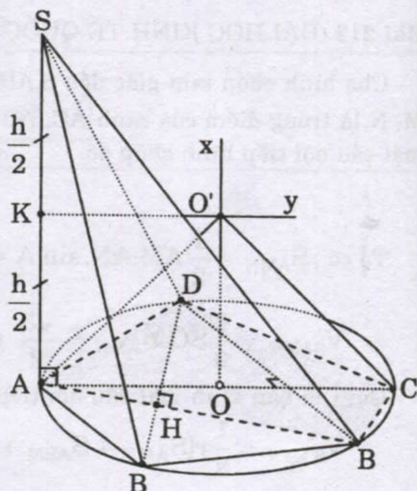
$\Leftrightarrow$ O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có : $O'O = \frac{1}{2}SA = \frac{h}{2}$

$\Delta AO'O$ vuông tại O

$$\Rightarrow AO' = R' = \sqrt{\frac{h^2}{4} + R^2}$$

$$\Rightarrow R' = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 4R^2} \text{ (ycbt).}$$



2/ Ta có thể tích hình chóp S.ABCD là :

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD}$$

$$\Leftrightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{6}h.AC.BD$$

Nên : $\exists \max(V_{SABCD}) \Leftrightarrow \exists \max(AC.BD)$

$\Leftrightarrow$ AC và BD đồng thời lớn nhất

$\Leftrightarrow$ AC và BD đồng thời là đường kính đường tròn tâm O.

Mà : AC $\perp$ BD. Do đó khi ABCD là hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O thì thể tích hình chóp đạt giá trị lớn nhất. (ycbt)

Bài 214 (ĐẠI HỌC DƯỢC HÀ NỘI – 1999)

Hình chóp S.ABC có độ dài các cạnh bên bằng l các mặt bên lập với mặt đáy góc α ($0^0 < \alpha < 90^0$).

1/ Chứng minh hình chóp là hình chóp đều.

2/ Tính theo l và α các bán kính R, r của các mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình chóp.

3/ Chứng minh $\dfrac{r}{R} \leqslant \dfrac{1}{3}$ và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hình chóp là hình tứ diện đều.

Giải

1/ Gọi H là hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC), ta có : SA = SB = SC = l

$$\Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow \begin{cases} \text{H là tâm đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC \\ \text{SH là trục đường tròn (ABC).} \end{cases}$$

Mặt khác các mặt bên đều lập với đáy một góc α ($0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$).

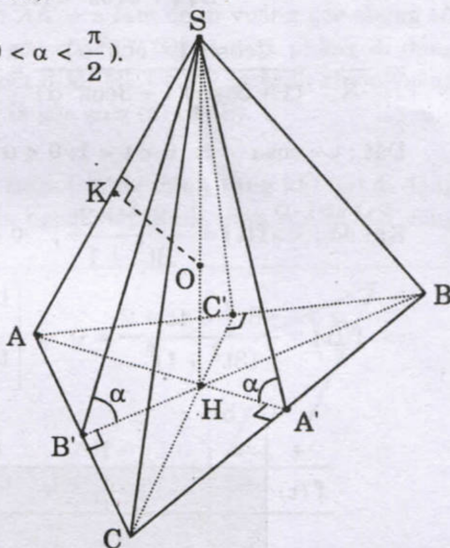
$\Rightarrow \Delta SHA' = \Delta SHB' = \Delta SHC'$

$\Rightarrow HA' = HB' = HC'$

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

$\Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy S.ABCD là hình chóp đều (đpcm).



2/ Trong $\Delta SAA'$, gọi O là giao điểm của SH và đường trung trực KO của SA.

$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Gọi a là cạnh ΔABC đều. Ta có :

- $A'H = \dfrac{1}{3}AA' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

- $\cos\alpha = \dfrac{A'H}{SA'} \quad \Rightarrow \quad SA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$

- $SC^2 = A'S^2 + A'C^2 \;\Leftrightarrow l = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \dfrac{2l\sqrt{3}\cos\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$

- $\tan\alpha = \dfrac{SH}{HA'} \Rightarrow SH = A'H.\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\tan\alpha \Rightarrow SH = \dfrac{l\sin\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$

- $\Delta SKO \backsim \Delta SHA \Rightarrow \dfrac{KS}{SH} = \dfrac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \dfrac{KS.SA}{SH} = \dfrac{SA^2}{2.SH} = \dfrac{l^2}{2}\dfrac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{l.\sin\alpha}$

Vậy : $R = \dfrac{l\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2\sin\alpha}$ (ycbt).

Ta có :

- Diện tích ΔABC: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{4l^2 3\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha} = \dfrac{3\sqrt{3}l^2\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$

- Thể tích hình chóp S.ABC là :

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}l^3(\cos\alpha.\sin 2\alpha)}{2(1+3\cos^2\alpha)\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$$

- Diện tích toàn phần của hình chóp S.ABC là :

$$S_{tp} = 3.S_{SBC} + S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}l^2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}$$

Từ $V_{SABCD} = \frac{1}{3}.S_{tp}.r \Rightarrow r = \frac{l\sin 2\alpha}{2\sqrt{1+3\cos^2\alpha}(1+\cos\alpha)}$ (ycbt).

3/ Ta lại có : $\frac{r}{R} = \frac{l\sin 2\alpha}{2\sqrt{1+3\cos^2\alpha}(1+\cos\alpha)}.\frac{2\sin\alpha}{l\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1+3\cos^2\alpha)} = \frac{2\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{1+3\cos^2\alpha} = \frac{-2\cos^2\alpha+2\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha} \quad (1)$$

Đặt : $t = \cos\alpha \quad \Rightarrow 0 < t < 1; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Khi đó : $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(t) = \frac{-2t^2+2t}{3t^2+1}; \quad 0 < t < 1$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-6t^2-4t+2}{(3t^2+1)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f'(t)		–	0	+		+	0	–		–	
f(t)					0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0		

Từ bảng biến thiên ta có : $f(t) \leqslant \frac{1}{3}; 0 < t < 1 \Rightarrow \frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{3}$ (đpcm).

Bài 215 (ĐẠI HỌC MỞ BÁN CÔNG TP.HCM – KHỐI A & B – 2000)

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC, cắt các cạnh SB; SC; SD lần lượt tại M; N; P.

1/ Chứng minh BD vuông góc với AN.

2/ Chứng minh năm điểm S; A; M; N; P cùng nằm trên một mặt cầu.

Giải

1/ Ta có : $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (vì ABCD là hình vuông)} \\ BD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD) \supset BD) \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$; mà: $AN \subset (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp AN$ (đpcm).

2/ Xét các lập luận :

- $SC \perp (\alpha) \equiv (APNM) \supset AN$

$\Rightarrow SC \perp AN \Rightarrow \widehat{ANS} = \dfrac{\pi}{2}$ (1)

- Tương tự, sử dụng các khái niệm vuông góc ta suy ra:

$$\widehat{APS} = \widehat{AMS} = \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ⇒ ba điểm P; M; N nằm trên mặt cầu (S) đường kính SA.

Vậy S; A; M; N; P cùng nằm trên mặt cầu (S) (đpcm).

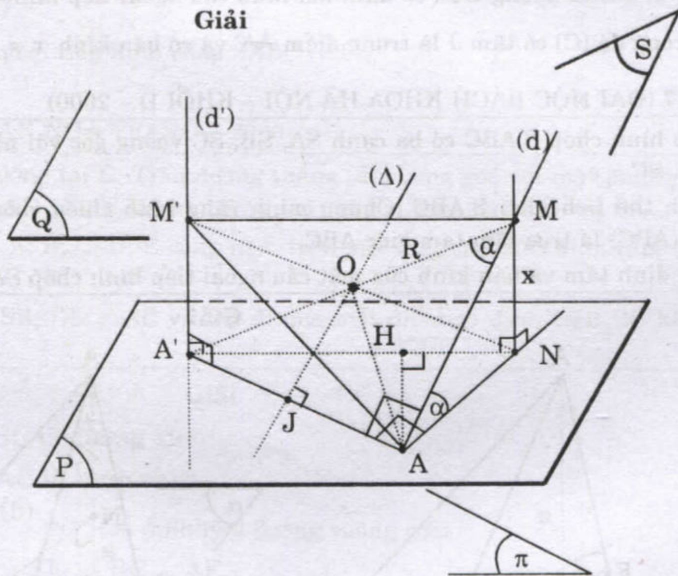
Bài 216 (ĐẠI HỌC DƯỢC HÀ NỘI – 2000)

Cho hai đường thẳng chéo nhau (d). (d') nhận đoạn AA' = a làm đoạn vuông góc chung (A ∈ (d), A' ∈ (d')). Gọi (P) mặt phẳng qua A' và vuông góc với (d'); (Q) là mặt phẳng di động nhưng luôn luôn song song với (P) và cắt (d); (d') lần lượt ở M, M'. Còn N là hình chiếu vuông góc của M trên (P); x là khoảng cách giữa (P) và (Q); α là góc giữa (d) và (P).

1/ Tính thể tích hình chóp A.A'M'MN theo a, x, α.

2/ Xác định tâm O của hình cầu ngoại tiếp hình chóp trên. Chứng minh rằng khi (Q) di động thì O luôn thuộc một đường thẳng cố định và hình cầu ngoại tiếp hình chóp A.A'M'MN cũng luôn chứa một đường tròn cố định.

Giải



1/ Để ý thấy : $(P) \perp (d')$; $AA' \perp (d') \Rightarrow AA' \subset (P)$

Mà N là hình chiếu của M xuống (P) $\Rightarrow \begin{cases} MN \perp (P) \\ \widehat{MAN} = \alpha \end{cases}$ và $M'A' \perp (P)$.

Do $(Q) // (P) \Rightarrow (Q) \cap (d; d') = MM' // A'N \Rightarrow \begin{cases} MNA'M' \text{ là hình chữ nhật} \\ MN = A'M' = x \end{cases}$

Mặt khác: (MNA'M') $\perp$ (ANA') theo giao tuyến A'N.

Dựng AH $\perp$ A'N tại H

$\Rightarrow$ AH = d[A; (MNA'M')] = h : đường cao hình chóp A.A'M'MN

MN $\perp$ (A'AN) $\Rightarrow \begin{cases} \text{MA : đường xiên} \\ \text{NA : hình chiếu} \end{cases}$ (định lý 3 đường vuông góc)

Mà AA' $\perp$ MA $\Rightarrow$ AA' $\perp$ NA $\Leftrightarrow$ ΔA'AN có $\widehat{A} = 90^0$.

Thể tích V hình chóp A.A'M'MN là :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}.h = \frac{1}{3}.(MN.A'N).AH = \frac{1}{3}MN(A'N.AH)$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}x.(AA'.AN);\ \text{vì } \Delta A'AN \text{ có } \widehat{A} = 90^0$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}x.x.(\cot\alpha)a = \frac{ax^2(\cot\alpha)}{3}\ \text{(ycbt).}$$

2/ $\widehat{A'M'M} = \widehat{A'NM} = \widehat{A'AM} = 90^0$

Gọi O là trung điểm đoạn A'M $\Rightarrow$ O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp A.A'M'MN (ycbt).

Xét mặt phẳng cố định (S) $\equiv$ (A'; d) $\equiv$ (A'AM) ta có : OA' = OA $\Rightarrow$ O $\in$ (Δ) : trung trực cố định của AA' $\subset$ (S).

Gọi (π) là mặt phẳng qua A'A và vuông góc với (Δ) (hay (π) $\perp$ (S)) thì (π) cố định và (Σ) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp A.A'M'MN. $\Rightarrow$ (π) $\cap$ (Σ) = (C).

Lúc đó (C) là đường tròn cố định mà hình cầu ngoại tiếp hình chóp A.A'M'MN luôn luôn đi qua. Trong đó (C) có tâm J là trung điểm AA' và có bán kính $r = \frac{a}{2}$ (đpcm).

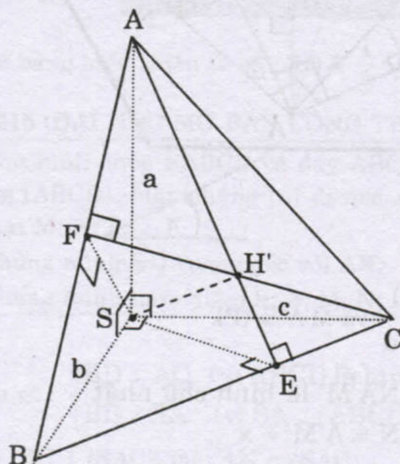
Bài 217 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI – KHỐI D – 2000)

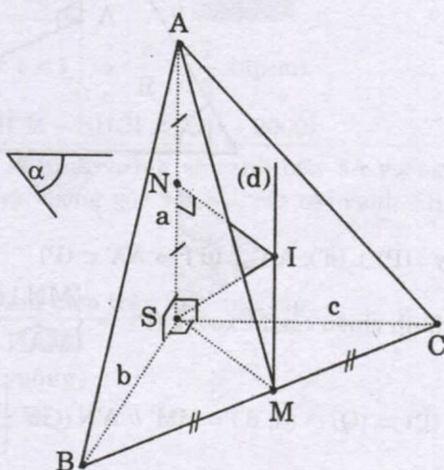
Cho hình chóp S.ABC có ba cạnh SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và SA = a, SB = b, SC = c.

1/ Tính thể tích khối S.ABC. Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trực tâm tam giác ABC.

2/ Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

Giải





1/ Ta có : $\begin{cases} AS \perp CS \\ AS \perp BS \end{cases} \Rightarrow AS \perp (BSC) \Rightarrow$ AS là đường cao hình chóp A.SBC

Thể tích hình chóp S.ABC là : $V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3}.\left(\frac{bc}{2}\right)a = \frac{abc}{6}$ (ycbt).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Hạ các đường cao SE và SF của các ΔBSC và ΔASB, theo thứ tự đó.

Theo định lý ba đường vuông góc $\Rightarrow \begin{cases} AE \perp BC \text{ tại } E \\ CF \perp AB \text{ tại } F \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (SAE) \perp BC \Rightarrow (SAE) \perp (ABC) \\ (SCF) \perp AB \Rightarrow (SCF) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow (SAE) \cap (SCF) = SH' \perp (ABC).$

Theo cách dựng thì H' là trực tâm ΔABC và SH' ⊥ (ABC) Nhưng chỉ có một hình chiếu vuông góc duy nhất hạ được từ S xuống (ABC); hay H ≡ H'.

Vậy hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trực tâm ΔABC của hình chóp S.ABC (đpcm).

2/ Gọi M là trung điểm BC.

Qua M dựng đường thẳng (d) sao cho (d) // AS ⊥ (SBC) ⇒ (d) là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSBC.

Dựng mặt phẳng trung trực (α) qua trung điểm N của đoạn AS.

$\Rightarrow (\alpha) \cap (d) = I$

Để ý : $\begin{cases} I \in (d) \Rightarrow IB = IC = IS \\ I \in (\alpha) \Rightarrow IS = IA \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS = R$

⇒ I là tâm mặt cầu (Σ) ngoại tiếp hình chóp SABC (ycbt).

Tính R : Độc giả tự giải

Bài 218 (ĐẠI HỌC THUỶ SẢN NHA TRANG – 2000)

Cho một tam giác ABC vuông tại C. Trên đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A ta lấy một điểm S. Gọi AD và AE là hai đường cao của hai tam giác SAB và SAC.

1/ Chứng minh rằng 5 điểm A; B; C; D; E cùng nằm trên một mặt cầu. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

2/ Chứng minh rằng DE ⊥ SB; DE ⊥ AE và DE đi qua một điểm cố định trên BC khi S di động trên (d).

Giải

1/ Ta có : $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SC \text{ là đường xiên} \\ AC \text{ là hình chiếu} \end{cases}$

Mà $BC \perp AC \Rightarrow BC \perp SC$ (do định lý 3 đường vuông góc)

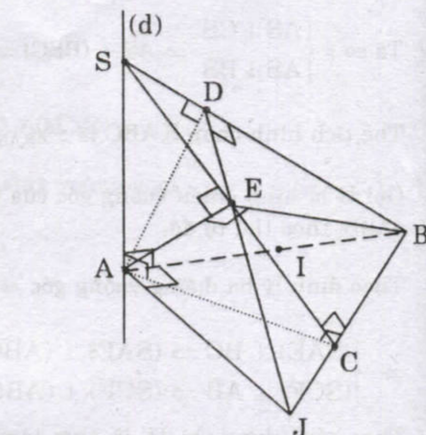
Tóm lại : $\begin{cases} BC \perp (SAC) \supset AE \Rightarrow BC \perp AE \\ SC \perp AE \text{ (cách dựng)} \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC) \supset EB \Rightarrow AE \perp EB$

Đến đây ta có : $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90^0$

⇒ C; D; E nằm trên mặt cầu đường kính AB.

Vậy năm điểm : A; B; C; D; E nằm trên mặt cầu tâm I trung điểm AB, với bán kính là:

$R' = \dfrac{AB}{2}$ (ycbt).



2/ Xét : $AE \perp (SBC) \Rightarrow \begin{cases} AD \text{ là đường xiên} \\ ED \text{ là hình chiếu} \end{cases}$

Mà $AD \perp SB \Rightarrow DE \perp SB$ (ycbt)

Để ý $AE \perp (SBC) \supset DE \Rightarrow AE \perp DE$ (ycbt)

Trong mặt phẳng (SBC) cho : $DE \cap BC = J$

Xét : $\begin{cases} SB \perp (ADE) \supset AJ \Rightarrow SB \perp AJ \\ SA \perp (ABC) \supset AJ \Rightarrow SA \perp AJ \end{cases}$

$\Rightarrow AJ \perp (SAB) \supset AB$

$\Rightarrow AJ \perp AB \Rightarrow J$ cố định trong ΔABC cố định.

Vậy khi S lưu động trên (d) thì đường thẳng DE luôn đi qua điểm J cố định (đpcm).

Bài 219 (CAO ĐẲNG KINH TẾ ĐỐI NGOẠI TP.HCM – 2000)

Cho ABC là tam giác đều nội tiếp trong đường tròn bán kính $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Qua B và C dựng về cùng một phía các nửa đường thẳng Bx; Cy vuông góc với mặt phẳng (ABC). Trên Bx lấy điểm M sao cho : $BM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; trên Cy lấy điểm N sao cho : $CN = \sqrt{2}$.

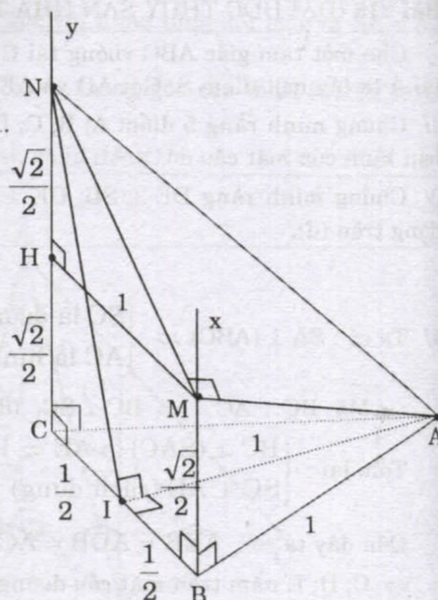
1/ Chứng minh tam giác AMN là tam giác vuông.

2/ Gọi I là điểm giữa của BC. Chứng minh năm điểm A; I; C; M; N cùng nằm trên một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu này.

Giải

1/ Ta có : $R = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC đều

$\Rightarrow$ Đường cao ΔABC: $h = \dfrac{3}{2}.R = \dfrac{3}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Lúc đó cạnh ΔABC đều là: $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.h = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1.$

Để ý đến H là trung điểm CN

$$\Rightarrow \begin{cases} CH = NH = MB = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ BC = MH = 1 \end{cases}$$

Áp dụng định lý Pythagore trong các ΔCAN; ΔMHN; ΔABM :

$$\Rightarrow \begin{cases} AN^2 = AC^2 + CN^2 = 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 \\ MN^2 = MH^2 + HN^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2} \\ AM^2 = AB^2 + BM^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow AN^2 = AM^2 + MN^2$

$\Rightarrow \Delta AMN$ vuông tại M (đpcm).

2/ Để ý đến : $\widehat{NCA} = \widehat{NMA} = \frac{\pi}{2}$

Hơn nữa : NI ⊥ AI (định lý ba đường vuông góc) $\Rightarrow \widehat{NIA} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ C; M; I nằm trên hình cầu đường kính AN.

Vậy năm điểm : A; I; C; M; N cùng nằm trên mặt cầu đường kính AN = $\sqrt{3}$ (đpcm) $\Rightarrow$ bán kính $R' = \frac{NA}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ycbt).

ĐỀ TƯƠNG TỰ

Bài 220 (ĐẠI HỌC GIÁO DỤC KHỐI A – 1976)

Một hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy là tam giác vuông ở A, $\hat{C} = \alpha$ và AC = b. Đường chéo BC' của mặt bên BCC' tạo với mặt bên ACC' một góc β.

a/ Chứng minh rằng $\widehat{BC'A} = \beta$. Tính thể tích của hình lăng trụ nói trên.

b/ Tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho và tính diện tích mặt cầu ấy.

Hướng dẫn

a/ $V(ABC.A'B'C) = \frac{b^2}{2}\tan\alpha\sqrt{\tan^2\alpha\ \tan^2\beta - 1}$ b/ $S_{mc} = \frac{\pi b^2 \tan^2\alpha}{\sin^2\beta}$

Bài 221 (ĐẠI HỌC GIÁO DỤC – KHỐI B – 1977)

Cho một hình cầu bán kính R nội tiếp trong hình chóp, đáy của hình chóp là một hình thoi có góc nhọn bằng α, còn các mặt bên hình chóp tạo với đáy một góc φ. Tính thể tích hình chóp.

Hướng dẫn: $V = \frac{4}{3\sin\alpha}R^3\cot^3\frac{\varphi}{2}\tan\varphi$.

Bài 222 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP TP.HCM, HUẾ, ĐÀ LẠT – 1978)

Trong mặt phẳng P, cho tam giác ABC vuông tại đỉnh C. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng P, người ta lấy một điểm S khác với A. Gọi D, E là các hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB và SC.

a/ Chứng minh rằng 5 điểm A, B, C, D, E nằm lên cùng một mặt cầu.

b/ Chứng minh rằng SB vuông góc với mặt phẳng ADE.

c/ Chứng minh rằng khi S di chuyển lên đường thẳng d, đường thẳng DE luôn luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn : Độc giả tự giải.

Chuyên đề 10 : DỰNG HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp dựng hình trong không gian được dựa trên cơ sở vững chắc của phép dựng hình trong mặt phẳng. Tuy nhiên một số công cụ như compa, thước thẳng đôi lúc lại không thể sử dụng được.

Nghĩa là ta phải quy định một số tiền lệ cơ bản nhất cho phép dựng : **đó là cách dựng mặt phẳng và giao tuyến của hai mặt phẳng.**

① **Một mặt phẳng gọi là đã dựng được, khi ta chỉ ra điều kiện xác định nó.**

② **Hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung, thì giao tuyến của chúng được gọi là đã dựng được.**

③ **Trong mỗi mặt phẳng biết trước, việc dựng hình trong đó bằng các công cụ thước kẻ và compa như trong hình học phẳng được xem là luôn luôn dựng được.**

Như vậy bài toán dựng hình vẫn phải tuân thủ 4 bước cơ bản :

❒ B_1 : Phân tích

❒ B_2 : Cách dựng

❒ B_3 : Chứng minh

❒ B_4 : Biện luận

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 223

Cho tứ diện SABC. Lấy M là điểm thuộc cạnh AS sao cho $\overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SM}$. Gọi G là trọng tâm ΔSBC. Dựng điểm N = MG $\cap$ (ABC).

Giải

- *Phân tích*

Giả sử dựng được N = GM $\cap$ (ABC), trong mp(SAG) gọi I = BC $\cap$ (SAG) $\Rightarrow$ N = MG $\cap$ AI.

- *Cách dựng*

Dựng I là trung điểm BC thì trong mp (SAG) dựng được N = MG $\cap$ AI

- *Chứng minh*

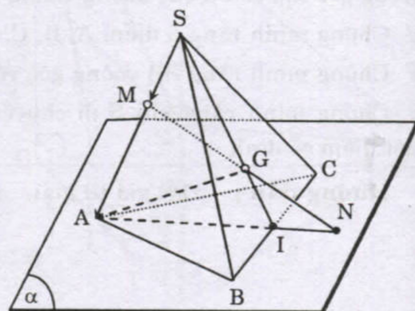
Để ý thấy N $\in$ AI (thỏa cách dựng)

$\Rightarrow$ N $\in$ (ABC) và N $\in$ MG

$\Rightarrow$ N = MG $\cap$ (ABC) (đpcm)

- *Biện luận*

Do : $\begin{cases} \overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SM} \\ \text{G là trọng tâm } \Delta SBC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{SM}{SA} \neq \dfrac{SG}{SI}$



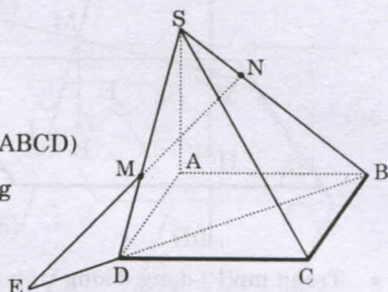
$\Rightarrow$ MG và AI không song song

$\Rightarrow$ Bài toán luôn có 1 nghiệm hình N = MG $\cap$ AI; thỏa ycbt.

Bài 224

Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành ABCD, Còn M, N thứ tự là điểm trên SD, SB. Dựng giao điểm E của MN và mặt phẳng (ABCD)

Giải



Giả sử bài toán dựng được, thì trong mp(SBD) :

$MN \cap BD = E \Rightarrow E = (ABCD) \cap MN$

Lúc đó ta nêu lên cách dựng điểm E như sau :

Trong mp(SBD), dựng $MN \cap BD = E \Rightarrow E = MN \cap (ABCD)$

Thật vậy, thường thường MN và BD không cùng phương

$\Rightarrow MN \cap BD = E$

Mà $BD \subset (ABCD)$

$\Rightarrow E = MN \cap (ABCD)$

Bài toán luôn có 1 nghiệm hình khi $MN \not\parallel BD$.

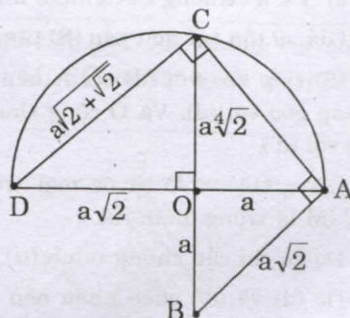
Bài toán vô nghiệm khi $MN \parallel BD$.

III. GIẢI TOÁN THI

Bài 225 (ĐẠI HỌC KHỐI A MIỀN BẮC – 1972)

Cho một đoạn thẳng a. Hãy dùng thước và compa để dựng đoạn thẳng: $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Giải



Để ý thấy : $a\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt[4]{2}\right)^2}$.

- Dựng tam giác vuông cân OAB ($\hat{O} = 90^0$) có cạnh góc vuông bằng a để có cạnh huyền $AB = a\sqrt{2}$.
- Tiếp đó dựng đường cao CO của ΔACD ($\hat{C} = 90^0$) có hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông xuống cạnh huyền bằng OA = a và $OD = a\sqrt{2}$.
- Đường cao của tam giác vuông đó chính là đoạn $a\sqrt[4]{2}$ và cạnh góc vuông DCA có hình chiếu xuống cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$ chính là đoạn $DC = a\sqrt{2+\sqrt{2}}$ là đoạn phải dựng.

Bài 226 (ĐỀ THI ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM – 1991)

Cho hai đường thẳng chéo nhau (d) và (d').

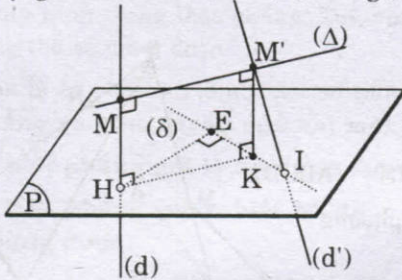
1/ Hãy dựng một đường thẳng (Δ) vuông góc với (d) tại M và cắt (d') tại M' sao cho $MM' = l$ (độ dài cho sẵn).

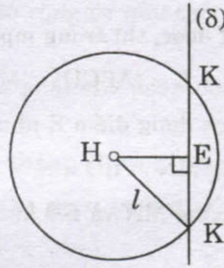
2/ Cho điểm $A \in (d)$ và điểm $A' \in (d')$. Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất mặt cầu (S) tiếp xúc với (d) và (d') lần lượt tại A và A' đã cho.

Giải

1/ Độc giả tự phân tích. Ở đây ta nêu cách dựng đường thẳng (Δ) :

- Dựng mp(P) vuông góc với (d) tại H.
- Dựng hình chiếu (δ) của (d') xuống (P).





- Trong mp(P) dựng đường tròn tâm H bán kính l, đường tròn này cắt (δ) ở K.
- Qua K dựng đường thẳng song song với (d). Đường thẳng này cắt (d') tại M' và dựng (Δ) qua M' song song với HK.

Thật vậy (Δ) song song với HK nên phải cắt (d) tại M.

Ngoài ra : HK ⊥ (d) ⇒ (Δ) ⊥ (d)

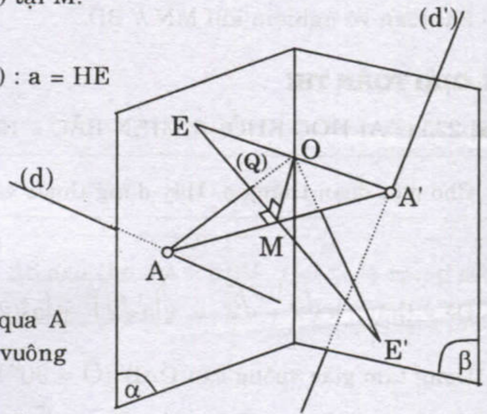
Biện luận : gọi a là khoảng cách giữa (d) và (d') : a = HE

Có 3 trường hợp :

a) $l > a$: có 2 nghiệm hình

b) $l = a$: có 1 nghiệm hình

c) $l < a$: không có nghiệm hình.



2/ Giả sử tồn tại mặt cầu (S) tâm O.

(S) tiếp xúc với (d) tại A nên O thuộc mp(α) qua A vuông góc với (d). Và O cũng thuộc mp(β) qua A' vuông góc với (d').

- OA = OA' ⇒ O thuộc mặt trung trực (Q) của đoạn AA' (M là trung điểm AA').

Do đó chỉ cần chứng minh (α), (β) và (Q) có chung một điểm duy nhất.

- Do (d) và (d') chéo nhau nên (α) và (β) không thể song song hoặc trùng nhau được. Như vậy chúng cắt nhau theo giao tuyến (Δ). Nếu (Δ) // (Q) hoặc (Δ) ⊂ (Q) thì (Δ) ⊥ AA' do đó (d) và (d') phải cùng phẳng : trái với giả thiết. Vậy (Δ) phải cắt (Q) tại một điểm duy nhất O.

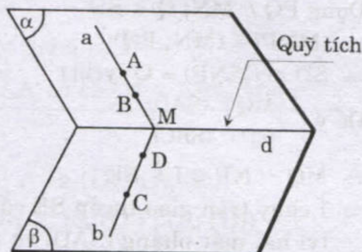
Điểm O đó chính là tâm mặt cầu tiếp xúc với (d) tại A và (d') tại A'.

Chuyên đề 11 : QUỸ TÍCH MỘT ĐIỂM TRONG KHÔNG GIAN

Loại I : QUỸ TÍCH TẬP HAY CÁC HỢP GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp tìm quỹ tích giao điểm M của hai đường thẳng (a), (b) trong không gian cần thực hiện 4 bước cơ bản :



- B_1 : Tìm 2 mặt phẳng cố định (α), (β) khác nhau thứ tự chứa mỗi đường thẳng (a), (b).
- B_2 : Tìm giao tuyến (d) của 2 mặt phẳng (α), (β) và chứng minh được điểm M cần tìm quỹ tích nằm trên giao tuyến (d) đó.
- B_3 : Giới hạn (nếu thấy có yêu cầu của khoảng chạy trong giả thiết) và làm phần đảo.
- B_4 : Kết luận quỹ tích hay tập hợp của những M là đường thẳng (d) hay một phần của đường thẳng (d) (nếu có giới hạn khoảng chạy).

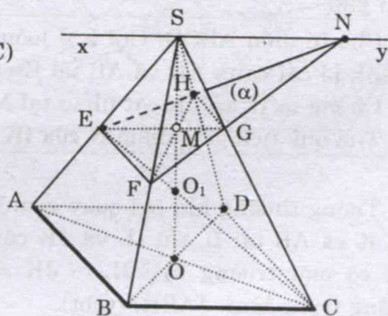
Ghi chú: *Khi giả thiết chỉ yêu cầu chứng minh điểm M nằm trên đường thẳng cố định (hay một phần đường thẳng cố định) ta không phải làm phần đảo.*

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 227

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Xét một mặt phẳng (α) quay quanh EF là đường trung bình của tam giác SAB. Cho biết α cắt SC và SD tại G và H. Tìm $\{M \mid M = EG \cap FH\}$.

Giải



Để ý dựng xSy // AD hoặc BC thì : xSy = (SAD) ∩ (SBC)

Lấy điểm N ∈ xSy ⇒ (α) ≡ (NEF)

$\Rightarrow \begin{cases} EN \cap SD = H : \text{đã được xác định.} \\ FN \cap SC = G : \text{đã được xác định.} \end{cases} \Rightarrow HG \,//\, EF$

Lại thấy : $\begin{cases} EG \subset (SAC) \\ FH \subset (SBD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \text{ ; với } O = AC \cap BD \end{cases}$

Do đó nếu : $EG \cap FH = M$, thì $M \in SO$ (1)

Giới hạn khoảng chạy : $\begin{cases} H \equiv G \equiv S \Rightarrow M \equiv S \text{ (lúc đó } N \equiv S) \\ H \equiv D \wedge G \equiv C \Rightarrow M \equiv O_1 = EC \cap SO \end{cases}$

⇒ SO_1 là đoạn giới hạn chứa M (2)

Đảo lại lấy điểm M_0 tùy ý trong đoạn SO_1 luôn tìm được (kéo dài) :

$FM_0 \cap SD = H_1$ và $EM_0 \cap SC = G_1$ (3)

Vậy từ (1), (2) và (3), ta có : $SO_1 = \{M \mid M = EG \cap PH\}$ (hay quỹ tích của M là đoạn SO_1) (ycbt).

Bài 228

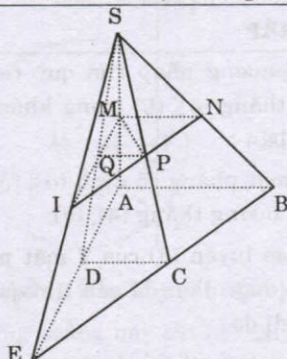
Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn AB. Gọi M, N là trung điểm SA; SB và P là điểm tuỳ ý trên cạnh SC.

a/ Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b/ Dựng $\{Q\} = (MNP) \cap SD$.

c/ Chứng minh rằng : nếu $I = MQ \cap NP$; $\forall P \in SC$ thì I nằm trên một đường cố định.

Hướng dẫn



a/ $(SAD) \cap (SBC) = SE$ trong đó $E = AD \cap BC$

b/ Dựng PQ // MN; $Q \in SD$

$\Rightarrow (MNP) \equiv (MN; PQ)$

$\Rightarrow SD \cap (MNP) = Q$ (ycbt)

c/ Để ý : $\begin{cases} MQ \subset (SAD) \\ NP \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow MQ \cap NP = I \in SE$

$\Rightarrow$ I chạy trên giao tuyến SE cố định (ycbt) (vì hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)).

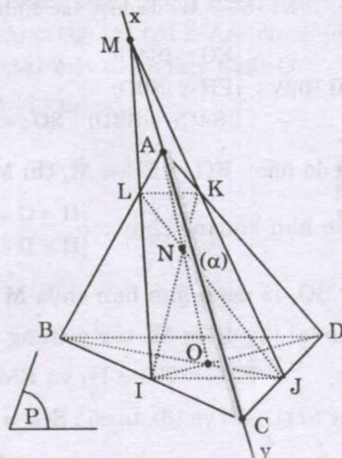
Bài 229

Cho hai đường thẳng cố định Ox, Oy nằm trong mặt phẳng (P). Gọi M, N là điểm cố định ở ngoài (P); còn (Q) là mặt phẳng lưu động chứa M và N. (Q) luôn luôn cắt Ox, Oy tại E và F.

a/ Chứng tỏ EF đi qua một điểm cố định.

b/ EN cắt FM tại D. Tìm quỹ tích của D.

Hướng dẫn



a/ Để ý MN cố định ngoài (P) và MN nằm trong (Q) nhưng :

$MN \cap (P) = I$: cố định

Lại thấy : $\begin{cases} EF \subset (Q) \\ MN \subset (Q) \end{cases}$

Vậy nếu MN cắt EF, thì giao điểm ấy phải là I.

$\Rightarrow$ EF qua I cố định (ycbt).

b/ Để ý $(ONE) \cap (OMF) = Oz$

$\Rightarrow$ Quỹ tích của D là tia $Oz = (M; Oy) \cap (N; Ox)$ (ycbt).

Bài 230

Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J luôn luôn là trung điểm của BC, CD.Một mặt phẳng (P) quay quanh IJ cắt cạnh AD và AB tại K và L.

a/ Chứng tỏ IL và JK cắt nhau tại M. Quỹ tích M ?

b/ Tìm quỹ tích giao điểm N của IK và JL.

Hướng dẫn

a/ Thông thường khi (α) quay quanh IJ và nó cắt AD tại K và AB tại L, thì IL và JK cắt nhau tại M (duy chỉ có một trường hợp $IL \cap JK = \varnothing$ là khi LK là đường trung bình ΔABD) (ycbt).

$\Rightarrow$ Quỹ tích M là hai tia Ax và Cy (nằm trên đường thẳng chúa cạnh AC (xem hình)) (ycbt).

b/ Quỹ tích N là đoạn AO (ycbt).

III. GIẢI TOÁN THI

Bài 231 (ĐỀ THI ĐẠI HỌC Y DƯỢC – 1992)

> Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng (D) và (D') cắt nhau ở O. Lấy điểm A, A' nằm ngoài (P) sao cho đường thẳng AA' cắt (P) tại điểm O' khác O.
>
> Gọi (Q) là một mặt phẳng chứa AA', mp(Q) cắt (D) và (D') lần lượt tại B và B'. Các đường thẳng AB và A'B' cắt nhau ở M, các đường thẳng A'B và AB' cắt nhau ở N.
>
> 1/ Tìm tập hợp các điểm M và N khi mp(Q) quay quanh AA'.
>
> 2/ Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.
>
> 3/ Xác định vị trí của mp(Q) để các tứ diện MOAA' và NOAA' có thể tích bằng nhau.

Giải

1/ Ta có : $\begin{cases} M \in AB \text{ nên M thuộc mặt phẳng xác định bởi A và (D) : (A; (D))} \\ M \in A'B' \text{ nên M thuộc mặt phẳng xác định bởi A' và (D') : (A; (D))} \end{cases}$

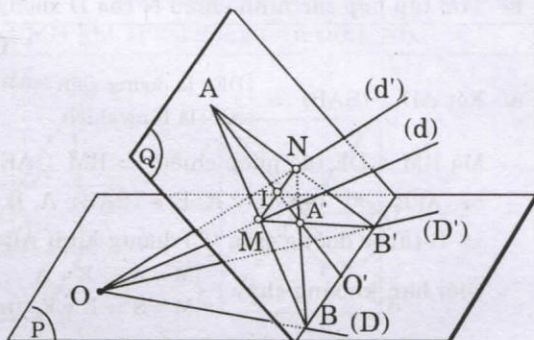
Do đó M thuộc giao tuyến (d) của hai mặt phẳng cố định nói trên.

Đảo lại lấy điểm $M \in (d) = mp(A; (D)) \cap mp(A'; (D'))$; $AM \cap (D) = B$; $A'M \cap (D') = B'$

$\Rightarrow$ B, O', B' thẳng hàng vì chúng thuộc giao tuyến $\Delta \equiv mp(P) \cap mp(ABB')$.

Vậy tập hợp các điểm M là giao tuyến (d) = (A; (D)) $\cap$ (A'; (D')).

- Tương tự tập hợp các điểm N là giao tuyến (d') = (A'; (D)) $\cap$ (A; (D')).

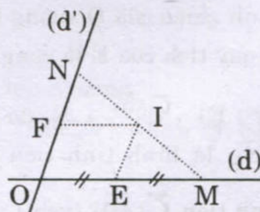


2/ Để ý thấy MN luôn luôn nằm trong mặt phẳng cố định xác định bởi hai đường thẳng cố định $(\beta) \equiv (d; d')$.

Mặt phẳng này cắt AA' cố định. Đó cũng là giao điểm của MN và AA'. Vậy khi (Q) lưu động quanh AA' thì MN luôn luôn đi qua điểm cố định I.

3/ Hai hình chóp M.OAA' và N.OAA' có chung đáy là tam giác AOA' nên thể tích của chúng bằng nhau nếu và chỉ nếu hai đường cao của chúng xuất phát từ M và N bằng nhau. Điều này đương tương với:

$$IM = IN$$



$\Rightarrow$ Xác định được M và N tức là xác định được (Q).

Từ điểm I cho sẵn dựng IE // d'; E $\in$ (d)

Trên (d) lấy điểm M đối xứng với O qua E.

$\Rightarrow$ MI cắt (d') ở N, đó là điểm phải dựng

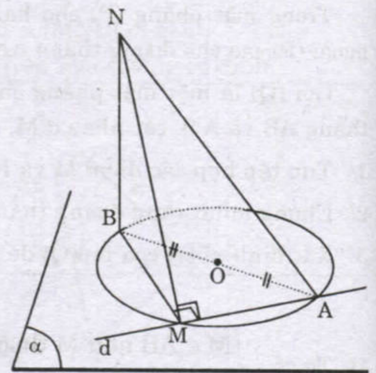
MN qua I và nhận I làm trung điểm : (đường trung bình trong tam giác OMN)

- Bài toán luôn luôn có một nghiệm hình.

Loại 2 : QUỸ TÍCH CỦA ĐIỂM CHIẾU

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp tìm quỹ tích những điểm chiếu M của điểm N xuống đường thẳng (d) quay quanh A cố định đồng thời (d) nằm trong mặt phẳng (α) cố định ta thực các bước như sau :



❒ B_1 : Tìm điểm cố định B ∈ (α) sao cho : $\begin{cases} NB \perp (\alpha) \text{ tại } B \\ \widehat{AMB} = 90^0 \end{cases}$

⇒ M ở trên đường tròn tâm O, đường kính AB ở trong mặt phẳng (α).

❒ B_2 : Quản lý phạm vi lưu động của (d) để giới hạn khoảng chạy cho quỹ tích và làm mệnh đề đảo.

⇒ Quỹ tích M là cả đường tròn hay một phần đường tròn (AB) đường kính AB (tùy theo khoảng chạy của M không có hoặc có giới hạn).

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 232

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD) và ABCD là hình chữ nhật. Một mặt phẳng α thay đổi nhưng luôn luôn qua BC và cắt SA tại M.

a/ Tìm tập hợp các hình chiếu E của D xuống BE.

b/ Tìm tập hợp các hình chiếu N của D xuống α.

Giải

a/ Xét AD ⊥ (SAB) ⇒ $\begin{cases} DE : \text{là đường xiên} \\ AE : \text{là hình chiếu} \end{cases}$

Mà BM ⊥ DE (do phép chiếu) ⇒ BM ⊥ AE

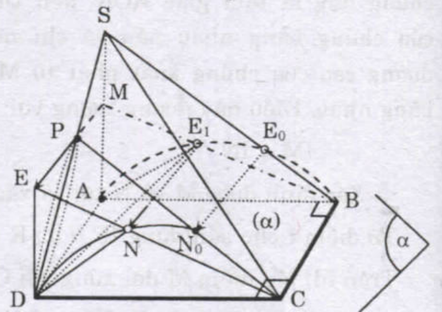
⇒ $\widehat{AEB} = 90^0$ (và để ý A, E ∈ (SAB); A, B cố định)

⇒ E thuộc đường tròn (C) đường kính AB.

Giới hạn khoảng chạy : $\begin{cases} M \equiv A \Rightarrow E \equiv A \\ M \equiv S \Rightarrow E \equiv E_0 \text{ (trong đó } E_0 \text{ là chân đường cao } AE_0 \text{ của } \Delta SAB) \end{cases}$

Đảo lại chọn E_1 tùy ý trên cung $\widehat{AE_0} \subset (C)$, kéo dài BE_1 cắt SA tại $M_1 \equiv (\alpha) \cap SA$ và $DE_1 \perp BM_1$ (hay E_1 là hình chiếu của D xuống BM_1).

Vậy quỹ tích của E là cung $\widehat{AE_0} \subset (C)$ (ycbt).



b/ Để ý : $E \xmapsto{\mathcal{T}(\overrightarrow{AD})} N$, do đó quỹ tích của N là cung $\widehat{DN_0}$ là hình tịnh tiến của cung $\widehat{AE_0}$ trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{AD})$ (ycbt).

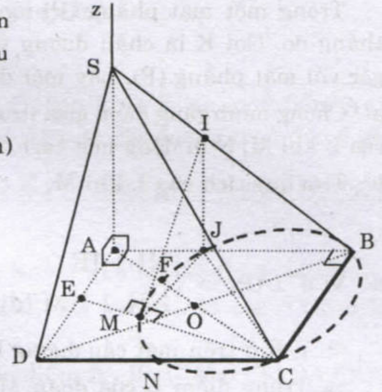
Bài 233

Cho hình vuông ABCD tâm O và tia Ax ⊥ (ABCD). Gọi S là điểm lưu động trên Ax và E lưu động trên cạnh AD. Xét điểm I là trung điểm SB khi S lưu động hãy tìm quỹ tích các điểm chiếu của I xuống CE.

Giải

Gọi J là trung điểm AB và M là hình chiếu của I xuống CE.

Để ý thấy IJ // SA ⇒ IJ ⊥ (ABCD) ⇒ $\begin{cases} IM: \text{là đường xiên} \\ JM: \text{là hình chiếu} \end{cases}$



Mà EC ⊥ IM (cách dựng M) ⇒ EC ⊥ JM

⇒ $\widehat{JMC} = 90^0$ (M; J; C ∈ (ABCD) cố định và J, C cố định)

⇒ M ∈ (C) : đường tròn đường kính JC.

Giới hạn khoảng chạy : $\begin{cases} E \equiv D \Rightarrow M \equiv N: \text{trung điểm CD} \\ E \equiv A \Rightarrow M \equiv F: \text{trung điểm AO} \end{cases}$

⇒ M ∈ $\widehat{FN}$ ⊂ (C)

Đảo lại lấy $M_1 \in \widehat{FN} \Rightarrow \widehat{JM_1C} = 90^0$

Theo định lý 3 đường vuông góc

⇒ CE ⊥ IM (M là hình chiếu của I xuống CE)

Vậy quỹ tích các điểm M là cung $\widehat{FN}$ ⊂ (C) (ycbt).

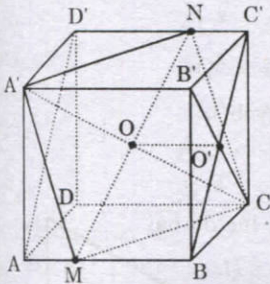
Bài 234

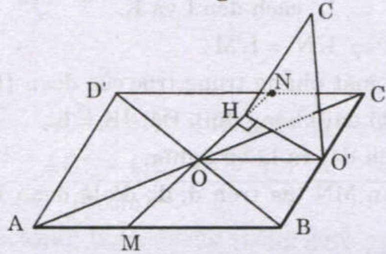
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên AB lấy điểm M. Mặt phẳng (A'MC) cắt C'D' tại N.

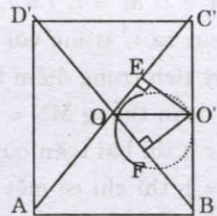
1/ Tứ giác A'MCN là hình gì ?

2/ Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc của C xuống MN khi M lưu động trên cạnh AB.

Hướng dẫn







1/ A'MCN hình bình hành (bạn đọc tự viết lời giải).

2/ Gọi H là hình chiếu của C xuống MN.

Trước hết ta nhận thấy MN luôn luôn đi qua tâm O của hình lập phương.

Mặt khác nếu O' là tâm của hình vuông BCC'B' thì CO' ⊥ (ABC'D'). Định lý ba đường vuông góc cho : $\begin{cases} CO' \perp (ABC'D') \\ CH \perp MN \end{cases}$ ⇒ O'H ⊥ MN ⇒ $\widehat{OHO'} = 90^0$

Vậy H thuộc đường tròn đường kính OO' vẽ trong mp(ABC'D').

Sau khi giới hạn khoảng chạy thì H chỉ lưu động trên cung $\widehat{EOF}$.

Sau khi làm phần đảo ta có quỹ tích của điểm H chỉ là cung $\widehat{EOF}$ nằm trên đường tròn đường kính OO' vẽ trong mp(ABC'D') (ycbt).

III. GIẢI TOÁN THI

Bài 235 (ĐẠI HỌC KHỐI A – MIỀN BẮC – 1973)

Trong một mặt phẳng (P) người ta cho một đường thẳng d và một điểm I ở ngoài đường thẳng đó. Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ I xuống d; d' là đường thẳng đi qua I vuông góc với mặt phẳng (P). Lấy một điểm M bất kỳ trên d, một điểm N bất kỳ trên d'.

a/ Chứng minh rằng điểm giữa (trung điểm) L của MN cách đều cả 4 điểm M, N, I, K. Tìm quỹ tích của L khi M, N di động một cách hoàn toàn tùy ý trên d, d'.

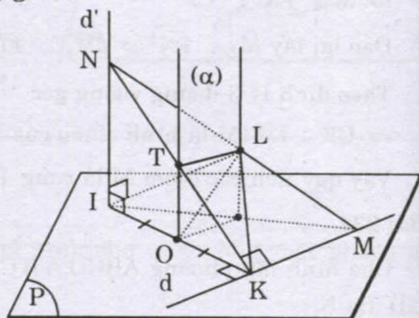
b/ Tìm quỹ tích của L khi M, N chạy trên d, d' sao cho đoạn thẳng MN có độ dài không đổi.

Giải

a/ Vì $d' \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} NI \perp IK \\ NK \perp KM \text{ (định lý 3 đường vuông góc)} \end{cases}$

$\Rightarrow$ I, K ở trên mặt cầu đường kính MN.

$\Rightarrow$ Trung điểm L của đoạn MN cách đều cả bốn điểm M, N, I, K (ycbt).



- Để ý IK cố định, L cách đều I và K (LI = LK theo chứng minh trên) khi M, N chạy một cách hoàn toàn tùy ý trên d, d' thì L nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn IK.
- Đảo lại, lấy điểm L' bất kỳ trên mặt phẳng trung trực của đoạn IK. Dựng mặt phẳng chứa d và L' cắt d' ở N', nối N'L' và kéo dài cắt d ở M'.

Ta chứng minh L' là trung điểm của M'N' $\Leftrightarrow$ L'N' = L'M. Gọi L'' là trung điểm của M'N'. Theo chứng minh trên ta có:

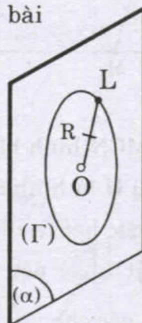
L''N' = L''M' = L''I = L''K. $\Leftrightarrow$ L'' cách đều I và K.

Từ đó suy ra L' trùng với L'' $\Leftrightarrow$ L'N' = L'M'.

Vậy quỹ tích trung điểm L là mặt phẳng trung trực của đoạn IK (ycbt).

b/ Giả sử đoạn thẳng MN = a (độ dài không đổi). Đặt IK = b.

- Nếu a < b thì bài toán quỹ tích đặt ra là vô nghĩa.
- Nếu a = b thì chỉ có một đoạn MN tựa trên d, d'; đó là đoạn IK, lúc đó bài toán trở nên tầm thường.
- Nên chỉ xét bài toán trong trường hợp a > b.



Gọi O là trung điểm của IK $\Rightarrow OL \subset (\alpha)$

$$\Rightarrow OL = \sqrt{LI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$$

$\Rightarrow$ L nằm trên đường tròn (Γ) tâm O,

bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$ nằm trong (α).

Đảo lại, với mọi điểm L' trên đường tròn ấy, ta dựng mặt phẳng chứa d và L' cắt d' ở N', nối N'L' và kéo dài cắt d ở M'.

Theo chứng minh ở câu a/

$$\Rightarrow L'N' = L'M' = L'I = \sqrt{L'O^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 - b^2) + \frac{b^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Vậy quỹ tích của trung điểm L của đoạn MN khi M, L chạy trên d, d' sao cho đoạn thẳng MN có độ dài không đổi a > b = IK là đường tròn tâm O (O là trung điểm IK), bán kính: $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$ nằm trong mặt phẳng trung trực của đoạn IK (ycbt).

Bài 236 (ĐẠI HỌC KHỐI A – MIỀN BẮC – 1974)

Trong mặt phẳng P, cho một đường tròn (C) cố định tâm O, bán kính R, và một điểm A cố định trên đường tròn ấy. Cho một đường kính BC quay quanh tâm O của đường tròn đó và gọi $\widehat{ABC}$ biến thiên là α ($0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$). Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng P người ta lấy một điểm S cố định sao cho AS = 2R.

a/ Chứng minh rằng tổng bình phương các cạnh của tứ diện SABC không phụ thuộc vào α.

b/ Tìm quỹ tích chân H của đường cao SH trong tam giác SBC. Với giá trị nào của α thì diện tích tam giác SBC đạt cực đại và cực đại đó bằng bao nhiêu ?

c/ Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC người ta lấy lần lượt các điểm A', B', C' sao cho SA.SA' = SB.SB' = SC.SC' = $3R^2$. Khi B, C thay đổi thì B', C' cũng thay đổi. Tuy nhiên hãy chứng minh rằng mặt cầu đi qua S, A', B', C' và mặt phẳng đi qua A', B', C' là cố định, Còn đường tròn đi qua S, B', C' thì luôn luôn đi qua một điểm cố định thứ hai, khác với điểm S.

Giải

a/ Gọi Σ là tổng bình phương các cạnh của tứ diện SABC :

$$\Rightarrow \quad \Sigma = AB^2 + AC^2 + BC^2 + SA^2 + SB^2 + SC^2$$

Trong tam giác vuông ABC ta có : $\begin{cases} AB = 2R\cos\alpha \\ AC = 2R\sin\alpha \end{cases}$

Như vậy :

$$AB^2 = 4R^2\cos^2\alpha \quad (1)$$
$$AC^2 = 4R^2\sin^2\alpha \quad (2)$$
$$BC^2 = 4R^2 \quad (3)$$
$$SA^2 = 4R^2 \quad (4)$$
$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = 4R^2 + 4R^2\cos^2\alpha \quad (5)$$
$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = 4R^2 + 4R^2\sin^2\alpha \quad (6)$$

Cộng theo vế $\Rightarrow \Sigma = 24R^2$ (đpcm).

b/ Hạ SH ⊥ BC ⇒ AH ⊥ BC (định lý ba đường vuông góc)

• Mặt khác H di động trong (P) và luôn luôn nhìn đoạn cố định AO dưới một góc vuông. Do đó H nằm trên đường tròn của mặt phẳng (P) nhận AO làm đường kính.

• Đảo lại : Lấy một điểm H bất kỳ trên đường tròn vừa tìm được. Nối H với O và kéo dài nó cắt đường tròn tâm O ở B và C.

Sau đónối SB, SC, SH. Ta cần chứng minh rằng SH là đường cao của tam giác SBC.

Thật vậy: H thuộc đường tròn đường kính OA nên AH ⊥ OH

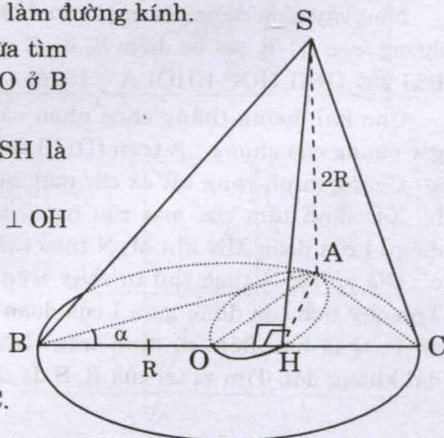
⇔ AH ⊥ BC

Mà SA ⊥ (P), BC ⊥ AH

⇒ SH ⊥ BC

(định lý ba đường vuông góc).

Điều đó chứng tỏ SH là đường cao của tam giác SBC.



Vậy quỹ tích H là đường tròn (γ) bán kính $R = \frac{1}{2}.AO$ (nằm trong mặt phẳng (P) (ycbt).

Đến đây xét : $S_{\Delta SBC} = dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2}BC.SH = R.SH \leqslant R.SO$ (1)

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow maxS_{\Delta BSC} = R.SO = R\sqrt{R^2 + (2R)^2} = \sqrt{5}.R^2$ (ycbt).

c/ Từ $SA.\ SA' = 3R^2 \Leftrightarrow SA' = \frac{3R^2}{SA} = \frac{3R^2}{2R} = \frac{3R}{2}$

Điều đó chứng tỏ A' là điểm cố định.

Bây giờ ta xét tứ giác AA'B'B.

Từ $SA.SA' = SB.SB' \Rightarrow$ Bốn điểm A, A', B', B cùng nằm trên một đường tròn. Tứ giác AA'B'B nội tiếp được trong đường tròn.

Nhưng trong tứ giác AA'B'B thì $\hat{A}$ vuông nên góc đối của nó B' cũng vuông $\Rightarrow A'B' \perp BB' \Leftrightarrow A'B' \perp SB'$.

Một cách tương tự xét tứ giác AA'C'C $\Rightarrow A'C' \perp SC'$

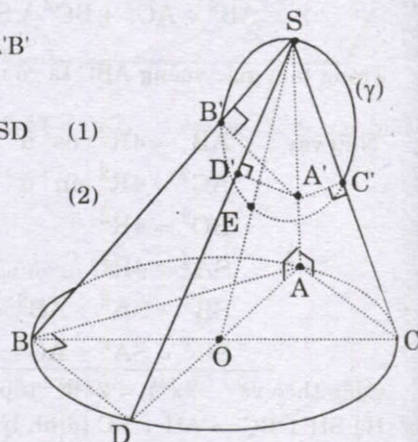
$\Rightarrow$ B' và C' nằm trên mặt cầu đường kính SA' cố định. Mặt cầu qua S, A', B', C' cố định.

- Kéo dài AO cắt đường tròn (C) tâm O tại điểm D, lấy điểm $D' \in SD$ sao cho: $SD.SD' = 3R^2$.

Chứng minh tương tự như trên $\Rightarrow A'D' \perp SD$

Do đó : $\left.\begin{matrix} BD \perp AB \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp A'B'$

Đồng thời : $\left.\begin{matrix} A'B' \perp SB \\ A'B' \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'B' \perp (SBD) \Rightarrow A'B' \perp SD$ (1)



Chứng minh tương tự ta có : $A'C' \perp SD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SD \perp (A'B'C')$.

$\Rightarrow$ mp(A'B'C') luôn luôn đi qua điểm A' cố định và vuông góc với đường thẳng cố định SD.

$\Rightarrow$ mp(A'B'C') là mặt phẳng cố định (ycbt).

- Đường tròn (γ) đi qua S, B', C' là tương giao của mặt cầu cố định (đường kính SA') với mp(SBC).
- mp(SBC) thay đổi nhưng luôn luôn đi qua đường thẳng cố định SO.

Như vậy giao điểm của mặt cầu đường kính SA' với SO là điểm E cố định. Điểm E đó thuộc đường tròn (γ) đi qua ba điểm S, B', C'; đó là điểm cố định thứ hai, khác với điểm S (ycbt).

Bài 237 (ĐẠI HỌC KHỐI A – 1975)

Cho hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau (D) và (Δ). Gọi AB là đường vuông góc chung của chúng : A trên (D), B trên (Δ). M là một điểm trên (D), N là một điểm trên (Δ).

a/ Chứng minh rằng tất cả các mặt của tứ diện ABMN đều là những tam giác vuông.

b/ Xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN. Tìm quỹ tích của điểm giữa (trung điểm) I của đoạn MN khi M, N theo thứ tự chạy trên (D) và (Δ).

c/ Giả sử M, N theo thứ tự chạy trên (D) và (Δ) sao cho đoạn MN có độ dài không đổi là $2l$. Tìm quỹ tích của điểm giữa I của đoạn MN.

d/ P, Q là hai điểm cố định trên (D); R, S là hai điểm chạy trên (Δ) sao cho đoạn RS có độ dài không đổi. Tìm vị trí của R, S để diện tích toàn phần của tứ diện PQRS là nhỏ nhất.

Giải

a/ Ta có : AB là đường vuông góc chung của (D) và (Δ)

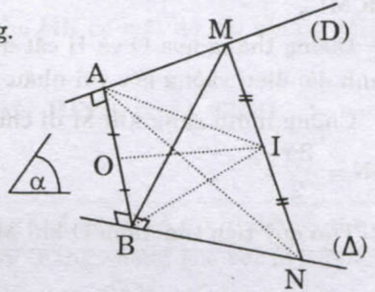
⇒ ΔMAB vuông góc ở A và ΔNBA vuông góc ở B (ycbt).

Xét : $\left.\begin{array}{l}(D) \perp (AB)\\(D) \perp (\Delta)\end{array}\right\}$ ⇒ (D) vuông góc với mặt phẳng (AB, Δ)

⇒ (D) ⊥ AN ⇔ AM ⊥ AN ⇒ ΔMAN vuông góc ở A (ycbt)

$\left\{\begin{array}{l}MA \perp (ABN)\\AB \perp BN\end{array}\right.$ ⇒ MB ⊥ BN (định lý ba đường vuông góc)

Do đó tam giác NBM vuông góc ở B (ycbt).



b/ Để ý A và B luôn luôn nhìn đoạn MN dưới một góc vuông.

⇒ A và B cùng nằm trên mặt cầu đường kính MN.

(Xem Đề ĐẠI HỌC KHỐI A – 1973 – MIỀN BẮC)

Vậy quỹ tích điểm giữa I của đoạn MN là mặt phẳng trung trực của đoạn AB (ycbt).

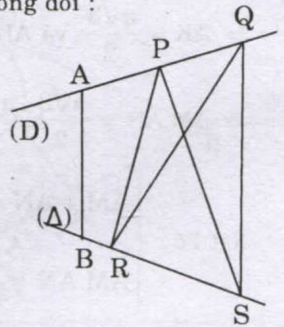
c/ Vậy quỹ tích của điểm giữa I của đoạn MN khi M, N thay đổi sao cho đoạn MN = $2l$ không đổi, là giao tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB với mặt cầu tâm A, bán kính l.

Để ý quỹ tích cần tìm cũng chính là giao tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB với mặt cầu tâm B, bán kính l. Hoặc là đường tròn với tâm là điểm giữa O của đoạn AB, bán kính $R = \sqrt{l^2 - \frac{AB^2}{4}}$, nằm trong mặt phẳng trung trực của đoạn AB (ycbt).

d/ Ta có : $\left.\begin{array}{l}(\Delta) \perp (D)\\(\Delta) \perp (AB)\end{array}\right\}$ ⇒ (Δ) ⊥ (AB, D) ⇒ (Δ) ⊥ PB và (Δ) ⊥ QB.

Vì P, Q, B cố định nên PB và QB không đổi, hơn nữa RS cũng không đổi :

$$\left\{\begin{array}{l}dt(\Delta PRS) = \frac{1}{2}PB.RS = s_1 = const\\dt(\Delta QRS) = \frac{1}{2}QB.RS = s_2 = const\end{array}\right. \quad (1)$$



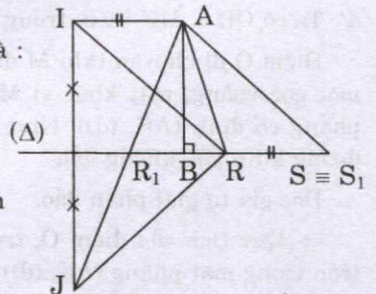
Tương tự như trên ta có : RA ⊥ (D) và SA ⊥ (D), ta có :

$$\left\{\begin{array}{l}dt(\Delta RPQ) = \frac{1}{2}PQ.RA\\dt(\Delta SPQ) = \frac{1}{2}PQ.SA\end{array}\right. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có diện tích toàn phần của tứ diện PQSR là :

$S_{tp} = s_1 + s_2 + \frac{1}{2}PQ(RA + SA)$

$\min S_{tp}$ xảy ra ⇔ min(RA + SA) xảy ra.



Xét bài toán phẳng : Kẻ AI // (Δ) và AI = RS. Gọi J là điểm đối xứng của I đối với (Δ).

Nối JR ⇒ RJ = RI = AS ⇔ RA + SA = RA + RJ

A và J là cố định, R chạy trên (Δ), nên (RA + RJ) nhỏ nhất khi và chỉ khi R ở vị trí R_1 là giao điểm của AJ với (Δ). Tương ứng với R_1, khi đó vì : $AR_1 = JR_1 = IR_1 = AS_1$.

⇒ ΔAR_1S_1 là cân. Do đó B là điểm giữa của R_1S_1. Như vậy diện tích toàn phần S của tứ diện PQRS là nhỏ nhất khi đoạn RS nhận B làm điểm giữa (ycbt).

Bài 238 (ĐẠI HỌC KHỐI A – 1975)

Cho tam giác đều ABC có cạnh là a. Một đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng của tam giác ABC tại A, M là một điểm trên đường thẳng (d). H là trực tâm của tam giác ABC. O là trực tâm của tam giác BCM.

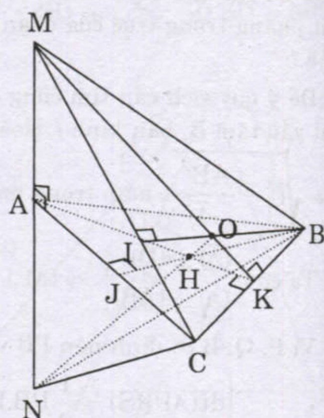
a/ Chứng minh rằng MC vuông góc với mặt phẳng (BOH), và OH vuông góc với mặt phẳng (BCM).

b/ Đường thẳng qua O và H cắt đường thẳng (d) ở N. Chứng minh rằng tứ diện BCMN có các cạnh đối diện vuông góc với nhau.

c/ Chứng minh rằng khi M di chuyển trên (d) thì tích AM.AN không đổi. Tính AM, AN, biết $MN = \dfrac{3a}{2}$.

d/ Tìm quỹ tích của điểm O khi M di chuyển trên (d).

Giải



Hai câu a) và b) độc giả xem phần cơ bản.

c/ Ta có $\Delta OHK \backsim \Delta AHN$.

Mặt khác $\Delta OHK \backsim \Delta AMK$

$\Rightarrow \Delta AHN \backsim \Delta AMK \Rightarrow \dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AH}{AM}$

$\Leftrightarrow AM.AN = AK.AH$

Xét AK là đường cao của Δ đều ABC cạnh a.

$\Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH = \dfrac{2}{3}AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow AM.AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2}{2}$ (không đổi) (đpcm)

Xét hệ : $\begin{cases} AM + AN = \dfrac{3a}{2} \ (= MN) \\ AM.AN = \dfrac{a^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM = \dfrac{a}{2} \\ AN = a \end{cases} \vee \begin{cases} AN = \dfrac{a}{2} \\ AM = a \end{cases}$ (ycbt).

d/ Ta có OH ⊥ MK (K là trung điểm của BC). Tam giác ABC cố định nên HK không đổi.

Điểm O di chuyển (khi M di chuyển trên (d)) nhưng luôn luôn nhìn đoạn cố định HK dưới một góc vuông; mặt khác vì M di chuyển trên (d) và K cố định nên O luôn nằm trong mặt phẳng cố định (AK, (d)). Như vậy điểm O nằm trên đường tròn thuộc mặt phẳng (AK, (d)) đường kính HK không đổi.

Độc giả tự giải phần đảo.

⇒ Quỹ tích của điểm O, trực tâm của tam giác MBC, khi M di chuyển trên (d) là đường tròn trong mặt phẳng (AK, (d)) đường kính HK không đổi (ycbt).

Bài 239 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – 1976)

Trên trục X'AX song song và cùng chiều với trục hoành x'Ox trong mặt phẳng (P) ta lấy một điểm M và trên trục Y'BY song song và cùng chiếu với trục tung y'Oy (trong mặt phẳng (P) ta lấy một điểm N.

a/ Gọi I là trung điểm của MN. Chứng tỏ rằng I ở trong mặt phẳng (P).

b/ Chứng tỏ rằng $2x = \overline{AM} = 2y = \overline{BN}$ và từ đó suy ra quỹ tích Δ_k của I khi M và N di động sao cho $\overline{AM} + \overline{BN} = k$, với k là một hằng số cho trước, Δ_k là một đường thẳng. Chứng tỏ rằng khi k thay đổi, Δ_k luôn luôn song song với một đường thẳng cố định.

c/ Chứng minh các hệ thức : $\overline{MN^2} = \overline{AB^2} + \overline{AM^2} + \overline{BN^2} = 4(a^2 + \overline{OI^2})$.

Từ đó suy ra quỹ tích của I khi M và N di động thế nào cho MN có một độ dài không đổi l.

Hướng dẫn

Độc giả có thể xem sách **TUYỂN TẬP 500 BÀI TOÁN HÌNH GIẢI TÍCH** của cùng nhóm tác giả.

Bài 240 (ĐẠI HỌC KHỐI A TP.HCM – 1976)

Trong mặt phẳng (P), cho một điểm O cố định một đường thẳng (d) cố định không đi qua O, các cạnh Ox, Oy cắt (d) theo thứ tự ở A và B. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và đi qua O, lấy một điểm S. Gọi a là khoảng cách từ O đến (d), $\widehat{OAB} = \alpha$.

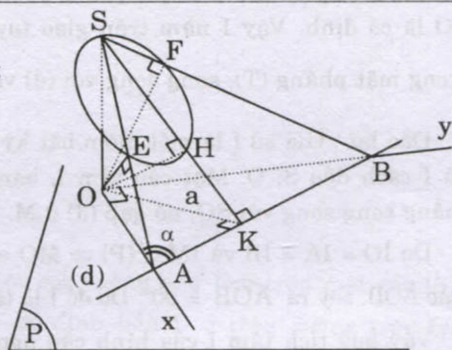
a/ Tính góc α khi $OS = \dfrac{8a}{3}$ và $SA = \dfrac{5}{3}OA$.

b/ Hạ $OE \perp SA$, $OF \perp SB$. Tìm quỹ tích của các điểm E, F khi góc vuông xOy quay quanh O.

c/ Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB, I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB, chứng minh rằng O, G, I thẳng hàng.

d/ Tìm quỹ tích tâm I khi góc vuông xOy quay quanh O. Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện SOAB luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

Giải



a/ Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ O xuống (d), thì:

$$\sin\alpha = \frac{OK}{OA} \Rightarrow OA = \frac{a}{\sin\alpha}$$

ΔSOA vuông $\Rightarrow SA^2 = SO^2 + OA^2$ (1)

Với giả thiết : $SO = \dfrac{8a}{3}$;

$$SA = \frac{5}{3}OA = \frac{5}{3}\frac{a}{\sin\alpha}$$

Lúc đó : $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad \dfrac{25a^2}{9\sin^2\alpha} = \dfrac{64a^2}{9} + \dfrac{a^2}{\sin^2\alpha} \Leftrightarrow 25 = 64\sin^2\alpha + 9$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = -\dfrac{1}{2} \ (\alpha > 180^0 \text{ vô lý}) \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \alpha = 30^0 \text{ (ycbt).}$$

b/ Để ý đến đoạn SO cố định và $\widehat{OES} = \widehat{OFS} = 90^0$

⇒ E và F nằm trên mặt cầu (S) đường kính SO. Mặt khác, E và F di chuyển nhưng luôn luôn nằm trong mặt phẳng (S; d) cố định. Vậy E và F nằm trên đường tròn $(\gamma) \equiv (S) \cap (S; d)$.

Hạ $OH \perp SK$, ta có $H \in (S)$

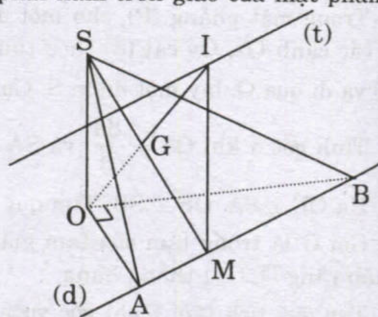
Mặt phẳng (SOK) là mặt đối xứng của hình cầu (S). Ta lại thấy mặt phẳng (S; d) vuông góc với mặt phẳng (SOK).

⇒ Đường tròn (γ) nằm trong mặt phẳng (S; d) phải nhận SK làm trục đối xứng. Nhưng H cũng thuộc (γ) nên SH chính là đường kính của đường tròn đó.

Đảo lại : Lấy một điểm F trên (γ), $F \neq S$ và $\neq H$. Nối SF, vì SF thuộc mặt phẳng (S; d), do đó SF kéo dài cắt (d) ở B. Nối OB, dựng góc vuông BOA trong mặt phẳng (A trên d). Nối SA, nó cắt đường tròn (γ) tại E. Vì E, F nằm trên (γ) nên E, F nằm trên mặt cầu đường kính SO, do đó : $OE \perp SA$; $OF \perp SB$

Vậy quỹ tích của E và F là đường tròn (γ), giao của mặt cầu đường kính SO và mặt phẳng (S; d), trừ hai điểm S và H (ycbt).

c/ Gọi M là điểm giữa của AB. Vì ΔAOB vuông ở O nên M chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Tâm I của hình cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB phải nằm trên giao của mặt phẳng (Δ) vuông góc với (P) tại điểm M.



Do đó ta có MI // SO và SO = 2MI.

Nối OI, cắt trung tuyến SM của tam giác SAB tại G ' :

$$\Rightarrow \frac{G'M}{G'S} = \frac{MI}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{G'M}{SM} = \frac{1}{3}$$

Vậy G' trùng với trọng tâm G của tam giác SAB. Nói cách khác ba điểm O, G, I thẳng hàng (đpcm).

d/ Khi góc vuông AOB quay quanh O, điểm M chạy trên (d).

Xét mặt phẳng (T) đi qua (d) và vuông góc với (P), còn mặt phẳng trung trực (R) của đoạn SO là cố định. Vậy I nằm trên giao tuyến của (R) và (T), đó chính là đường thẳng (t) nằm trong mặt phẳng (T), song song với (d) và cách (d) một khoảng bằng $\frac{1}{2}SO$.

Đảo lại : Giả sử I là một điểm bất kỳ trên (t). I nằm trong mặt phẳng trung trực R của SO và I cách đều S, O. Mặt cầu tâm I, bán kính SI = OI cắt (d) ở A và B. Từ I kẻ một đường thẳng song song với SO, nó gặp (d) ở M.

Do IO = IA = IB và $IM \perp (P) \Rightarrow MO = MA = MB$, tức là M là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác AOB, suy ra $\widehat{AOB} = 90^0$. Do đó I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB với $\widehat{AOB} = 90^0$.

Vậy quỹ tích tâm I của hình cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB là đường thẳng (t) là giao của mặt phẳng (R) và mặt phẳng (T) (ycbt).

Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB luôn luôn đi qua hai điểm cố định S và O.

Vì (d) là trục đối xứng của đường tròn qua A, O, B.

⇒ O' đối xứng với O qua (d) cũng thuộc mặt cầu và O' cũng cố định.

Vậy khi góc vuông AOB quay quanh O thì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB luôn đi qua vòng tròn cố định đi qua ba điểm S, O, O' (đpcm).

Bài 241 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM – ĐÀ NẴNG – 1978)

Trong không gian từ một điểm A ngoài mặt phẳng (P), người ta hạ đường vuông góc AB và một đường xiên AC xuống mặt phẳng (P) (B và C nằm trên (P). Điểm M di chuyển trên đường tròn đường kính BC trong mặt phẳng (P).

a/ Chứng minh rằng : $AB^2 + BM^2 + MC^2 = AC^2$; $AM^2 + BC^2 = BM^2 + AC^2$

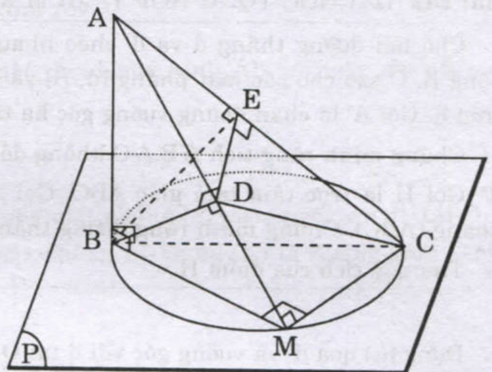
b/ Tìm góc phẳng của nhị diện cạnh AM tạo nên bởi các mặt phẳng (AMB) và (AMC).

c/ Gọi D và E là các hình chiếu vuông góc của B lên các đường thẳng AM, và AC. Chứng minh rằng BD vuông góc với AC và DE. Tìm quỹ tích của D khi M di chuyển.

d/ Chứng minh rằng bốn điểm C, D, E, M nằm trên cùng một đường tròn.

Giải

a/ Ta có : $\left.\begin{matrix} AB \perp (P) \\ MB \perp MC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM \perp MC$ (định lý 3 đường vuông góc)



Các tam giác ABM, BMC, AMC, ABC đều vuông góc theo thứ tự tại B, M. Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông ABM, AMC, ta có :

- $AB^2 + (BM^2 + MC^2) = AB^2 + BC^2$ (1)

  $\Rightarrow AB^2 + BM^2 + MC^2 = AC^2$ (đpcm)

- $AM^2 + BC^2 = (AB^2 + BM^2) + BC^2$

  $\Rightarrow AM^2 + BC^2 = MB^2 + (AB^2 + BC^2)$

  $\Rightarrow AM^2 + BC^2 = BM^2 + AC^2$ (đpcm).

b/ Ta có : $\left.\begin{matrix} BD \perp AM \\ BD \perp MC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (AMC) \Rightarrow (AMC) \perp (AMB)$

$\Rightarrow \varphi = \widehat{[(AMC); (AMB)]} = \widehat{(AM)} = \dfrac{\pi}{2}$ (ycbt).

c/ Đã có : $DB \perp (AMC) \Rightarrow \begin{cases} BD \perp AC \\ DB \perp DE \end{cases}$ (ycbt)

Để ý : $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BE \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (BDE)$

$\Rightarrow$ D ở trong mặt phẳng cố định $(\beta) \equiv (BDE)$.

□ **Thuận :**

Trong không gian D nhìn đoạn BC cố định dưới một góc vuông nên D ở trên mặt cầu (S) đường kính BC, nhưng trong (β), $\widehat{BDE} = 90^0$ và BE cố định nên D ở trên đường tròn (γ) đường kính BE và $(\gamma) \equiv (S) \cap (\beta)$.

□ **Đảo :** Chọn D tùy ý, $D \in (\gamma) \Rightarrow \exists M \in (BC) : D = ch_{/AM} B$.

Lấy 1 điểm D bất kỳ trên (γ), đường thẳng AD cắt (P) tại M.

Ta có : $D \in (\gamma) \Rightarrow DB \perp DE$

Ta lại có $BD \perp AC$ (vì $AC \perp (\beta)$), do đó : $DB \perp (AMC)$

$\Rightarrow DB \perp MC$ và $BD \perp AM$

Mặt khác : $MC \perp AB$ nên $MC \perp (ABM)$ $\Rightarrow MC \perp MB \Rightarrow M \in (\gamma)$

Vậy : $D = {}^{ch}/_{AM} .B$

Rõ ràng D tồn tại khi và chỉ khi M tồn tại.

Khi: $\begin{cases} M \equiv B \Rightarrow AM \equiv AB; D \equiv B. \\ M \equiv C \Rightarrow AM \equiv AC; D \equiv E. \end{cases}$

Do đó khi M di động trên đường tròn đường kính BC thì D di động trên cả đường tròn (γ) đường kính BE đựng trong (β).

Vậy quỹ tích D là đường tròn (γ) đường kính BE và $(\gamma) \equiv (S) \cap (\beta)$ (ycbt).

d/ Để ý $DE \perp EC$ (định lý 3 đường vuông góc)

Tứ giác MCED có 2 góc đối $\hat{M} = \hat{E} = 90^0$. Nên nội tiếp trong một đường tròn đường kính DC.

Bài 242 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP TP.HCM KHỐI A, B – 1993)

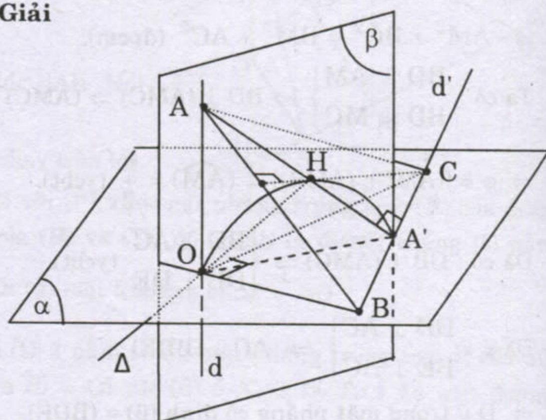
Cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau và vuông góc với nhau. Trên d' lấy hai điểm lưu động B, C sao cho các mặt phẳng (d, B) và (d, C) vuông góc với nhau. A là một điểm lưu động trên d. Gọi A' là chân đường vuông góc hạ từ A xuống d'.

1/ Chứng minh rằng tích A'B.A'C không đổi.

2/ Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Gọi Δ là đường thẳng đi qua H và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn đi qua một điểm cố định.

3/ Tìm quỹ tích của điểm H.

Giải



1/ Dựng (α) qua d' và vuông góc với d tại O.

Ta có : $\begin{cases} AA' \perp d' \\ AO \perp d' \end{cases}$

$\Rightarrow d' \perp (AOA')$

$\Rightarrow d' \perp OA'$ tại A'.

Mà d' cố định và O cố định.

$\Rightarrow$ A' cố định

$\Leftrightarrow OA' = const$

Khi đó : $BA'.CA' = A'O^2 = const$

$\Rightarrow$ (đpcm).

2/ Ta có: $\begin{cases} AB \perp CH \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (COH) \Rightarrow AB \perp OH$ (1)

Nhưng: $BC \perp (AA'O) \Rightarrow BC \perp OH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH \perp (ABC)$

Để ý thấy, Δ qua H và vuông góc với (ABC)⇒ Δ qua O cố định (đpcm).

3/ Gọi $(\beta) \equiv (d; A') \Rightarrow (\beta)$ cố định.

Ta có: $\begin{cases} H \in (\beta) \\ OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AA' \end{cases}$

⇒ Quỹ tích H là đường tròn đường kính OA' trong mặt phẳng (β). (Độc giả tự giới hạn khoảng chạy và làm phần đảo) (ycbt).

Bài 243 (ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG – 1993)

Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD. Gọi (Q) là mặt phẳng vuông góc với (P) và chứa AB.

1/ Chỉ rõ cách dựng quỹ tích (K) của điểm M luôn nhìn các đoạn AB và AD dưới một góc vuông.

2/ Đường thẳng DM cắt (Q) tại M'. Tìm quỹ tích của M'.

3/ Mặt phẳng chứa (K) cắt CD tại I, đường thẳng IM cắt K tại điểm thứ hai N. Đường thẳng DN cắt (Q) tại N'. Chứng tỏ rằng M' N' // AB.

Giải

1/ Ta có : $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ M thuộc mặt cầu đường kính AB

$\widehat{AMD} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ M thuộc mặt cầu đường kính AD

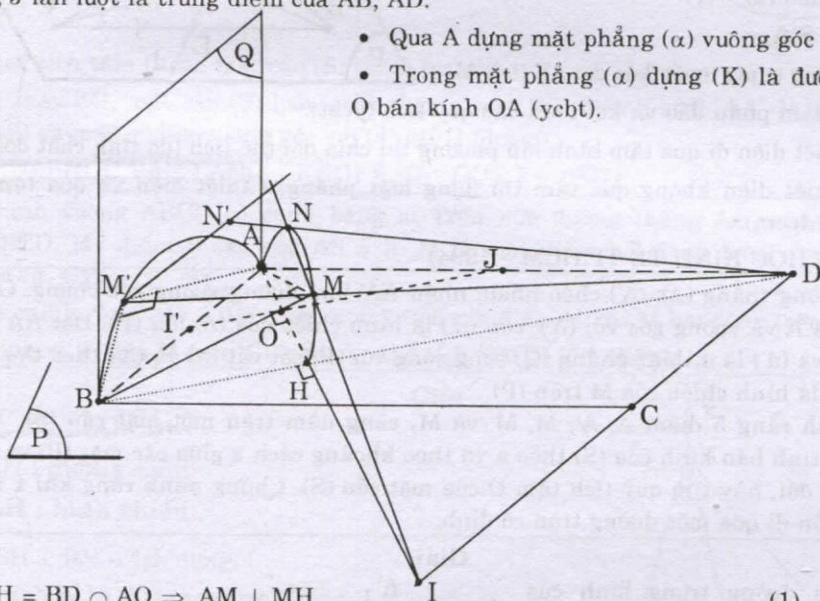
$\Rightarrow$ Quỹ tích M là đường tròn (K), là giao của mặt cầu đường kính AB với mặt cầu đường kính AD.

❒ **Cách dựng**

• Gọi I'; J lần lượt là trung điểm của AB; AD.

• Qua A dựng mặt phẳng (α) vuông góc với JI' tại O.

• Trong mặt phẳng (α) dựng (K) là đường tròn tâm O bán kính OA (ycbt).



2/ Gọi : H = BD $\cap$ AO $\Rightarrow$ AM $\perp$ MH (1)

Ta có : $\begin{cases} (K) \perp I'J \\ BD \parallel I'J \end{cases} \Rightarrow (K) \perp BD \Rightarrow AM \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AM $\perp$ (BDM) $\Rightarrow$ AM $\perp$ BM'

Mặt khác : AD $\perp$ (Q) $\Rightarrow$ AD $\perp$ BM'

Nên : BM' $\perp$ (ADM') $\Rightarrow$ BM' $\perp$ AM'

Vậy M' lưu động trên đường tròn đường kính AB trong mặt phẳng (Q) (đpcm).

3/ Ta có : $\begin{cases} (IMD) \cap (Q) = M'N' \\ DI \parallel AB \end{cases} \Rightarrow$ M'N' // AB (đpcm).

Bài 244 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ NỘI – 1994)

1/ Trong mặt phẳng (P) cho ΔABC. Tìm quỹ tích các điểm M trong (P) sao cho $S_{\Delta MAB} = S_{\Delta MAC}$.
2/ Một thiết diện chia thể tích hình lập phương thành hai phần bằng nhau. Chứng minh rằng thiết diện đó đi qua tâm của hình lập phương.

Hướng dẫn

1/ Ta viết : $S_{\Delta MAB} = S_{\Delta MAC}$ khi một trong hai khả năng sau xảy ra :

❒ **TH_1 :** Đường cao hạ từ B, C đến đáy MA bằng nhau

⇒ M ∈ đường thẳng (d) // BC đi qua A (trừ A).

❒ **TH_2 :** M nằm trên đường thẳng D chứa trung tuyến AE.

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{\Delta MBE} = S_{\Delta MEC} \quad (1) \\ S_{\Delta ABE} = S_{\Delta AEC} \quad (2) \end{cases}$$

Hiệu diện tích (2) – (1)

⇒ $S_{\Delta MAB} = S_{\Delta MAC}$

⇒ M ∈ đường trung tuyến kéo dài AE (trừ A).

Độc giả tự làm phần đảo và kết luận cho quỹ tích (ycbt).

2/ (⇒) Nếu thiết diện đi qua tâm hình lập phương thì chia đôi thể tích (do tính chất đối xứng).

(⇐) Nếu thiết diện không qua tâm thì dựng mặt phẳng // thiết diện và qua tâm ⇒ gặp mâu thuẫn ⇒ (đpcm).

Bài 245 (ĐẠI HỌC KINH TẾ TP.HCM – 1994)

Cho hai đường thẳng (Δ), (Δ') chéo nhau, nhận AA' làm đường vuông góc chung. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (Δ'), còn (d') là hình chiếu của (Δ) lên (P). Đặt AA' = a, góc nhọn giữa (Δ) và (d') là α. Mặt phẳng (Q) song song với (P) cắt cắt (Δ) và (Δ') theo thứ tự tại M và M'. Gọi M_1 là hình chiếu của M trên (P).
1/ Chứng minh rằng 5 điểm A, A', M, M' và M_1 cùng nằm trên một mặt cầu (S). Xác định tâm O của (S) tính bán kính của (S) theo a và theo khoảng cách x giữa các mặt (P) và (Q).
2/ Khi x thay đổi, hãy tìm quỹ tích tâm O của mặt cầu (S). Chứng minh rằng khi x thay đổi, mặt cầu (S) luôn đi qua một đường tròn cố định.

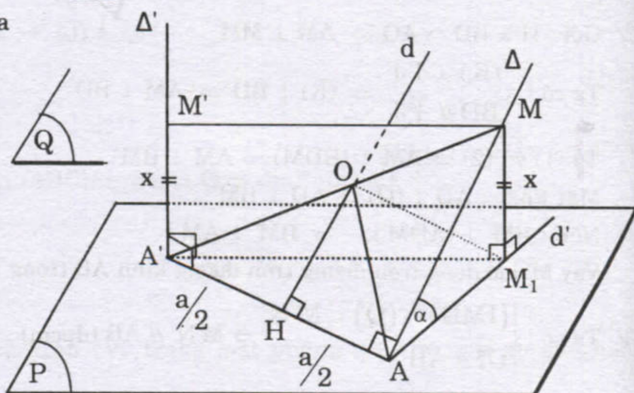
Giải

1/ Gọi OH là đường trung bình của ΔA'AM, ta có : OH // (Δ)

$$\Rightarrow \begin{cases} M'O = \dfrac{1}{2} A'M \\ M_1O = \dfrac{1}{2} A'M \\ AO = \dfrac{1}{2} A'M \end{cases}$$

⇒ $M'O = M_1O = AO = OA' = OM$

Vậy 5 điểm A; A'; M; M' và M_1 cùng nằm trên một mặt cầu (S) tâm O (trung điểm của A'M) (đpcm).



Ta có : $\begin{cases} AM = \dfrac{x}{\sin\alpha} \\ A'M = \sqrt{A'A^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{x^2}{\sin^2\alpha}} \end{cases}$

Vậy bán kính của mặt cầu (S) là : $R = \dfrac{A'M}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + \dfrac{x^2}{\sin^2\alpha}}}{2}$ (ycbt).

2/ Xét trong mặt phẳng cố định (A'; Δ). Giả sử gọi (d) ≡ OH là đường trung trực của AA', ta có :

$\begin{cases} (d) // \Delta \\ \Delta \text{ cố định} \end{cases} \Rightarrow$ (d) cố định

Nhận thấy, khi x thay đổi thì M sẽ di động trên Δ.

Mà: $\begin{cases} O = A'M \cap (d) \\ \overrightarrow{A'O} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'M} \end{cases}$

Vậy quỹ tích tâm O của mặt cầu (S) là (d) (ycbt).

Khi x thay đổi, mặt cầu (S) luôn chứa đường tròn (C), đường kính AA', là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng vuông góc với (d) tại H (đpcm).

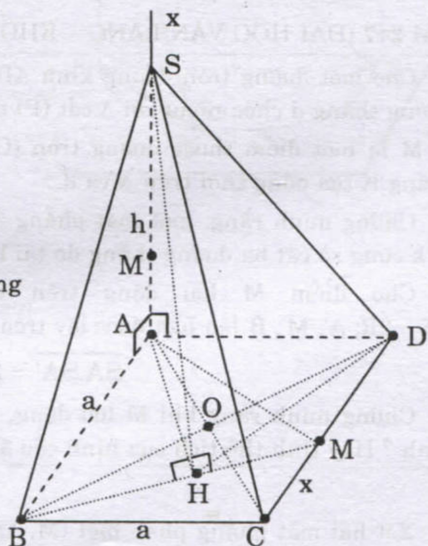
Bài 246 (ĐẠI HỌC VĂN LANG – KHỐI B, D – ĐỢT 2 – 1997)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng ABCD, lấy điểm S sao cho AS = h. M là một điểm lưu động trên cạnh CD, hạ SH vuông góc với BM.

1/ Chứng minh rằng AH ⊥ BM. Suy ra quỹ tích của điểm H khi M lưu động trên cạnh CD.

2/ Xác định vị trí của M trên CD sao cho thể tích SBDH lớn nhất.

Giải



1/ Ta có : SA ⊥ (ABCD)

$\Rightarrow \begin{cases} SH : \text{đường xiên} \\ AH : \text{hình chiếu} \end{cases}$

Mà : SH ⊥ BM (cách dựng)

Theo định lý ba đường vuông góc

⇒ AH ⊥ BM (đpcm).

⇒ H ∈ đường tròn đường kính AB trong mặt phẳng (ABCD)

Khi $\begin{cases} M \equiv C \Rightarrow H \equiv B \\ M \equiv D \Rightarrow H \equiv O \text{ (tâm hình vuông ABCD)} \end{cases}$

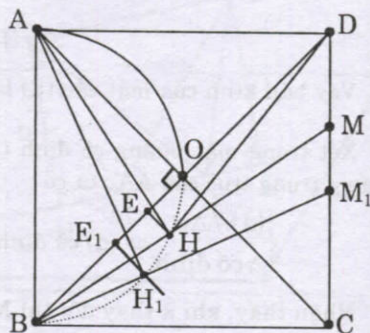
Đảo lại, chọn $H_0 \in \overset{\frown}{BO} \subset (AB)$

$\Rightarrow \widehat{AH_0B} = 90^0$

$\Rightarrow SH_0 \perp BM$ (định lý 3 đường vuông góc)

Vậy quỹ tích H là một phần tư cung tròn $\overset{\frown}{BO}$ tâm I, bán kính $R = \frac{a}{2}$ nằm trong mặt phẳng (ABCD) (ycbt).

2/ Ta có : $V_{S.BHD} = \frac{1}{3}S_{BHD}.SA \Rightarrow V_{S.BHD} = \frac{h}{3}.S_{BHD}$



Để ý thấy : $\exists\max(V_{S.BHD}) \Leftrightarrow \exists\max(S_{BHD})$ (1)

Gọi E_1 là trung điểm dây cung BO và E là chân đường cao ΔBHD

$\Rightarrow \begin{cases} E_1H_1 \text{ : đường cao } \Delta BH_1D \\ EH \text{ : đường cao } \Delta BHD \end{cases}$

Vậy : $\max(V_{S.BHD}) = V_{S.BH_1D}$

$\Leftrightarrow \max(S_{BHD}) = S_{BH_1D}$

$\Leftrightarrow \max(EH) = E_1H_1$

Để ý : $\begin{cases} \widehat{OBH_1} = \widehat{BOH_1} = \frac{45^0}{2} \\ \widehat{OBC} = 45^0 \end{cases} \Rightarrow BH_1$ là phân giác $\widehat{OBC}$.

Gọi $M_1 = BH_1 \cap DC \Rightarrow \frac{CM_1}{DM_1} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{CM_1}{DM_1 + CM_1} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ (tính chất tỷ lệ thức).

$\Leftrightarrow \frac{CM_1}{a} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow CM_1 = \frac{a}{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow CM_1 = a\left(\sqrt{2} - 1\right).$

Vậy khi M thỏa $CM_1 = a\left(\sqrt{2} - 1\right)$ thì $\max(V_{S.BHD})$ xảy ra (ycbt).

Bài 247 (ĐẠI HỌC VĂN LANG – KHỐI A – ĐỢT 1 – 1997)

Cho một đường tròn đường kính AB nằm trong mặt phẳng nằm ngang (P); $\Delta \perp (P)$ tại A, đường thẳng d chéo nhau với Δ cắt (P) tại B.

1/ M là một điểm thuộc đường tròn (C), chứng minh rằng qua M có một và chỉ một đường thẳng K tựa đồng thời trên Δ và d.

2/ Chứng minh rằng, một mặt phẳng (Q) nếu đã vuông góc với một trong ba đường thẳng Δ, d, k cũng sẽ cắt ba đường thẳng đó tại ba điểm là đỉnh của một tam giác vuông.

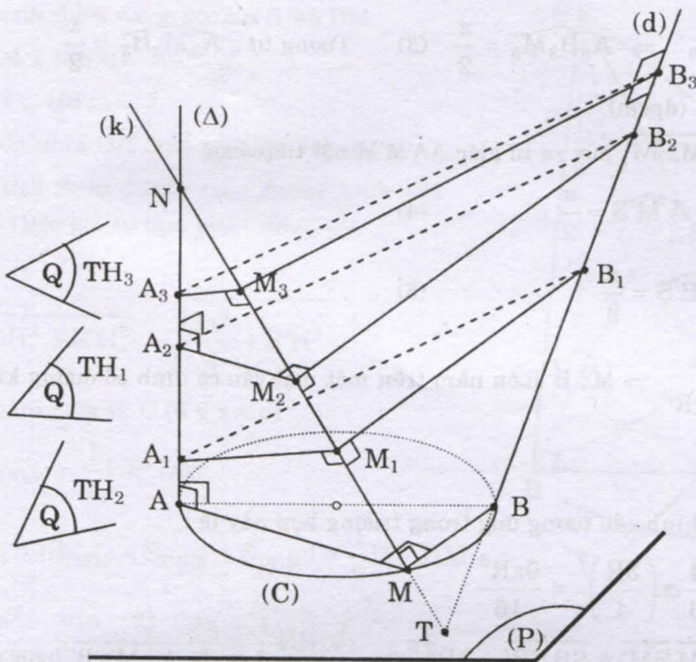
3/ Cho điểm M lưu động trên đường tròn, trên Δ lấy một điểm S sao cho SA = 2R; A', M', B' lần lượt được lấy trên SA, SM, SB và thỏa mãn điều kiện :

$$\overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SM}.\overline{SM'} = \overline{SB}.\overline{SB'} = 3R^2.$$

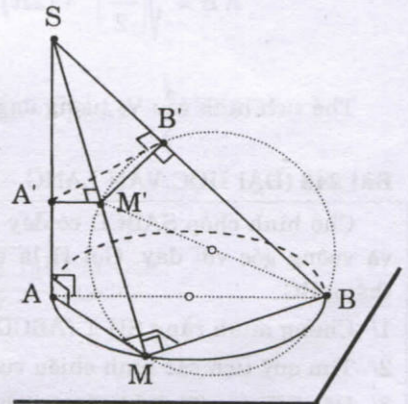
Chứng minh rằng khi M lưu động, những điểm A', M', B' luôn nằm trên một mặt cầu cố định ? Hãy tính thể tích của hình cầu ấy.

Giải

1/ Xét hai mặt phẳng phân biệt (M, Δ) và (M, d) có chung điểm M sẽ cắt nhau theo một giao tuyến (k) tựa đồng thời trên (Δ) tại N và trên (d) tại T (ycbt).



2/ Gọi A_i; M_i; B_i; $i \in 1,3$ lần lượt là giao điểm của (Δ); (k); (d) với (Q) khi (Q) lần lượt vuông góc với (k); (Δ); (d). Ta có :



❒ **TH_1 :** $(Q) \perp (\Delta) \Rightarrow (Q) // (ABM)$

Mà : $\begin{cases} \begin{cases} A_2M_2 = (Q) \cap (M;\Delta) \\ AM = (ABM) \cap (M;\Delta) \end{cases} \Rightarrow A_2M_2 // AM \\ \begin{cases} B_2M_2 = (Q) \cap (M;d) \\ BM = (ABM) \cap (M;d) \end{cases} \Rightarrow B_2M_2 // BM \end{cases}$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{A_2B_2M_2} = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Tương tự : $\widehat{AMB} = \widehat{A_2M_2B_2} = \frac{\pi}{2}$.

❒ **TH_2 :** $(Q) \perp (k)$, ta có :

$\begin{cases} (\Delta) \perp (ABM) \Rightarrow (\Delta) \perp MB \\ AM \perp MB \end{cases} \Rightarrow BM \perp (M; \Delta)$

$\Rightarrow \widehat{A_1M_1B_1} = \frac{\pi}{2}$ (góc của 2 nhị diện vuông góc nhau)

$\Rightarrow (M, d) \perp (M, \Delta)$ theo giao tuyến (k)

Vậy : $\widehat{A_1B_1M_1} = \frac{\pi}{2}$ (2)

❒ **TH_3 :** $(Q) \perp (d) \Rightarrow (Q) \perp (M, d)$

Mà : $(M; \Delta) \perp (M; d) \Rightarrow (Q) \cap (M; \Delta) = A_3M_3 \perp (M, d)$

$\Rightarrow A_3M_3 \perp M_3B_3 \quad \Rightarrow \widehat{A_3B_3M_3} = \dfrac{\pi}{2}$ (3) Tương tự : $\widehat{A_3M_3B_3} = \dfrac{\pi}{2}$

Từ (1); (2); (3) ⇒ (đpcm).

3/ Từ $\overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SM}.\overline{SM'}$ suy ra tứ giác AA'M'M nội tiếp được

$$\Rightarrow \widehat{AM'S} = \frac{\pi}{2} \qquad (4)$$

Tương tự $\Rightarrow \widehat{AB'S} = \dfrac{\pi}{2}$ (5)

Từ $\begin{cases}(4) \& (5)\\ \overline{SA}.\overline{SA'} = 3R^2\end{cases} \Rightarrow$ M'; B' luôn nằm trên một mặt cầu cố định có đường kính là : SA' $= \dfrac{3}{2}R$.

Thể tích V_1 của hình cầu tương ứng trong trường hợp này là :

$$V_1 = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{3R}{4}\right)^3 = \frac{9\pi R^3}{16}$$

Từ $\overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SM}.\overline{SM'} = \overline{SB}.\overline{SB'} = 3R^2$ cũng suy ra được là A'; M'; B' luôn nằm trên một mặt cầu cố định có đường kính là :

$$A'B = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + (2R)^2} = \frac{R\sqrt{17}}{2}; \text{ (vì } AA' = \frac{R}{2}\text{) (đpcm).}$$

Thể tích hình cầu V_2 tương ứng là : $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{R\sqrt{17}}{4}\right)^3 = \dfrac{17\pi R^3\sqrt{17}}{48}$ (ycbt).

Bài 248 (ĐẠI HỌC VĂN LANG – KHỐI A, B – 1998)

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB và M là một điểm di động trên đường thẳng BC.

1/ Chứng minh rằng SH ⊥ (ABCD). Tính thể tích hình chóp SABCD.

2/ Tìm quỹ tích các hình chiếu vuông góc của S lên DM.

3/ Đặt CM = x. Tính khoảng cách từ S đến DM theo a và x.

Giải

1/ Ta có : $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \text{ (theo giao tuyến AB)}\\ SH \perp AB\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ (đpcm).

Với : $\begin{cases}SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\\ S_{ABCD} = AD.AB = a^2\end{cases}$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \text{ (ycbt).}$$

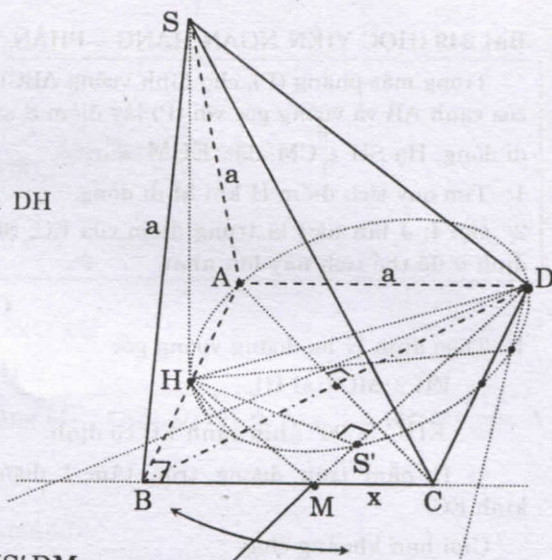
2/ Gọi S' là hình chiếu vuông góc của S lên DM.

Ta có : DM ⊥ (SS'H)

⇒ DM ⊥ HS'.

Hay S' luôn nhìn DH dưới một góc vuông.

Vậy quỹ tích S' là đường tròn đường kính DH bỏ đi điểm A (Độc giả tự làm phần đảo).



3/ Ta có :

$$SS' = \sqrt{SH^2 + S'H^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + S'H^2}$$

❒ **TH₁ :** M nằm giữa B; C ($0 \leqslant x \leqslant a$)

Ta có : $S_{DHM} = \frac{1}{2}HS'.DM$

$$\Leftrightarrow S_{ABCD} - (S_{DAH} + S_{HBM} + S_{DCM}) = \frac{1}{2}HS'.DM$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a(a-x)}{4} - \frac{ax}{2} = \frac{1}{2}HS'.\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow HS' = \frac{2a^2 - ax}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow SS' = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4x^2 - 4ax + 7a^2}{x^2 + a^2}} \text{ (ycbt).}$$

❒ **TH₂ :** M nằm ngoài B; C và về phía C

Ta có : $S_{DHM} = \frac{1}{2}HS'.DM \Leftrightarrow S_{ABCD} + S_{DCM} - (S_{DAH} + S_{HBM}) = \frac{1}{2}HS'.DM$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{ax}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a(a+x)}{4} = \frac{1}{2}HS'.\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow HS' = \frac{2a^2 + ax}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow SS' = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4x^2 + 4ax + 7a^2}{x^2 + a^2}} \text{ (ycbt).}$$

❒ **TH₃ :** M nằm ngoài B; C và về phía B

Ta có : $S_{DHM} = \frac{1}{2}HS'.DM$

$$\Leftrightarrow S_{ABCD} + S_{ABM} - (S_{DAH} + S_{AHM} + S_{DCM}) = \frac{1}{2}HS'.DM$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{2}a(x-a) - \left[\frac{a^2}{4} + \frac{a(x-a)}{4} + \frac{ax}{2}\right] = \frac{1}{2}HS'.\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow HS' = \frac{2a^2 - ax}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow SS' = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4x^2 - 4ax + 7a^2}{x^2 + a^2}} \text{ (ycbt).}$$

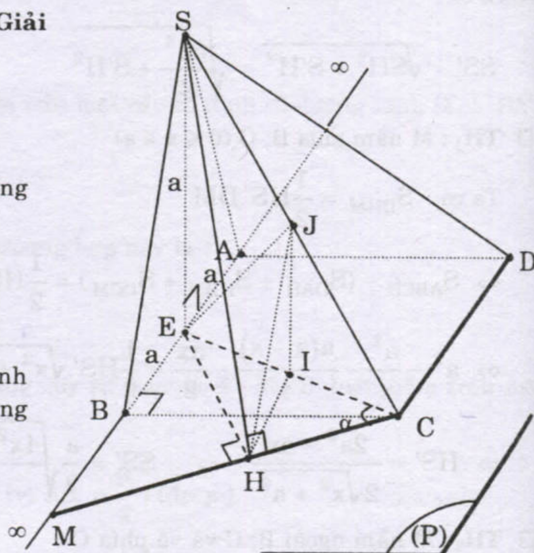
Bài 249 (HỌC VIỆN NGÂN HÀNG – PHÂN VIỆN TP.HCM KHỐI A – 2000)

Trong mặt phẳng (P), cho hình vuông ABCD cạnh 2a. Trên đường thẳng đi qua trung điểm E của cạnh AB và vuông góc với (P) lấy điểm S sao cho SE = a. Trên đường thẳng AB lấy điểm M di động. Hạ SH ⊥ CM, đặt $\widehat{ECM} = \alpha$.

1/ Tìm quỹ tích điểm H khi M di động.

2/ Gọi I; J lần lượt là trung điểm của EC; SC. Tính thể tích tứ diện JIEH theo a và α. Xác định α để thể tích này lớn nhất.

Giải



1/ Theo định lý ba đường vuông góc

⇒ EH ⊥ MC (tại H);

⇒ $\widehat{EHC} = 90^0$ nhìn cạnh EC cố định.

⇒ H nằm trên đường tròn tâm I đường kính EC.

Giới hạn khoảng chạy :

M ⟶ ∞ (trên cạnh AB)

⇒ H ⟶ N

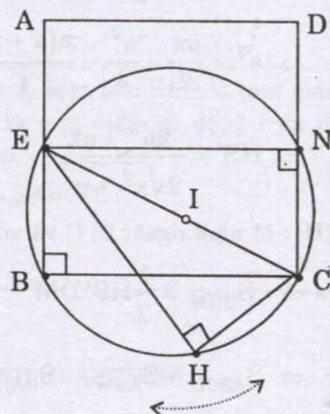
Với N là trung điểm cạnh CD (xem hình phẳng). Đảo lại, lấy H_0 thuộc đường tròn đường kính EC (bỏ đi điểm N) thì :

$\widehat{EHC} = 90^0$

⇒ EH ⊥ MC

⇒ SH_0 ⊥ CM (định lý ba đường vuông góc).

Vậy quỹ tích H là đường tròn tâm I bán kính EC (bỏ đi điểm N) (ycbt).



2/ Theo tính chất đường trung bình :

$$\begin{cases} IJ \,//\, SE \\ IJ = \dfrac{1}{2}SE \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (EIH)$$

Suy ra, đường cao tứ diện JIEH là :

$$IJ = h = \frac{a}{2}.$$

Diện tích đáy B của tứ diện JIEH là :

$$\mathscr{B} = S_{EIH} = \frac{1}{2}.S_{ECH} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.EH.HC$$

Trong đó : $\begin{cases} EH = EC\sin\alpha = \sqrt{a^2 + (2a)^2}(\sin\alpha) = a\sqrt{5}(\sin\alpha) \\ HC = EC\cos\alpha = a\sqrt{5}(\cos\alpha) \end{cases}$

Khi đó : $\mathscr{B} = \dfrac{1}{4}.\left[a\sqrt{5}(\sin\alpha)\right].\left[a\sqrt{5}(\cos\alpha)\right] = \dfrac{5}{8}a^2\sin 2\alpha$

$$\Rightarrow V_{JIEH} = \frac{5a^3.\sin 2\alpha}{48} \leqslant \frac{5a^3}{8} \quad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 1 \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Vậy $\max(V_{JIEH}) = \dfrac{5a^3}{48}$ xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (ycbt).

ĐỀ TƯƠNG TỰ

Bài 250 (ĐẠI HỌC MIỀN BẮC KHỐI A – 1974)

Cho hình vuông ABCD cạnh a và đường thẳng (d) ⊥ (ABCD) tại A. Lấy S ∈ (d). Mp qua A vuông góc SC tại C', cắt SB, SD tại B', D'.

a/ Chứng minh SB ⊥ AB'; SD ⊥ AD'.

b/ Tìm tập hợp các điểm B', C', D' khi S chạy trên (d).

c/ Tìm vị trí của S ∈ (d) sao cho thể tích hình chóp C'ABCD lớn nhất và tính nó.

Hướng dẫn

a/ Độc giả tự giải.

b/ Tập hợp C' là đường tròn đường kính AB thuộc mp(B; d) cố định, trừ điểm B.

Tương tự cho các trường hợp C'; D'.

c/ $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Bài 251 (ĐẠI HỌC KHOA HỌC (KHỐI A) – 1976)

Cho tam giác đều ABC cạnh a. (D) là đường thẳng qua A và thẳng góc với mặt phẳng của tam giác ABC. Lấy một điểm M bất kỳ trên (D). Gọi O là tâm của vòng tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Trong tam giác MBC, BE là đường cao phát xuất từ B, CF là đường cao phát xuất từ C (E ở trên CM, F ở trên BM).

a/ Khi M di động trên (D) thì quỹ tích của E và F là những vòng tròn; hãy xác định các mặt phẳng chứa các vòng tròn này, các tâm và bán kính của chúng.

b/ Gọi H là trực tâm của tam giác BCM. Chứng minh OH và (D) nằm trong cùng một mặt phẳng. Nếu N là điểm cắt nhau của hai đường thẳng OH và (D), hãy chứng minh tứ diện BCMN có các cạnh đối đôi một trực giao.

Bài 252 (ĐẠI HỌC DÂN LẬP NGOẠI NGỮ TIN HỌC – CP – 1998)

Trên mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) có đường kính AB. Đoạn SA vuông góc với (P) và M là một điểm trên (C). Chứng minh rằng :

1/ Hai mặt phẳng (SAM) và (SBM) vuông góc với nhau.

2/ Khi M di động trên (C) thì hình chiếu H của A trên mặt phẳng (SBM) di động trên một đường tròn cố định.

Chuyên đề 12 : PHƯƠNG PHÁP THỂ TÍCH

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp là sử dụng các công thức tính thể tích của một số vật thể hình học hoặc các công thức thể tích trên cùng một vật thể đã được bảo toàn thể tích khi chia nhỏ cố thể đó theo hai dạng toán như sau :

☐ **Dạng 1 : KHI BIẾT THỂ TÍCH CỐ THỂ LÀ V, TÍNH CÁC THÔNG SỐ CÒN LẠI TRONG CÔNG THỨC CỦA V**

1/ Hình chóp : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}H \Rightarrow \left[\begin{array}{l} h = \frac{3V}{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} = \frac{3V}{h} \end{array}\right.$

3/ Hình lăng trụ : $V = \mathcal{B}h \Rightarrow \left[\begin{array}{l} h = \frac{V}{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} = \frac{V}{h} \end{array}\right.$

2/ Hình nón : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow \left[\begin{array}{l} h = \frac{3V}{\pi R^2} \\ R = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} \end{array}\right.$

4/ Hình trụ : $V = \pi R^2 h \Rightarrow \left[\begin{array}{l} h = \frac{V}{\pi R^2} \\ R = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \end{array}\right.$

5/ Hình cầu : $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

6/ Hình chóp đều : $V = \frac{1}{3}S_{tp}r$

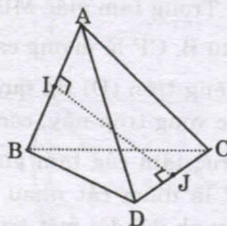
Trong đó : $\begin{cases} S_{tp} & \text{: diện tích toàn phần hình chóp} \\ r & \text{: bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp} \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} S_{tp} = \frac{3V}{r} \\ r = \frac{3V}{S_{tp}} \end{array}\right.$ (đây là công thức tìm r rất phổ biến)

7/ Gọi IJ là đoạn vuông góc chung của hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD thì thể tích tứ diện là :

$V = \frac{1}{6}AB.CD.IJ\sin\varphi$;

với $\varphi = (\widehat{AB; CD})$



8/ Tương tự đối với các khối cụt...

✪ **Ghi chú** : *Một số bài tập ở dạng 1, sẽ được trình bày thứ tự trong các BÀI TOÁN THI; vì số trang sách luôn có hạn.*

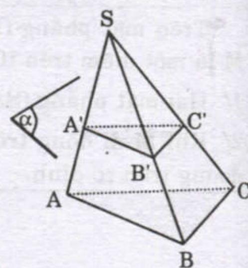
☐ **Dạng 2 : TỶ SỐ THỂ TÍCH CỦA 2 TỨ DIỆN (HÌNH CHÓP TAM GIÁC)**

Cắt hình chóp tam giác S.ABC bằng một mặt phẳng (α) để tạo thành một hình chóp tam giác mới S.A'B'C' (xem hình)

Lúc đó : $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$

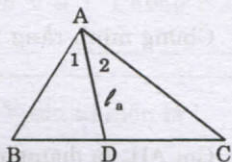
(xem chứng minh (*) ở phần bài tập và độc giả có thể sử dụng trong các kỳ TSĐH mà không phải chứng minh lại).

Nếu khéo léo áp dụng nó trong bài toán hình chóp, chúng ta sẽ chứng minh và tính toán được một số ycbt khá lý thú...



❐ Dạng 3 : SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ CỘNG THỂ TÍCH

Chia một vật thể thành nhiều vật thể thành phần thể tích V_1; V_2; V_3; ...; V_n thì thể tích cố thể là : $V = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$.



✪ Ghi chú : *Ngoài ra, ta hay sử dụng phép cộng diện tích để phụ trợ cho phương pháp thể tích. Chẳng hạn :*

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}$$

$\Rightarrow$ *Phân giác trong góc A :* $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

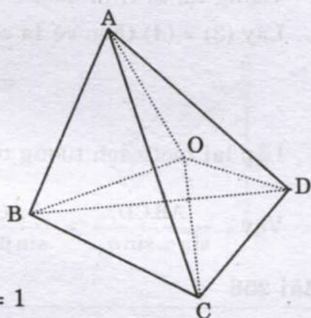
Bài 253

Cho tứ diện ABCD có h_a; h_b; h_c; h_d lần lượt là các đường cao hạ từ đỉnh A; B; C; D xuống các mặt đối diện ứng với các đỉnh đó. Còn O là một điểm tuỳ ý trong tứ diện đó và có khoảng cách đến các mặt đối diện lần lượt đối với đỉnh A; B; C; D là x; y; z; t.

Chứng minh rằng : $\dfrac{x}{h_a} + \dfrac{y}{h_b} + \dfrac{z}{h_c} + \dfrac{t}{h_d} = 1$.

Giải

Khi nối O với bốn đỉnh tứ diện ABCD, là ta đã chia tứ diện ABCD thành 4 tứ diện OABC; ODAB; OCDA; OBCD sao cho :



$$V_{ABCD} = V_{OABC} + V_{OBCD} + V_{OCDA} + V_{ODAB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{OCDA}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{ODAB}}{V_{ABCD}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}dt(ABC)t}{\frac{1}{3}dt(ABC).h_d} + \frac{\frac{1}{3}dt(CDB)x}{\frac{1}{3}dt(CDB).h_a} + \frac{\frac{1}{3}dt(DAC)y}{\frac{1}{3}dt(DAC).h_b} + \frac{\frac{1}{3}dt(DAB)z}{\frac{1}{3}dt(DAB).h_c} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} + \frac{t}{h_d} = 1 \text{ (đpcm).}$$

Bài 254

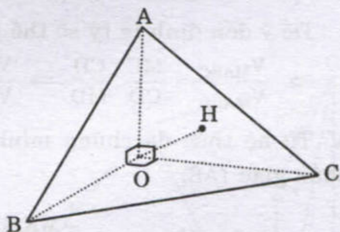
Cho tứ diện ABCD có OA; OB; OC đôi một vuông góc nhau. Gọi S, S_1; S_2; S_3 là diện tích các mặt (ABC); (OAB); (OBC); (OCA). Chứng minh rằng : $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Giải

Để ý thấy khi hạ : $OH \perp (ABC)$ và $H \in (ABC)$, ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow \frac{9V^2}{OH^2} = \frac{9V^2}{OA^2} + \frac{9V^2}{OB^2} + \frac{9V^2}{OC^2}$$

với V là thể tích tứ diện OABC



$$\Rightarrow \left(\frac{3V}{OH}\right)^2 = \left(\frac{3V}{OA}\right)^2 + \left(\frac{3V}{OB}\right)^2 + \left(\frac{3V}{OC}\right)^2$$

$$\Rightarrow (dt(ABC))^2 = (dt(OBC))^2 + (dt(OAC))^2 + (dt(OAB))^2$$

$$\Rightarrow S^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_1^2 \Rightarrow S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \text{ (đpcm).}$$

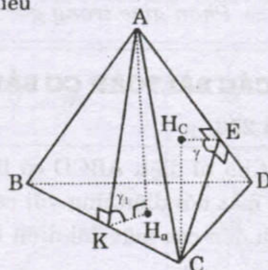
Bài 255

Cho tứ diện ABCD. Gọi α; α_1; β; β_1; γ; γ_1 là các góc nhị diện (AB); (CD); (AC); (BD); (AD); (BC).

Chứng minh rằng : $\dfrac{AB.CD}{\sin\alpha.\sin\alpha_1} = \dfrac{AC.BD}{\sin\beta.\sin\beta_1} = \dfrac{AD.BC}{\sin\gamma.\sin\gamma_1}$.

Giải

Gọi AH_a là đường cao tứ diện ABCD và dựng : $\begin{cases} AK : \text{là đường xiên} \\ H_aK : \text{là hình chiếu} \end{cases}$



$\Rightarrow \widehat{AKH_a} = \gamma_1 = \widehat{(BC)}$

Ta có : $V = \frac{1}{3}S_{\Delta DBC}.AH_a \Leftrightarrow V = \frac{1}{3}.S_{\Delta DBC}.AK\sin\gamma_1$ (1)

Mặt khác : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AK \Leftrightarrow AK = 2S_{\Delta ABC}.\frac{1}{BC}$ (2)

Thay (2) vào (1) thì : $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} V = \frac{1}{3}S_{\Delta DBC}.2S_{\Delta ABC}.\frac{1}{BC}\sin\gamma_1$

$\Leftrightarrow 3BC.V = 2S_{\Delta ABC}.S_{\Delta DBC}\sin\gamma_1$ (3)

Tương tự, ta tính được : $3AD.V = 2S_{\Delta BAD}.S_{\Delta CAD}\sin\gamma$ (4)

Lấy (3) × (4) theo vế ta có : $9BC.AD.V^2 = 4S_{\Delta ABC}.S_{\Delta DBC}\sin\gamma_1.S_{\Delta BAD}.S_{\Delta CAD}.\sin\gamma$

$\Leftrightarrow \dfrac{BC.AD}{\sin\gamma\sin\gamma_1} = \dfrac{4S_{\Delta ABC}.S_{\Delta DBC}.S_{\Delta BAD}.S_{\Delta CAD}}{9V^2}$

Lập lại một cách tương tự ta có : $\dfrac{AB.CD}{\sin\alpha\sin\alpha_1} = \dfrac{AC.BD}{\sin\beta\sin\beta_1} = \dfrac{4S_{\Delta ABC}.S_{\Delta DBC}.S_{\Delta BAD}.S_{\Delta CAD}}{9V^2}$

Vậy : $\dfrac{AB.CD}{\sin\alpha.\sin\alpha_1} = \dfrac{AC.BD}{\sin\beta\sin\beta_1} = \dfrac{AD.BC}{\sin\gamma\sin\gamma_1}$ (đpcm).

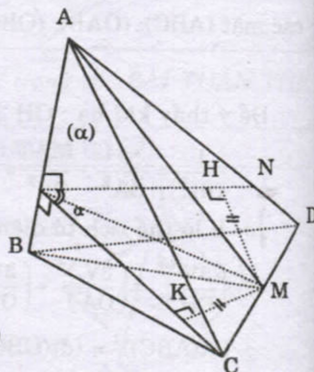
Bài 256

Cho tứ diện ABCD và M là một điểm tuỳ ý trên cạnh CD (với M khác C và D).

a/ Chứng minh rằng : $\dfrac{V_{MABC}}{V_{MABD}} = \dfrac{MC}{MD}$.

b/ Biết thêm (AMB) là mặt phẳng phân giác $\widehat{(AB)}$. Chứng minh rằng : $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}} = \dfrac{MC}{MD}$.

Giải



a/ Ta có : $\dfrac{V_{MABC}}{V_{MABD}} = \dfrac{V_{MABC}}{V_{ABCD}}.\dfrac{V_{ABCD}}{V_{MABD}}$

Để ý đến định lý tỷ số thể tích hình chóp với $(\alpha) \equiv (ABM)$

$\Rightarrow \dfrac{V_{MABC}}{V_{MABD}} = \dfrac{MC}{CD}.\dfrac{CD}{MD} \Rightarrow \dfrac{V_{MABC}}{V_{MABD}} = \dfrac{MC}{MD}$ (đpcm).

b/ Từ hệ thức đã chứng minh được ở trên và (ABM) là mặt phân giác $\widehat{(AB)}$

$\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{V_{MABC}}{V_{MABD}} = \dfrac{\frac{1}{3}MK.S_{\Delta ABC}}{\frac{1}{3}MH.S_{\Delta DAB}}$ (vì MH = MK; vì $(\alpha) \equiv (ABM)$)

$\Rightarrow \dfrac{MC}{MD} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DAB}}$ (đpcm).

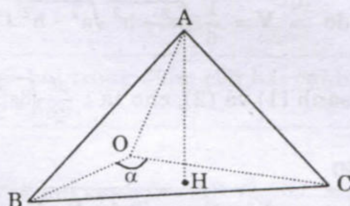
Bài 257

Cho tứ diện OABC có các cạnh OA = 1; OB = 2; OC = 3 và thể tích V = 1. Chứng minh rằng OA; OB; OC đôi một vuông góc.

Giải

Gọi AH là đường cao OABC hạ từ đỉnh A. Đặt $\alpha = \widehat{BOC}$, thì thể tích V của tứ diện là :

$$V = \frac{1}{3}.S_{\Delta BOC}.AH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}OB.OC.\sin\alpha\right).AH$$



$\Rightarrow 6V = AH.OB.OC\sin\alpha \leqslant AO.OB.OC$ (*)

Mà V = 1; AO.OB.OC = 1.2.3 = 6.

Do đó (*) $\Leftrightarrow 1 \leqslant 1$

Do đó : $\begin{cases}\sin\alpha = 1\\ AH = AO\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{\pi}{2}\\ AH = AO\end{cases}$

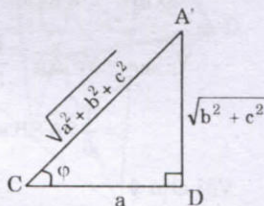
Vậy tứ diện OABC có OA; OB; OC đôi một vuông góc nhau (đpcm).

Bài 258

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có các cạnh : AB = a; BC = b; AA' = c. Tính khoảng cách từ đường thẳng AB tới đường thẳng A'C.

Giải

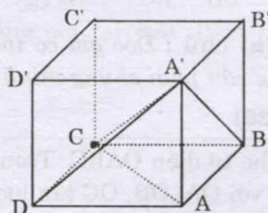
Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A'C gọi là h chính là độ dài đoạn vuông góc chung của hai cạnh AB và A'C của tứ diện A'.ABC với $\varphi = (\widehat{AB; A'C})$



Ta có thể tích V của tứ diện đó là :

$$V = \frac{1}{6}AB.A'B.h.\sin\varphi = \frac{1}{6}AB.A'C.h.\frac{A'D}{A'C} = \frac{1}{6}AB.A'D.h$$

$\Rightarrow V = \frac{1}{6}a\sqrt{b^2 + c^2}.h$ (1)



Mặt khác : $V = \frac{1}{6}abc$ (2)

So sánh (1) và (2), ta có :

$a\sqrt{b^2 + c^2}.h = abc \Leftrightarrow h = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (ycbt).

Bài 259

Một khối lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a và AA' = h. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB' và BC'.

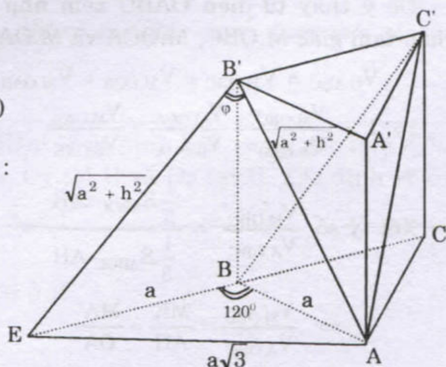
Giải

Xét thể tích V của tứ diện B'BAC'.

$$V = \frac{1}{6}S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)h = \frac{1}{6}.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h \quad (1)$$

Mặt khác gọi l = d[AB', BC'] và $\varphi = (\widehat{AB'; BC'})$, ta có :

$V = \frac{1}{6}AB'.BC'l\sin\varphi$ (2)



Trong đó :

$$\cos\varphi = \frac{B'E^2 + B'A^2 - AE^2}{2B'E.B'A}$$

$$= \frac{2a^2 + 2h^2 - 3a^2}{2(a^2 + h^2)} = \frac{2h^2 - a^2}{2(a^2 + h^2)}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{2h^2 - a^2}{2a^2 + 2h^2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3a^2 + 12h^2}}{2(a^2 + h^2)}$$

Từ đó $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $V = \frac{1}{6}.\sqrt{a^2 + h^2}\sqrt{a^2 + h^2}\, l.\frac{a\sqrt{3a^2 + 12h^2}}{2(a^2 + h^2)} = \frac{1}{6}.\frac{al}{2}\sqrt{3a^2 + 12h^2}$ (2)

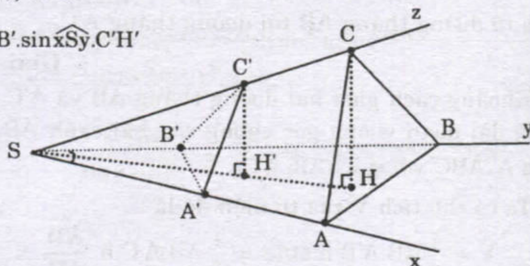
So sánh (1) và (2), cho ta : $\frac{al}{2}\sqrt{3a^2 + 12h^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h \Rightarrow l = \frac{\sqrt{3}ah}{2\sqrt{3a^2 + 12h^2}}$ (ycbt).

Bài 260

Cho tam diện Sxyz. Trên Sx lấy hai điểm A và A', trên Sy lấy hai điểm B và B', trên Sz lấy hai điểm C và C'. Chứng minh rằng : $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$ (*)

Giải

Dựng CH và C'H' vuông góc với mp(Sx; Sy), ta có :



$$V_{SA'B'C'} = V_{C'.SA'B'} = \frac{1}{3}S_{\Delta SA'B'}.C'H' = \frac{1}{6}SA'.SB'.\sin\widehat{xSy}.C'H'$$

$$V_{S.ABC} = V_{C.SAB} = \frac{1}{3}S_{\Delta SAB}.CH$$

$$= \frac{1}{6}SA.SB.\sin\widehat{xSy}.CH$$

Với chú ý :

$$\frac{SH'}{SH} = \frac{SC'}{SC} \Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC} \text{ (*) (đpcm).}$$

❐ **Ghi chú :** *Độc giả có thể sử dụng định lý tỷ số thể tích (*), trong các kỳ thi Đại học mà không cần phải chứng minh lại trừ trường hợp đề toán có yêu cầu.*

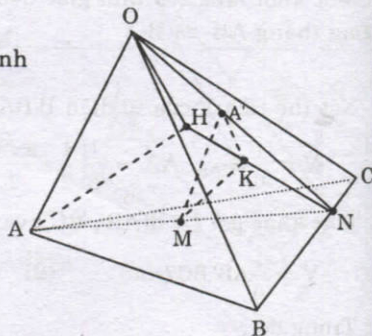
Bài 261

Cho tứ diện OABC. Trong tam giác ABC ta lấy một điểm M. Các đường thẳng qua M song song với OA, OB, OC lần lượt cắt các mặt (OBC), (OCA), (OAB) tại A', B', C'.

Chứng minh : $\frac{MA'}{OA} + \frac{MB'}{OB} + \frac{MC'}{OC} = 1$.

Giải

Để ý thấy tứ diện OABC xem như hợp thành bởi 3 hình chóp tam giác M.OBC, M.OCA và M.OAB :



$$V_{O.ABC} = V_{M.OBC} + V_{M.OCA} + V_{M.OAB}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{V_{M.OBC}}{V_{A.OBC}} + \frac{V_{M.OCA}}{V_{B.OCA}} + \frac{V_{M.OAB}}{V_{C.OAB}} \quad (1)$$

Xét tỷ số $\frac{V_{M.OBC}}{V_{A.OBC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\Delta BOC}.MK}{\frac{1}{3}S_{\Delta BOC}.AH}$

$$\Rightarrow \frac{V_{M.OBC}}{V_{A.OBC}} = \frac{MK}{AH} = \frac{MA'}{OA} \quad \text{(2) (vì } \Delta MKA' \backsim \Delta AHO)$$

Hoàn toàn tương tự như vậy ta cũng có : $\begin{cases} \dfrac{V_{M.OCA}}{V_{B.OCA}} = \dfrac{MB'}{OB} & (3) \\ \dfrac{V_{M.ABC}}{V_{C.OAB}} = \dfrac{MC'}{OC} & (4) \end{cases}$

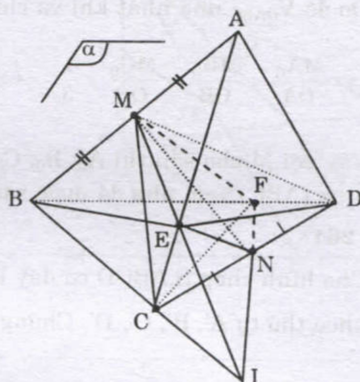
Thay (2); (3); (4) vào (1) ta có : $1 = \dfrac{MA'}{OA} + \dfrac{MB'}{OB} + \dfrac{MC'}{OC}$ (đpcm).

Bài 262

Chứng minh rằng : mọi mặt phẳng đi qua đường thẳng nối hai trung điểm của hai cạnh đối của một tứ diện chia tứ diện thành hai phần thể tích bằng nhau.

Giải

Xét tứ diện ABCD và gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh đối AB và CD. Một mặt phẳng (α) qua MN cắt AC ở E và BD ở F. Mặt phẳng (α) này chia tứ diện thành hai phần :



- **Phần I** gồm 2 hình chóp D.MENF và A.MED.
- **Phần II** gồm 2 hình chóp C.MENF và B.MFC

Để ý thấy N là trung điểm CD $\Rightarrow V_{D.MENF} = V_{C.MENF}$

Do đó ycbt chỉ phải chứng minh : $V_{A.MED} = V_{B.MFC}$

Thật vậy xét hai hình chóp A.MED và A.BCD ta có :

$$\frac{V_{A.MED}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM.AE.AD}{AB.AC.AD} = \frac{AM}{AB}.\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}.\frac{AE}{AC} \quad (1)$$

Tương tự xét : B.MFC và B.ADC ta có :

$$\frac{V_{B.MFC}}{V_{B.ADC}} = \frac{BM.BF.BC}{BA.BC.BD} = \frac{BM}{BA}.\frac{BF}{BD} = \frac{1}{2}.\frac{BF}{BD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $\dfrac{V_{A.MED}}{V_{B.MFC}} = \dfrac{AE}{AC}.\dfrac{BD}{BF}$ (3)

- Đồng thời dễ dàng chứng minh được rằng BC, ME và FN đồng qui tại một điểm I. Áp dụng định lý Ménélaus vào ΔABC và ΔDBC cho :

$$\begin{cases} \dfrac{EA}{EC}.\dfrac{IC}{IB}.\dfrac{MB}{MA} = 1 \\ \dfrac{FB}{FD}.\dfrac{ND}{NC}.\dfrac{IC}{IB} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{EA}{EC}.\dfrac{IC}{IB} = 1 \\ \dfrac{FB}{FD}.\dfrac{IC}{IB} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{IB}{IC} = 1 \\ \dfrac{FB}{FD} = \dfrac{IB}{IC} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{FB}{FD} \Leftrightarrow \frac{EA}{EA + EC} = \frac{FB}{FB + FD} \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta có : $\dfrac{V_{A.MED}}{V_{B.MFC}} = 1 \Leftrightarrow V_{A.MED} = V_{B.MFC}$ (đpcm).

□ **Ghi chú :** *Nếu độc giả ghi nhớ được tính chất này, thì có thể giải quyết được một số bài toán phương pháp thể tích khác : khá độc đáo.*

Bài 263

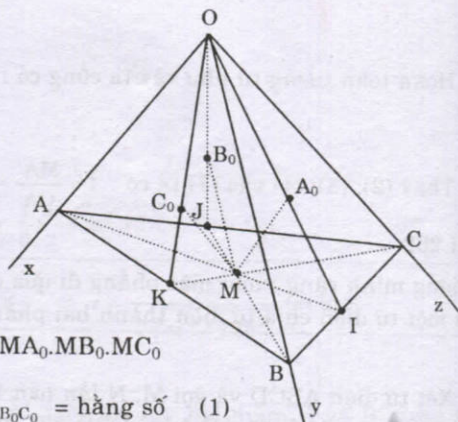
Cho trước một góc tam diện, tứ diện Oxyz và một điểm M cố định bên trong góc tam diện đó. Còn (P) là mặt phẳng lưu động qua M cắt Ox tại A, Oy tại B và Oz tại C. Xác định vị trí của (P) để tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

Giải

Nối dài AM cắt BC ở I; BM cắt AC ở J và CM cắt AB ở K.

Qua M vẽ MA_0 // OA (với $A_0 \in OI$).

$$\Rightarrow \frac{MA_0}{OA} = \frac{IM}{IA} = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}$$



Tương tự khi dựng các điểm B_0 và C_0 :

$$\Rightarrow \frac{MB_0}{OB} = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}; \quad \frac{MC_0}{OC} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{MA_0}{OA} + \frac{MB_0}{OB} + \frac{MC_0}{OC} = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$\Rightarrow 1 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{MA_0}{OA} \cdot \frac{MB_0}{OB} \cdot \frac{MC_0}{OC}} \Leftrightarrow OA.OB.OC \geqslant 27MA_0.MB_0.MC_0$$

$$\Leftrightarrow V_{OABC} \geqslant 27\, V_{MA_0B_0C_0} = \text{hằng số} \quad (1)$$

Do đó V_{OABC} nhỏ nhất khi và chỉ khi đẳng thức trong (1) xảy ra,

$$\Leftrightarrow \frac{MA_0}{OA} = \frac{MB_0}{OB} = \frac{MC_0}{OC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} OA = 3MA_0 \\ OB = 3MB_0 \\ OC = 3MC_0 \end{cases}$$

Vậy với M cho sẵn thì A_0; B_0; C_0 xem như hoàn toàn được xác định trong không gian và do đó (P) ≡ (ABC) xem như đã được xác định (ycbt).

Bài 264

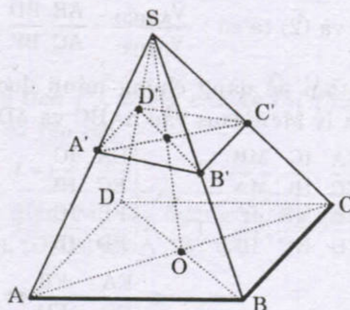
Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự A', B', C', D'. Chứng minh hệ thức : $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

Giải

Gọi V là thể tích hình chóp S.ABCD. Ta để ý thấy :

dt(ABD) = dt(CBD) = dt(ABC) = dt(DBC)

Vì thế nên : $V_{SABD} = V_{SCBD} = V_{SABC} = V_{SDBC} = \frac{V}{2}$



Áp dụng bổ đề về tỷ số thể tích hai tứ diện, ta có :

$$\frac{V_{SA'B'D'}}{V_{SABD}} = \frac{2V_{SA'B'D'}}{V} = \frac{SA'.SB'.SD'}{SA.SB.SD} \quad (1)$$

$$\frac{V_{SC'B'D'}}{V_{SCBD}} = \frac{2V_{SC'B'D'}}{V} = \frac{SC'.SB'.SD'}{SC.SB.SD} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) : $\frac{2V_{SA'B'C'D'}}{V} = \frac{SB'.SD'}{SA.SC}\left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC}\right)$ (3)

Tương tự : $\frac{2V_{SA'B'C'D'}}{V} = \frac{SA'.SC'}{SA.SC}\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC}\right)$ (4)

So sánh hai kết quả trên ta được : $\frac{SB'.SD'}{SB.SD}\left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC}\right) = \frac{SA'.SC'}{SA.SC}\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{SA.SC}{SA'.SC'}\left(\frac{SA'}{SA} + \frac{SC'}{SC}\right) = \frac{SB.SD}{SB'.SD'}\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right)$$

$\Leftrightarrow \frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'} = \frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'}$. Đó là hệ thức phải chứng minh.

Bài 265

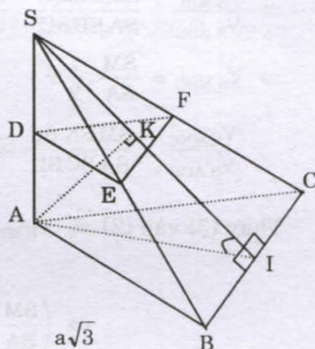
Đáy hình chóp S.ABC là ΔABC đều cạnh a. Hai mặt bên SAB và SAC vuông góc với đáy, mặt bên SBC tạo với đáy góc α.

a/ Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC).

b/ Chứng minh diện tích xung quanh hình chóp bằng : $\frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$.

c/ Cắt hình chóp bằng một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm đường cao hình chóp. Tìm thể tích hình chóp cụt tạo thành.

Giải



Ta có : (SAB) và (SAC) ⊥ (ABC) theo giao tuyến SA ⇒ SA ⊥ (ABC)

Kẻ SI ⊥ BC thì I là trung điểm BC và AI ⊥ BC ⇒ $\widehat{SIA} = \alpha$

a/ Do BC ⊥ (SAI) ⇒ (SBC) ⊥ (SAI)

Trong mp(SAI), kẻ AK ⊥ SI ⇒ AK ⊥ (SBC)

⇒ AK = d[A; (SBC)]

Trong tam giác vuông KAI ⇒ $AK = AI\sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$.

b/ Dễ thấy ΔSAB = ΔSAC

$$S_{xq} = 2dt\,(\Delta SAB) + dt\,(\Delta SBC) = SA.AB + \frac{1}{2}BC.SI$$

Tam giác vuông SAI ⇒ $SA = AI\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}tg\alpha$; $SI = \frac{AI}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}(\sin\alpha + \frac{1}{2}) \quad (1)$$

Biến đổi : $\sin\alpha + \frac{1}{2} = \sin\alpha + \sin\frac{\pi}{6} = 2\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12})$

Thay vào (1) được ⇒ $S_{xq} = \frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\alpha}\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12})\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12})$ (đpcm).

c/ Gọi D là trung điểm SA thì mặt phẳng qua D song song với đáy, cắt các cạnh SB; SC tại trung điểm E; F của chúng.

Ta có : $\frac{V_{SDEF}}{V_{SABC}} = \frac{SD.SE.SF}{SA.SB.SC} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{SDEF} = \frac{1}{8}V_{SABC}$

Mà : $V_{SABC} = \frac{1}{3}dt\Delta ABC.SA = \frac{1}{8}a^3\tan\alpha$

$$V_{chóp\ cụt} = V_{SABC} - V_{SDEF} = V_{SABC} - \frac{1}{8}V_{SABC} = \frac{7}{8}V_{SABC} = \frac{7}{64}a^3\tan\alpha \text{ (ycbt)}.$$

Bài 266

Đáy hình chóp S.ABCD là hình chữ nhật, có AB = a; AD = b; SA ⊥ ABCD và SA = 2a. Lấy M ∈ SA với AM = x (0 ⩽ x < 2a).

a/ Tìm diện tích thiết diện mà MBC cắt hình chóp.

b/ Xác định x để mp(MBC) chia hình chóp ra thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Giải

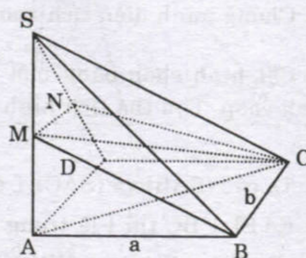
a/ Độc giả tự giải ⇒ MN ⊥ MB nên thiết diện là hình thang vuông tại M và B

Diện tích thiết diện : $S = dt\,(MNCB) = \frac{1}{2}(BC + MN).BM$ (1)

Do MN // AD $\Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AD} \Leftrightarrow \frac{2a - x}{2a} = \frac{MN}{b}$ (định lý Thalès) $\Leftrightarrow MN = \frac{b(2a - x)}{2a}$

Tam giác vuông BAM cho : $BM^2 = MA^2 + BA^2 = x^2 + a^2$

Thay vào (1) cho : $S = \frac{b(4a - x)}{4a}\sqrt{x^2 + a^2}$.



b/ Gọi : $V = V_{S.ABCD} \Rightarrow V_{S.ABC}\cdot\frac{1}{2}V$

Tương tự : $V_{S.MNCB} = V_{S.MBC} + V_{S.MNC}$ (2)

Từ SA là đường cao hình chóp S.ABCD

$\Rightarrow \frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM.SB.SC}{SA.SB.SC} = \frac{SM}{SA} = \frac{2a - x}{2a} = t > 0\ (0 \leqslant x \leqslant 2a)$

$\Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{SM}{SA}.\frac{1}{2}V$

$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM.SN.SC}{SA.SC.SD} = \left(\frac{SM}{SA}\right)^2 \Rightarrow V_{S.MNC} = \left(\frac{SM}{SA}\right)^2.\frac{1}{2}V$ (3)

Thay (3) vào (2) $\Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{1}{2}V\left[\left(\frac{SM}{SA}\right)^2 + \frac{SM}{SA}\right] = \frac{1}{2}V$ (gt)

$\Leftrightarrow \left(\frac{SM}{SA}\right)^2 + \frac{SM}{SA} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 1 > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \vee t = \frac{-\sqrt{5} + 1}{2} \\ t > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Leftrightarrow \frac{2a - x}{2a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$\Leftrightarrow x = (3 - \sqrt{5})\,a$ (thỏa mãn $0 \leqslant x < 2a$) (ycbt).

Bài 267

Đáy hình chóp S.ABCD là hình chữ nhật, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Một mặt phẳng qua A vuông góc SC, cắt SB, SC, CD tại B'; C'; D'.

a/ Chứng minh tứ giác AB'C'D' có hai góc đối diện là góc vuông.

b/ Điểm S lưu trên $Ax \perp (ABCD)$. Chứng minh mp(AB'C'D') luôn luôn đi qua một đường thẳng cố định và bảy điểm A; B; B'; C; C'; D; D' cùng thuộc một mặt cầu cố định.

c/ Gọi $\alpha < 1v$ là góc tạo bởi SC và mp (SAB). Cho ABCD là hình vuông, hãy tính tỉ số thể tích giữa hai hình chóp SAB'C'D' và SABCD.

Giải

a/ Đường thẳng chứa AB là hình chiếu của SB trên đáy ABCD mà $AB \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow SB \perp BC$ theo định lý ba đường vuông góc.

$\Rightarrow BC \perp mp\,(SAB) \supset AB' \Rightarrow BC \perp AB'$ (1)

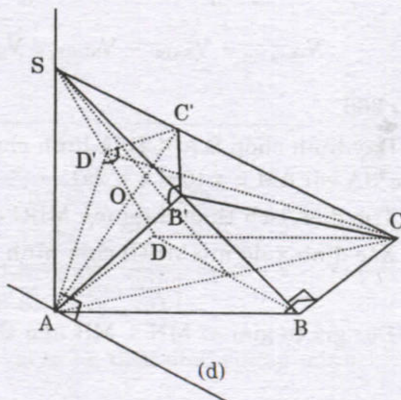
Do $SC \perp mp\,(AB'C'D') \Rightarrow SC \perp AB'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB' \perp mp\,(SBC)$

$\Rightarrow AB' \perp B'C' \Rightarrow \widehat{AB'C'} = \frac{\pi}{2}$

Tương tự : $\widehat{AD'C'} = \frac{\pi}{2}$

Vậy tứ giác AB'C'D' có hai góc đối vuông (đpcm).



b/ Trong mp(ABCD) dựng từ A : đường thẳng $d \perp AC$

$\Rightarrow$ d cố định

Theo cách dựng $\Rightarrow$ $d \perp (SAC) \supset SC \Rightarrow d \subset (AB'C'D')$

Vậy mp(AB'C'D') luôn luôn đi qua đường thẳng d cố định trong mp (ABCD).

Để ý : $\begin{cases} AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C \\ AD' \perp (SCD) \Rightarrow AD' \perp D'C \end{cases}$

Và $AC' \perp SC$ (cách dựng)

$\Rightarrow$ 7 điểm A; B; B'; C; C'; D; D' nằm trên mặt cầu đường kính AC cố định (đpcm).

c/ Vì $BC \perp mp(SAB)$ nên SB là hình chiếu của SC trên mp (SAB)

$\Rightarrow$ $\widehat{BSC}$ là góc tạo bởi SC và mp(SAB) : $\widehat{BSC} = \alpha$

Vì ABCD là hình vuông nên mp(SAC) là mặt phẳng đối xứng của hình chóp SABCD, suy ra:

$$V_{SAB'C'} = V_{SAD'C'} = \frac{1}{2}V_{SAB'C'D'}\ ; \quad V_{SABC} = V_{SADC} = \frac{1}{2}V_{SABCD}$$

Do đó : $\dfrac{V_{SAB'C'D'}}{V_{SABCD}} = \dfrac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SB'.SB}{SB^2}.\dfrac{SC'.SC}{SC^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2}.\dfrac{SA^2}{SC^2}$ (*)

Gọi cạnh hình vuông là a, tam giác vuông SBC cho :

$$SB = BC\cot\alpha = a\cot\alpha; \qquad SC = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông SAC cho :

$$SA^2 = SC^2 - AC^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha} - 2a^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}(1 - 2\sin^2\alpha) = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}.\cos 2\alpha$$

Thay vào (*) được : $\dfrac{V_{SAB'C'D'}}{V_{SABCD}} = \dfrac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2\alpha}$ (ycbt).

III. GIẢI TOÁN THI

Bài 268 (ĐẠI HỌC MIỀN BẮC – 1970)

Trên các cạnh AB, BC và CA của một tam giác ABC, người ta chọn lần lượt các điểm M, N, P thỏa mãn điều kiện $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA} = k$ (với k là một số dương đã cho trước).

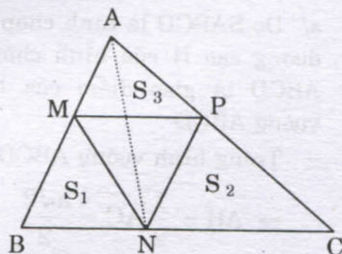
a/ Hãy tính diện tích của tam giác MNP theo k và S (với S là diện tích của tam giác ABC).

b/ Tam giác ABC là cố định. Hãy chọn số k sao cho tam giác MNP có diện tích nhỏ nhất.

Giải

Gọi S_1, S_2 và S_3 theo thứ tự là diện tích các tam giác BMN, CNP, và AMP.

Khi nối A với N, ta có :



$$\frac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{BN}{BC}.\frac{BA}{BA} = \frac{BN}{BC}$$

$$S_{\Delta ABN} = \frac{BN}{BC}.S_{\Delta ABC} = \frac{k}{k+1}S$$

$$\left(\text{vì } \frac{BN}{NC} = k \Rightarrow \frac{BN}{BN + NC} = \frac{k}{k+1} = \frac{BN}{BC}\right).$$

Mặt khác $\dfrac{MA}{MB} = k \Rightarrow \dfrac{MB}{MB + MA} = \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{MB}{AB}$

$$S_1 = \frac{MB}{AB}.S_{\Delta ABN} = \frac{1}{k+1}S_{\Delta ABN} = \frac{k}{(k+1)^2}S.$$

Để ý thấy S_1, S_2 và S_3 có vai trò ngang nhau nên

$$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{k}{(k+1)^2}S.$$

Vậy diện tích $\varphi(k)$ của tam giác MNP bằng :

$$\varphi(k) = S - (S_1 + S_2 + S_3) = S - \frac{3k}{(k+1)^2}S$$

$$\Rightarrow \varphi(k) = \left[1 - \frac{3k}{(k+1)^2}\right].S \qquad (1) \qquad \text{(ycbt).}$$

b/ Đặt : $f(k) = 1 - \dfrac{3k}{(k+1)^2}$

$$\Rightarrow f'(k) = \frac{3(k+1)(k-1)}{(k+1)^4} = \frac{3(k-1)}{(k-1)^2} = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{1}{4}$$

Ta có bảng biến thiên :

k	0		1		$+\infty$
f'(k)		–	0	+	
f(k)	1	↘	$\frac{1}{4}$	↗	1

Từ đó $\Rightarrow \min\limits_{k>0} f(k) = \dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \min_{k>0} \varphi(k) = \frac{1}{4}S \text{ khi } k = 1 \text{ (ycbt).}$$

Bài 269 (ĐẠI HỌC KHỐI B MIỀN BẮC – 1971)

Cho một hình chóp tứ giác đều S.ABCD, trong đó ABCD là một hình vuông có cạnh bằng a và SA = SB = SC = SD = a.

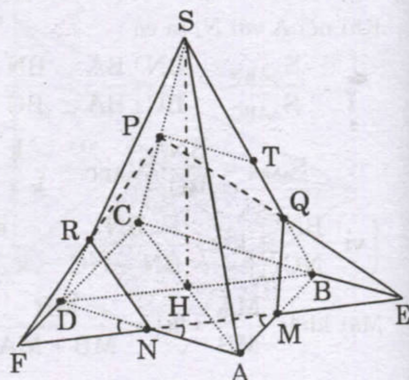
a/ Tính đường cao và thể tích của hình chóp theo a.

b/ Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh đáy AB, AD và cạnh bên SC. Mặt phẳng (MNP) cắt các cạnh bên SB và SD theo thứ tự ở Q và R. So sánh các đoạn thẳng QB và RD với SB ?

c/ Chứng minh rằng mặt phẳng MNP chia hình chóp đã cho thành hai phần tương đương (có thể tích bằng nhau).

Kết quả đó còn đúng nữa không khi : SA = SB = SC = SD ≠ a.

Giải



a/ Do SABCD là hình chóp tứ giác đều nên chân đường cao H của hình chóp hạ từ S xuống đáy ABCD là giao điểm của hai đường chéo hình vuông ABCD

Trong hình vuông ABCD

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Trong tam giác vuông SHA

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2}$$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy thể tích V hình chóp tứ giác đều SABCD là :

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \text{ (ycbt).}$$

b/ MN cắt BC và CD theo thứ tự ở E và F.

Xét 3 tam giác vuông cân bằng nhau $\Delta BME = \Delta AMN = \Delta DNF$

(tương ứng: $BM = AM = AN = DN \Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \widehat{DNF}$ ở vị trí đối đỉnh)

$$\Rightarrow DF = BE = AM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$$

Xét $Q = PE \cap SB$ và $R = PF \cap SD$

Trong mặt phẳng (SCB) vẽ PT song song với CB.

$\Rightarrow \Delta PTQ = \Delta EBQ$ $\left(BE = PT = \frac{a}{2}, \widehat{QPT} = \widehat{QEB} \text{ và } \widehat{PTQ} = \widehat{QBE}\right.$ (ở vị trí so le trong)

$$\Rightarrow QB = QT = \frac{1}{2}BT = \frac{1}{4}SB = \frac{a}{4} \text{ (ycbt)}$$

Chứng minh tương tự ta có : $RD = \frac{1}{4}SD = \frac{1}{4}SB = \frac{a}{4}$ (ycbt)

$\Rightarrow QB = RD$ (ycbt).

c/ Đặt SH = h thì thể tích của hình chóp S.ABCD là : $V = \frac{1}{3}a^2h$ (1)

Mặt phẳng (MNP) chia hình chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa đỉnh S và V_2 là thể tích của phần kề với đáy ABCD. Khi đó ta có :

$$V_1 = V - V_2$$
$$V_2 = V_{P.CEF} - (V_{Q.MBE} + V_{R.DFN})$$

Vì P là trung điểm của SC; $QB = RD = \frac{1}{4}SB$

$$\begin{cases} d[P; (ABCD)] = \dfrac{h}{2} \\ d[Q; (ABCD)] = \dfrac{1}{2}d[P; (ABCD)] = \dfrac{h}{4} \end{cases}$$

- $V_{P.CEF} = \frac{1}{3}S_{CEF}.\frac{h}{2} = \frac{h}{2.3}.\frac{1}{2}CF.CE =$

$$= \frac{h}{3.4}.(CD + DF).(CB + BE) = \frac{h}{3.4}.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^2h}{16}$$

- $V_{Q.BME} + V_{R.DFN} = \frac{1}{3}S_{BME}.\frac{h}{4} + \frac{1}{3}S_{DFN}.\frac{h}{4}$

$$= \frac{h}{2.3}S_{BME} = \frac{h}{2.3}.\frac{1}{2}BM.BE = \frac{h}{3.4}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2h}{3.16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_2 = \dfrac{3a^2h}{16} - \dfrac{a^2h}{3.16} = \dfrac{8a^2h}{3.16} = \dfrac{1}{6}a^2h \\ V_1 = \dfrac{1}{3}a^2h - \dfrac{1}{6}a^2h = \dfrac{1}{6}a^2h \end{cases} \Rightarrow V_1 = V_2$$

Để ý suốt trong quá trình chứng minh $V_1 = V_2$ ở trên ta đã không sử dụng giả thiết đường cao $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; đồng thời, các đoạn BE và DF cũng không phụ thuộc h.

Vậy kết quả vẫn đúng trong trường hợp : SA = SB = SC = SD ≠ a (đpcm).

Bài 270 (ĐẠI HỌC KHỐI A MIỀN BẮC – 1971)

Người ta muốn tìm một điểm G trong mặt phẳng của một tam giác ABC sao cho mọi đường thẳng đi qua G và nằm trong mặt phẳng ABC đều chia tam giác ABC ra hai phần có diện tích bằng nhau.

Giải

Giả sử tồn tại một điểm G trong mặt phẳng của (ABC) sao cho mọi đường thẳng đi qua G nằm trong mặt phẳng (ABC) đều chia ΔABC ra hai phần có diện tích bằng nhau.

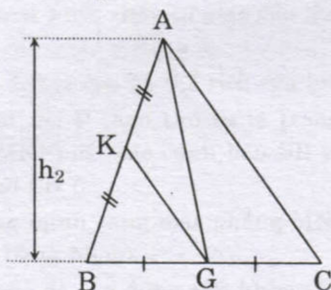
Ta liệt kê 3 khả năng sau để giải toán.

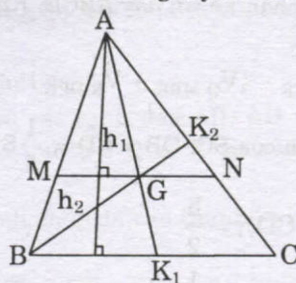
❐ **TH_1 :** Điểm G có tính chất trên không thể là một trong ba đỉnh của ΔABC và các điểm nằm ngoài ΔABC, vì từ G ta kẻ đường thẳng song song với một trong ba cạnh thì đường thẳng đó không có hơn một điểm chung với ΔABC.

❐ **TH_2 :** Điểm G trên cạnh; chẳng hạn BC và G ≠ B và C của ΔABC. Nối G với A. Do tính chất của điểm G ta có AG chia đôi diện tích ΔABC nên AG phải là đường trung tuyến của tam giác ABC; thật vậy :

Nếu : $S_{\Delta ABG} = \dfrac{1}{2}h_2.\,BG = S_{\Delta AGC} = \dfrac{1}{2}h_2.GC \Rightarrow \quad BG = GC.$

Lấy K là trung điểm của AB, nối G với K $\Rightarrow$ GK là trung tuyến của ΔGAB.





$\Rightarrow S_{\Delta BGK} = S_{\Delta GKA} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta GAB}$, điều này mâu thuẫn với tính chất của điểm G và KG không chia đôi diện tích ΔABC.

$\Rightarrow$ Điểm G không thể nằm trên ba cạnh của tam giác ABC.

❐ **TH_3 :** Điểm G nằm trong ΔABC. Nối G với A, G với B (kéo dài).

$$\Rightarrow \begin{cases} AG \cap BC = K_1 \\ BG \cap AC = K_2 \end{cases}$$

Do tính chất của điểm G nên theo **TH_2** AK_1 và BK_2 là hai đường trung tuyến của tam giác ABC, do đó G là trọng tâm của tam giác ABC. Từ G kẻ đường song song với BC cắt AB tại M và AC tại N.

Ta có : $S(AMN) = \frac{1}{2}MN.h_1 = MN.h_2$ ($h_1$là đường cao của tam giác AMN, h_2 là đường cao của hình thang MBCN) và

$$S(MBCN) = \frac{1}{2}(MN + BC).h_2 = \frac{1}{2}(MN + \frac{3}{2}MN).h_2 = \frac{5}{4}MN.h_2$$

Thành thử S(MBCN) > S(AMN). Điều này mâu thuẫn với tính chất của điểm G. Do đó điểm G không nằm trong tam giác ABC.

Vậy không tồn tại điểm G có tính chất nói trên (ycbt).

Bài 271 (ĐẠI HỌC KHỐI A – 1972 – MIỀN BẮC)

Cho một khối tứ diện đều ABCD có các cạnh bằng a. Người ta lấy các trung điểm(điểm giữa) A' của cạnh AB, B' của các cạnh AC, C' của cạnh CD, D' của cạnh BD.

a/ Chứng minh rằng A'B'C'D' là hình vuông.

b/ Tính thể tích của khối DAA'B'C'D' theo a. Nếu thay đổi đầu bài bằng cách lấy các điểm A', B', C', D' theo thứ tự trên các đoạn AB, AC, CD, BD sao cho $AA' = AB' = DC' = DD' = \frac{a}{2n}$ (n là một số thực dương cho sẵn $\geqslant \frac{1}{2}$) thì thể tích của khối DAA'B'C'D' sẽ bằng bao nhiêu ?

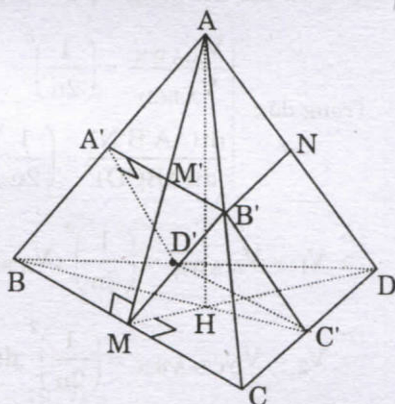
Giải

a/ Ta có : A'B' // BC và $A'B' = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

D'C' // BC và $D'C' = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

B'C' // AD và $B'C' = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$

A'D' // AD và $A'D' = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$



Do đó A'B'C'D' là hình thoi; mà (A'B'; A'D') = (BC; AD) = 90^0 (vì các cạnh đối diện của tứ diện đều thì vuông góc nhau)

Vậy thiết diện A'B'C'D' là một hình vuông (ycbt).

b/ Để ý A', B', C' và D' lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD và BD nên thiết diện A'B'C'D' chia khối tứ diện ABCD thành hai phần tương đương trong đó 1 phần là khối đa diện DAA'B'C'D', (có thể tích bằng nhau).

Gọi V là thể tích của khối tứ diện ABCD thì thể tích của khối DAA'B'C'D' bằng $\frac{V}{2}$, trong đó : $V = \frac{1}{3}dt(\Delta BCD).AH$ (AH chiều cao của tứ diện)

Ta có : $$\begin{cases} dt(\Delta BDC) = \frac{1}{2}BC.DM = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (M là trung điểm BC)} \\ AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Vậy thể tích V_0 khối đa diện DAA'B'C'D' là:

$$V_0 = \frac{V}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24} \text{ (ycbt).}$$

Khi $AA' = AB' = DC' = DD' = \frac{a}{2n}$

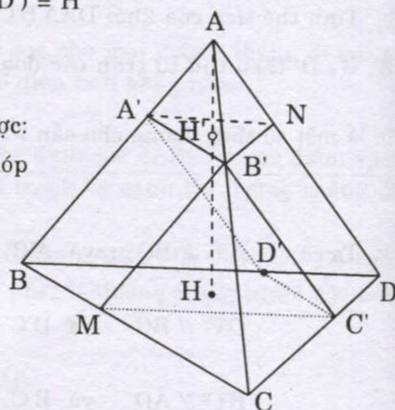
$$\Rightarrow \frac{AA'}{AB} = \frac{AB'}{AC} = \frac{DC'}{DC} = \frac{DD'}{DB} = \frac{1}{2n}$$

thì (A'B'C'D') chia tứ diện ABCD ra làm 2 phần, mà 1 phần là khối đa diện DAA'B'C'D'.

Để ý gọi N ∈ AD sao cho $\frac{AN}{AD} = \frac{1}{2n}$, thì (A'B' N) // (D'C'D).

Dựng AH là đường cao tứ diện ABCD thì AH ∩ (A'B'C'D') = H'

⇒ AH' là đường cao tứ diện AA'B'N và $\frac{AH'}{AH} = \frac{1}{2n}$.



Lúc đó : khối đa diện DAA'B'C'D' về mặt thể tích ta được: thể tích V_0 của nó bằng tổng thể tích của thể tích hình chóp A.A'B'N và thể tích lăng trụ D'C'D.A'B'N.

Trong đó : $\begin{cases} \dfrac{V_{A.A'B'N}}{V_{A.BCD}} = \left(\dfrac{1}{2n}\right)^3 & (1) \\ \dfrac{dt(\Delta A'B'N)}{dt(\Delta BCD)} = \left(\dfrac{1}{2n}\right)^2 & (2) \end{cases}$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} V_1 = V_{A.A'B'N} = \left(\frac{1}{2n}\right)^3 .V_{A.BCD} = \frac{1}{8n^3}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}.a^3}{96n^3}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} V_2 = V_{D'C'D.A'B'N} = \left(\frac{1}{2n}\right)^2 .dt(\Delta BCD).H'H$$

$$= \frac{1}{4n^2}.\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2n}.\frac{a\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}(2n-1)a^3}{96n^3}$$

Vậy : $V_0 = V_1 + V_2 = \frac{\sqrt{2}.a^3}{96n^3}[1 + 3(2n-1)] = \frac{\sqrt{2}(3n-1)}{48n^3}.a^3$ (ycbt).

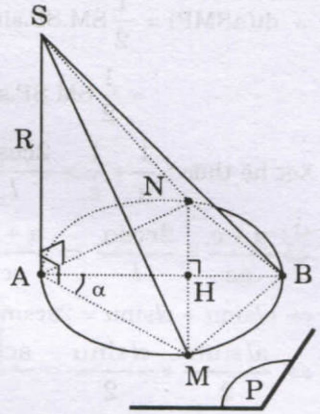
Bài 272 (ĐẠI HỌC Y – NHA – DƯỢC – 1977)

Trong mặt phẳng (P), xét một đường tròn (C) đường kính AB = 2R và một dây cung MN vuông góc với AB tại H. Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; Ax là đường thẳng vuông góc với (P) tại A. Trên Ax lấy một điểm S sao cho AS = R.

a/ Tính thể tích của hình chóp S.AMBN theo R và α.

b/ Xác định α để thể tích hình chóp S.BMN bằng 3 lần thể tích hình chóp S.AMN.

Giải



a/ Thể tích V của hình chóp S.AMBN là :

$$V = \frac{1}{3}dt(AMBN) \times SA \qquad (1)$$

Trong đó : dt(AMBN) = dt(ABN) + dt(ABM)

⇒ dt(AMBN) = 2dt(ABM)

(vì M,N đối xứng qua AB)

$\Rightarrow dt(AMBN) = 2 \times \frac{1}{2}AB \times MH$

$\Rightarrow dt(AMBN) = 2R \times AM \sin\alpha$

$\Rightarrow dt(AMBN) = 2R \times AB \cos\alpha.\sin\alpha$

$\Rightarrow dt(AMBN) = 2R^2(2\sin\alpha\cos\alpha) = 2R^2\sin2\alpha$

$V = \frac{1}{3} \times 2R^2\sin2\alpha \times R = \frac{2R^3}{3}\sin2\alpha$ (ycbt).

b/ Xét : $V(S.BMN) = \frac{1}{3}dt(BMN) \times SA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}MN \times BH \times SA$

$\Rightarrow V(SAMN) = \frac{1}{3}dt(AMN) \times SA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}MN \times AH \times SA$

$\Rightarrow V(SBMN) = 3V(SAMN) \Leftrightarrow BH = 3AH$

$$\Leftrightarrow \frac{BH}{3} = \frac{AH}{1} = \frac{BH + AH}{3+1} = \frac{AB}{4} = \frac{R}{2} \Rightarrow \begin{cases} AH = \frac{R}{2} \\ BH = \frac{3R}{2} \end{cases}$$

Mà $AM = AB\cos\alpha = \frac{AH}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$ (vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ (ycbt).

Bài 273 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – TỔNG HỢP – KHỐI A – 1977)

Cho một hình chóp tứ giác đều S.ABCD (S là đỉnh). Cắt hình chóp ấy bằng một mặt phẳng không song song với mặt đáy. Mặt phẳng này cắt các cạnh bên SA, SB, SC, CD lần lượt tại các điểm M, N, P, Q; MP và NQ cắt nhau tại L. Đặt SM = a, SN = b, SP = c, SQ = d, SL = l, $\widehat{ASH} = \alpha$ (SH là đường cao của hình chóp S.ABCD).

1/ Tính diện tích tam giác SMP theo a, c, α.

2/ Chứng minh hệ thức : $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos\alpha}{l}$.

3/ Chứng minh hệ thức : $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

Giải

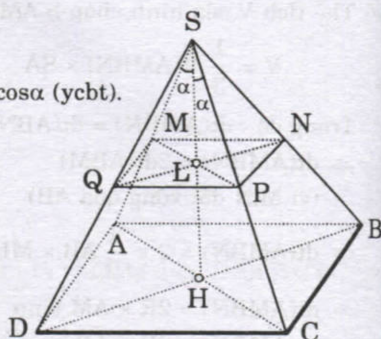
1/ Do hình chóp SABC đều, nên đáy ABCD là một hình vuông và đường cao SH là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD. Do đó H là tâm của hình vuông ABCD.

Mặt khác: SH = (SBD) ∩ (SAC).

$\Rightarrow$ QN $\cap$ MP = L $\in$ SH.

$\Rightarrow$ dt(ΔSMP) = $\frac{1}{2}$SM.SP.sin $\widehat{MSP}$

$= \frac{1}{2}$SM.SP.sin2α $= \frac{1}{2}$acsin2α = acsinα.cosα (ycbt).



2/ Xét hệ thức : $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos\alpha}{l}$ (1)

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{a+c}{ac} = \frac{2\cos\alpha}{l} \Leftrightarrow \frac{a+c}{ac} = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{l\sin\alpha}$ ($\alpha \neq 0$)

$\Leftrightarrow al\sin\alpha + cl\sin\alpha = 2ac\sin\alpha\cos\alpha = ac\sin2\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{al\sin\alpha}{2} + \frac{cl\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin2\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow$ dt(ΔSML) + dt(ΔSLP) = dt(ΔSMP) (2) : (luôn đúng)

$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos\alpha}{l}$ (đpcm).

Ghi chú : *Độc giả có thể dùng phương pháp diện tích.*

3/ Lý luận như câu 2/ với các tam giác SQL, SLN và SQN, ta được :

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{2\cos\alpha}{l} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra : $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$ (đpcm).

Bài 274 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – 1987)

Cho một hình sáu cạnh lồi ABCDEF với các đỉnh nằm trên đường tròn cố định tâm O bán kính R, ngoài ra AB = CD = EF; BC = DE = FA. Đặt AB = a, BC = b, $\widehat{AOB} = 2\alpha$, $\widehat{BOC} = 2\beta$.

1/ Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, α, β, từ đó suy ra rằng :

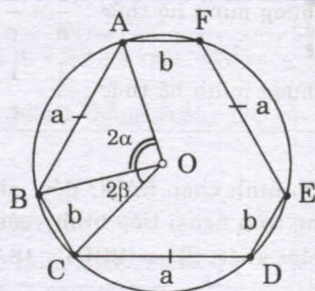
$$\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{a+2b};\ \tan\beta = \frac{b\sqrt{3}}{b+2a}.$$

2/ Tính diện tích S của hình trên theo R và α. Cho biết giá trị lớn nhất có thể có của S và ý nghĩa hình học. Với giá trị nào của α thì $S = \frac{3R^2\sqrt{6}}{4}$.

3/ Tính chu vi P của hình trên theo R và α. Cho biết giá trị lớn nhất có thể có của P và ý nghĩa hình học.

4/ Tìm hệ thức giữa a, b và dựa trên hệ thức này tìm lại kết quả ở câu 3/.

Giải



1/ Để ý : $3(2\alpha + 2\beta) = 2\pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ (1)

Ta có : $\left.\begin{array}{l}\frac{a}{2} = R\sin\alpha \\ \frac{b}{2} = R\sin\beta\end{array}\right\} \Rightarrow b\sin\alpha = a\sin\beta$

$\Leftrightarrow$ bsinα = $a\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ do (1)

$\Leftrightarrow$ bsinα = $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$

$\Leftrightarrow$ (2b + a)sinα = a $\sqrt{3}$ cosα (ycbt) $\Leftrightarrow$ tanα = $\frac{a\sqrt{3}}{2b+a}$ (đpcm).

Hoàn toàn tương tự ta tính được : tanβ = $\frac{b\sqrt{3}}{2a+b}$. (đpcm)

2/ Ta có : $S = 3(S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC}) = 3\left(\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}R^2\sin 2\beta\right)$

$\Rightarrow S = \frac{3R^2}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = 3R^2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$\Rightarrow S = 3R^2.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$ (2)

Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{6}\\ \beta=\frac{\pi}{6}\end{cases}$

Vậy : $S_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$, tương ứng $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ (ycbt).

Vậy trong các hình 6 cạnh nội tiếp trong đường tròn trên thì hình có diện tích lớn nhất là hình lục giác đều.

Tổng quát xét : $S = \frac{3R^2\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}.R^2\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3R^2\sqrt{6}}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\alpha=\frac{7\pi}{12}\Rightarrow 2\beta=\frac{\pi}{12}\\ 2\alpha=\frac{\pi}{12}\Rightarrow 2\beta=\frac{7\pi}{12}\end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$ (ycbt).

3/ P = 3(a + b) = 3(2Rsinα + 2Rsinβ) = 6R(sinα + sinβ)

$\Rightarrow P = 6R.2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 6R\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) \leqslant 6R$ (3)

Dấu đẳng thức trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}$

Vậy $P_{max} = 6R \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$

Vậy trong các hình lục giác nội tiếp trong đường tròn trên thì hình lục giác đều là hình có chu vi lớn nhất (ycbt).

4/ Lại có : $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA.OC.\cos\widehat{AOC}$

$$\Rightarrow AC^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\frac{2\pi}{3} = 3R^2$$

Mặt khác: $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC\cos\widehat{ABC}$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 - 2ab\cos[\pi - (\alpha + \beta)] = a^2 + b^2 + ab.$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 3R^2$$

Lại để ý đến : P = 3(a + b) nên muốn tìm giá trị lớn nhất của P chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $(a + b)^2$; $\forall a, b > 0$.

Ta có : $a^2 + b^2 + ab = (a + b)^2 - ab = (a + b)^2 - \frac{1}{4}[(a + b)^2 - (a - b)^2]$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + ab = \frac{3}{4}(a + b)^2 + \frac{1}{4}(a - b)^2 = 3R^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(a + b)^2 = 3R^2 - \frac{1}{4}(a - b)^2 \leqslant 3R^2$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 \leqslant 4R^2 \text{ (4) (ycbt).}$$

Dấu đẳng thức trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ a – b = 0 hay a = b.

Vậy max(a + b) = 2R $\Leftrightarrow$ maxP = 6R tương ứng a = b.

Do đó ta thấy lại kết quả ở câu c) (ycbt).

Bài 275 (ĐẠI HỌC NÔNG LÂM – 1994)

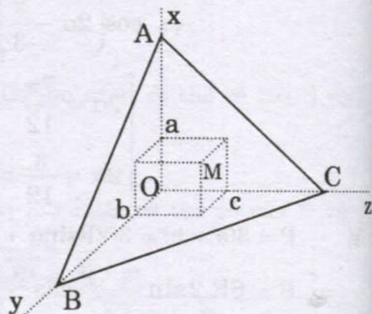
Cho một điểm M cố định bên trong góc tam diện vuông Oxyz. Một mp(P) qua M cắt các cạnh của tam diện Ox; Oy; Oz, theo thứ tự tại A; B; C. Khoảng cách từ M tới các mặt Oyz; Oxz; Oxy theo thứ tự là a; b; c.

a/ Chứng minh ΔABC không phải là tam giác vuông.

b/ Tính OA;OB; OC theo a; b; c để thể tích tứ diện OABC nhỏ nhất.

c/ Tính OA; OB; OC theo a; b; c để tổng OA + OB + OC nhỏ nhất.

Giải



a/ Sử dụng phép chứng minh phản chứng.

Giả sử ΔABC vuông tại A ⇒ BA ⊥ CA (1)

Mà CO ⊥ mp(BAO) ⇒ CO ⊥ BA (2)

Từ (1) và (2) ⇒ BA ⊥ mp (CAO) (3)

Mà BO ⊥ mp(CAO) (4)

Từ (3) và (4) cho thấy : qua B có hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với mp(CAO) tại O (vô lí).

Vậy điều giả sử ΔABC vuông tại A là sai (đpcm).

Với các góc khác cũng chứng minh tương tự.

Nghĩa là ΔABC không phải là tam giác vuông (đpcm).

b/ $V_{OABC} = \frac{1}{3}AO.dt(\Delta BOC) = \frac{1}{3}AO.\frac{1}{2}BO.CO = \frac{1}{6}AO.BO.CO$

$$V_{OABC} = V_{M.BAO} + V_{M.CAO} + V_{M.BOC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{3}c.dt\Delta(BAO) + \frac{1}{3}b.dt\Delta(CAO) + \frac{1}{3}a.dt\Delta(BOC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}OA.BO.CO = \frac{1}{6}c.AO.BO + \frac{1}{6}b.AO.CO + \frac{1}{6}a.BO.CO$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{c}{CO} + \frac{b}{BO} + \frac{a}{AO} \quad (5)$$

Để ý rằng : $V_{OABC} = \frac{1}{6}AO.BO.CO = \frac{1}{6}abc.\frac{1}{\frac{a}{OA}.\frac{b}{OB}.\frac{c}{OC}}$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương và sử dụng (5); ta có :

$$\frac{a}{OA}.\frac{b}{OB}.\frac{c}{OC} \leqslant \left(\frac{\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}+\frac{c}{OC}}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow V_{OABC} \geqslant \frac{1}{6}abc.\frac{1}{\left(\frac{\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}+\frac{c}{OC}}{3}\right)^3} = \frac{1}{6}abc.\frac{1}{\frac{1}{27}} = \frac{9}{2}abc \quad (6)$$

Dấu bất đẳng thức trong (6) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\frac{a}{AO} = \frac{b}{BO} = \frac{c}{CO} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} AO = 3a \\ BO = 3b \\ CO = 3c \end{cases}$$

Do đó $\overset{(6)}{\Rightarrow}$ $\min V = \frac{9}{2}abc$; tương ứng : $\begin{cases} OA = 3a \\ OB = 3b \\ OC = 3c \end{cases}$ (ycbt).

c/ Theo BĐT Bunhiacovsky ta có :

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 = \left|\sqrt{\frac{a}{OA}}\sqrt{OA} + \sqrt{\frac{b}{BO}}\sqrt{BO} + \sqrt{\frac{c}{CO}}\sqrt{CO}\right|^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 \leqslant \left(\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}+\frac{c}{OC}\right)(OA+OB+OC) = OA+OB+OC$$

Do đó : $\min(OA + OB + OC) = (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$ xảy ra khi và chỉ khi :

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{OA}}}{\sqrt{OA}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{BO}}}{\sqrt{BO}} = \frac{\sqrt{\frac{c}{CO}}}{\sqrt{CO}}$$

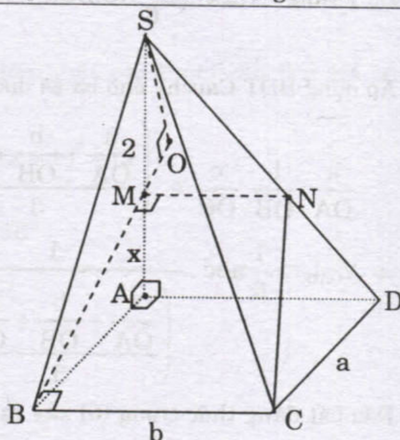
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{OA} = \frac{\sqrt{b}}{OB} = \frac{\sqrt{c}}{OC} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{AO+BO+CO} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AO = \sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \\ BO = \sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \\ CO = \sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \end{cases} \text{(ycbt).}$$

Bài 276 (ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM – PB – 1996)

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = b. Cạnh AS = 2a của hình chóp vuông góc với đáy. Gọi M là điểm trên cạnh AS, với AM = x; ($0 \leqslant x \leqslant 2a$).
1/ Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện gì ? Tính diện tích thiết diện ấy.
2/ Xác định x để mặt phẳng (MBC) chia hình chóp ra hai phần với thể tích bằng nhau.

Giải



1/ Gọi : N = (MBC) $\cap$ (SD)

$$\Rightarrow \begin{cases} MN = (SAD) \cap (MBC) \\ AD // BC \end{cases}$$

$\Rightarrow$ MN // AD // BC

$\Rightarrow$ MNCB là hình thang.

Mặt khác, ta có : AD $\perp$ (SAB)

$\Rightarrow$ AD $\perp$ BM

$\Rightarrow$ MN $\perp$ BM; BC $\perp$ BM;

$$\widehat{BMN} = \widehat{CBM} = \frac{\pi}{2}$$

Vậy mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang MNCB vuông tại M và B. (ycbt)

$$\text{Ta có : } \begin{cases} BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + x^2} \\ \dfrac{MN}{AD} = \dfrac{SM}{SA} \Rightarrow MN = \dfrac{SM.AD}{SA} = \dfrac{(2a - x)b}{2a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{MNCB} = \frac{1}{2}BM(MN + BC) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2}\left(\frac{(2a - x)b}{2a} + b\right)$$

$$\Rightarrow S_{MNCB} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}.(4a - x)b}{4a} \text{ (ycbt).}$$

2/ Trong mặt phẳng (SAB), ta dựng : SO $\perp$ BM

Suy ra : SO $\perp$ (MNCB) tại O.

$$\text{Ta có : } \Delta SOM \backsim \Delta BAM \Rightarrow \frac{SO}{AB} = \frac{SM}{BM}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{AB.SM}{BM} \Rightarrow SO = \frac{a(2a - x)}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Khi đó, thể tích hình chóp S.MNBC là :

$$V_{S.MNCB} = \frac{1}{3}.SO.S_{MNCB} = \frac{1}{3}.\frac{a(2a - x)}{\sqrt{a^2 + x^2}}.\frac{\sqrt{a^2 + x^2}.(4a - x)b}{4a}$$

$$\Rightarrow V_{S.MNCB} = \frac{b(2a - x)(4a - x)}{12}$$

Thể tích hình chóp S.ABCD là: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{2a^2b}{3}$.

Xét : $V_{S.MNCB} = \frac{1}{2}.V_{S.ABCD}$

$\Leftrightarrow \frac{b(2a-x)(4a-x)}{12} = \frac{2a^2b}{6}$; $(0 \leqslant x \leqslant 2a)$

$\Leftrightarrow (4a-x)(2a-x) = 4a^2$; $(0 \leqslant x \leqslant 2a)$

$\Leftrightarrow x^2 - 6ax + 4a^2 = 0$; $(0 \leqslant x \leqslant 2a)$ (có : $\Delta' = 5a^2 > 0$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3a - a\sqrt{5} : \text{thỏa } 0 \leqslant x \leqslant 2a \\ x_2 = 3a + a\sqrt{5} : \text{không thỏa } 0 \leqslant x \leqslant 2a \end{array}\right.$

Vậy với : $x = a(3-\sqrt{5})$ thì ycbt được thỏa.

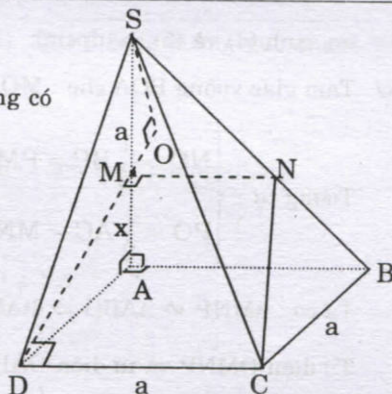
Bài 277 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI A – 1997)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, cạnh SA ⊥ (ABCD) và có độ dài SA = a. Một mặt phẳng đi qua CD cắt các cạnh SA, SB lần lượt ở M, N. Đặt AM = x.

1/ Tứ giác MNCD là hình gì ? Tính diện tích tứ giác MNCD theo a, x.

2/ Xác định giá trị của x để thể tích của hình chóp S.MNCD bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích hình chóp S.ABCD.

Hướng dẫn



Tương tự, khi xem Đề ĐẠI HỌC Y DƯỢC – PB – 1996.

Độc giả có thể thay B bằng D; AD = a; SA = a sẽ dễ dàng có được :

1/ MNCD là hình thang vuông tại M; D (ycbt).

$$S_{MNCD} = \frac{1}{2}(2a-x)\sqrt{a^2+x^2} \text{ (ycbt).}$$

2/ Xét : $V_{SMNCD} = \frac{2}{9}V_{SABCD}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}a$ (ycbt).

Bài 278 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI A – 1997)

Trên các cạnh của góc tam diện vuông Oxyz lấy các điểm: A ∈ Ox và OA = a > 0; B ∈ Oy và OB = b > 0; C ∈ Oz và OC = c > 0. Kẻ OH ⊥ mp (ABC).

a/ Chứng minh ΔABC có các góc đều nhọn và H là trực tâm ΔABC.

b/ Chứng minh : $(\text{dt } \Delta ABC)^2 = (\text{dt } \Delta BAO)^2 + (\text{dt } \Delta CAO)^2 + (\text{dt } \Delta BOC)^2$

c/ Gọi M; N; P theo thứ tự là trung điểm AB; BC; CA. Chứng minh bốn mặt của tứ diện POMN là các tam giác bằng nhau. Tính thể tích của nó theo a; b; c.

d/ Cho A; B; C chạy trên các cạnh của góc tam diện nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện : $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ (k > 0 cho trước). Khi nào thì ΔABC có diện tích lớn nhất ? Chứng minh rằng khi đó thì đoạn OH cũng dài nhất.

Giải

a/ Tương tự đề ĐH NÔNG LÂM – KHỐI A – 1994. (đpcm)

b/ $$\begin{cases} dt(\Delta BAO) = \frac{1}{2}ab \Rightarrow (dt\Delta BAO)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 & (1) \\ dt(\Delta CAO) = \frac{1}{2}ab \Rightarrow (dt\Delta CAO)^2 = \frac{1}{4}a^2c^2 & (2) \\ dt(\Delta BOC) = \frac{1}{2}ab \Rightarrow (dt\Delta BOC)^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 & (3) \end{cases}$$

Cộng (1) + (2) + (3) theo vế ta có :

$$(dt\Delta BAO)^2 + (dt\Delta CAO)^2 + (dt\Delta BOC)^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \quad (4)$$

Mặt khác : $dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}BC.AI$

$$\Rightarrow (dt\Delta ABC)^2 = \frac{1}{4}BC^2.AI^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2)(AO^2 + OI^2)$$

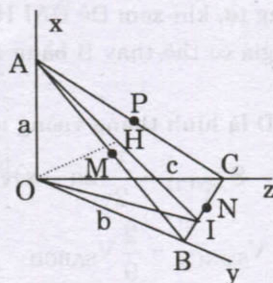
Trong tam giác vuông BOC cho :

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow OI^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$$

Do đó : $(dt\Delta ABC)^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2)\left(a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}\right) = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$ (5)

So sánh (4) và (5) ⇒ (đpcm).

c/ Tam giác vuông BOA cho : $MO = \frac{1}{2}AB = PN$



Tương tự : $\begin{cases} NO = \frac{1}{2}BC = PM \\ PO = \frac{1}{2}AC = MN \end{cases} \Rightarrow$ (đpcm).

Ta có : $\Delta MNP \backsim \Delta ABC \Rightarrow dt\Delta MNP = \frac{1}{4}dt\Delta ABC$

Tứ diện OMNP và tứ diện OABC có cùng đường cao OH nên :

$$\begin{cases} V_{OMNP} = \frac{1}{3}.OH.dt\,\Delta MNP = \frac{1}{3}OH.\frac{1}{4}dt\Delta ABC = \frac{1}{4}V_{OABC} \\ V_{OABC} = \frac{1}{3}.OA.dt\,\Delta BOC = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}BO.CO = \frac{1}{6}abc \end{cases}$$

$\Rightarrow V_{OMNP} = \frac{1}{24}abc$ (ycbt).

d/ Theo BĐT Bunhiacovky : $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leqslant a^4 + b^4 + c^4$ (*)

Mặt khác : $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$

$$\Leftrightarrow k^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\Rightarrow k^4 \geqslant 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 12\,(dt\Delta ABC)^2 \text{ [theo (5)]}$$

$$\Leftrightarrow dt\,\Delta ABC \leqslant \frac{k^2}{2\sqrt{3}} \quad (6)$$

Dấu đẳng thức trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

$\Rightarrow$ dtΔABC lớn nhất $\Rightarrow$ max (dtΔABC) = $\dfrac{k^2}{2\sqrt{3}}$ (ycbt).

Các tam giác vuông OAI và BOC cho :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2}, \quad \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant 3.\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \text{ (BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow OH^2 \leqslant \frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{3}$$

Ta cũng có : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$$\Rightarrow OH^2 \leqslant \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{k^2}{9} \Rightarrow OH \leqslant \frac{1}{3}k \qquad (7)$$

Dấu đẳng thức trong (7) xảy ra khi $\Leftrightarrow a = b = c \Rightarrow$ khi đó OH dài nhất tương ứng với dt ΔABC lớn nhất (đpcm).

Bài 279 (CAO ĐẲNG KINH TẾ ĐỐI NGOẠI – CP – 1999)

Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. I là trung điểm AB. Qua I dựng đường vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và trên đó lấy điểm S sao cho $2IS = a\sqrt{3}$.

1/ Chứng minh rằng tam giác SAD là tam giác vuông.

2/ Tính thể tích hình chóp S.ACD rồi suy ra khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD).

Giải

1/ Xét : $\begin{cases} SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp AD \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SA$

$\Rightarrow \Delta$SAD vuông tại A (đpcm).

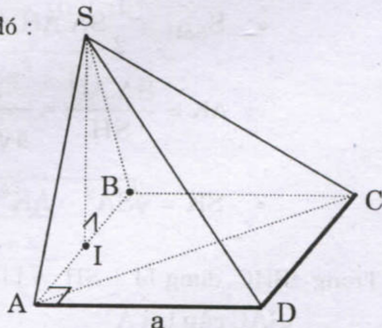
2/ Ta có : $V_{SACD} = \dfrac{1}{3}.S_{ACD}.SI = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (ycbt).

Gọi h là khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD). Khi đó :

$$V_{SACD} = \frac{1}{3}.S_{SAD}.h \qquad (1)$$

Mà : $S_{SAD} = \dfrac{1}{2}.SA.AD$

Với : $\begin{cases} SA = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}} = a \\ AD = a \end{cases} \Rightarrow S_{SAD} = \dfrac{1}{2}a^2.$



Khi đó : $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $h = 3.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}.\dfrac{2}{a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (ycbt).

Bài 280 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI A – ĐỢT 1 – 1999)

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA ⊥ (ABC) và SA = a. M là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Đặt $\widehat{ACM} = \alpha$, hạ SH vuông góc với đường thẳng CM.

1/ Tìm quỹ tích điểm H. Suy ra giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SAHC.

2/ Hạ AI ⊥ SC, AK ⊥ SH. Tính độ dài SK, AK và thể tích tứ diện SAKI.

Giải

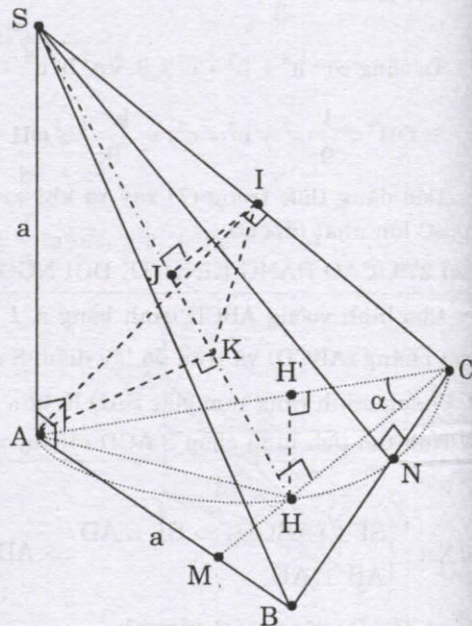
1/ Gọi N là chân đường cao kẻ từ S trong tam giác SBC, ta có :

$BC \perp (SAN) \Rightarrow BC \perp AN$ (1)

Ta có : $SH \perp MC \Rightarrow MC \perp (SAH) \Rightarrow AH \perp HC$ (2)

(1), (2) ⇒ H luôn nhìn AC dưới một góc vuông.

Nhận thấy : $\begin{cases} M \equiv A \Rightarrow H \equiv A \\ M \equiv B \Rightarrow H \equiv N \end{cases}$



Độc giả tự làm phần đảo, thì ta có :

Quỹ tích điểm H là cung $\widehat{AN}$ thuộc đường tròn đường kính AC (ycbt).

Thể tích tứ diện SAHC là :

$$V_{SAHC} = \frac{1}{6}SA.AC.HH' = \frac{1}{6}a^2.HH'$$

(với H' là chân đường cao hạ từ H trong ΔAHC)

Suy ra : $\max(V_{SAHC}) \Leftrightarrow \max(HH')$

⇔ H là trung điểm $\widehat{AC}$

Khi đó : $(V_{SAHC})_{max} = \dfrac{a^3}{12}$ (ycbt).

2/ Ta có : • $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = a\sin\alpha$

• $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$

• $S_{SAH} = \dfrac{1}{2}SA.AH = \dfrac{1}{2}SH.AK$

$$\Rightarrow AK = \frac{SA.AH}{SH} = \frac{a^2.\sin\alpha}{a\sqrt{1+\sin^2\alpha}} = \frac{a.\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}} \text{ (ycbt).}$$

• $SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$ (ycbt).

Trong ΔSHC, dựng IJ ⊥ SH ⇒ IJ // CH

Mà : $\begin{cases} \Delta SAC \text{ cân tại A} \\ AI \perp SC \end{cases} \Rightarrow SI = IC \Rightarrow \quad IJ = \dfrac{1}{2}CH = \dfrac{1}{2}a.\cos\alpha$

Mặt khác : CH ⊥ (SAH) ⇒ IJ ⊥ (SAK).

Vậy thể tích hình chóp SAKI là :

$$V_{SAKI} = \frac{1}{3}IJ.S_{SAK} = \frac{1}{12}a.\cos\alpha.\frac{a.(\sin\alpha)a}{1+\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow V_{SAKI} = \frac{a^3.(\sin 2\alpha)}{24(1+\sin^2\alpha)} \text{ (đvtt).}$$

Bài 281 (ĐẠI HỌC MỸ THUẬT CÔNG NGHỆ - 1999)

Cho tứ diện ABCD có cạnh AB = x, các cạnh còn lại bằng a.

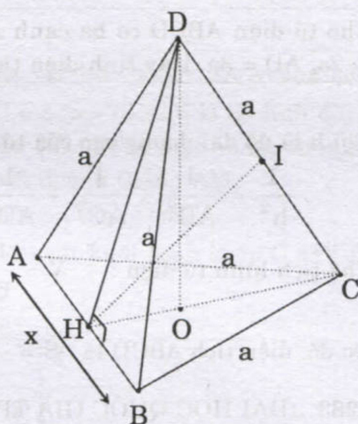
1/ Tính diện tích toàn phần của tứ diện theo a, x.

2/ Tính thể tích khối tứ diện theo a, x. Với giá trị nào của x thì thể tích đó đạt giá trị lớn nhất.

Giải

1/ Gọi H là trung điểm AB, theo tính chất tam giác cân $\Rightarrow \begin{cases} CH \perp AB \\ DH \perp AB \end{cases}$

Ta có : AB = x; DA = DB = DC = AC = BC = a



Nên $\begin{cases} \Delta ADC = \Delta BCD \text{ (do hai tam giác đều cạnh a)} \\ \Delta DAB = \Delta CAB \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{ADC} = S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

Ta có : $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2}$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow S_{DAB} = S_{CAB} = \frac{1}{2}CH.AB = \frac{1}{4}x\sqrt{4a^2 - x^2} \quad (2)$$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow S_{tp} = \frac{1}{2}\left(a^2\sqrt{3} + x\sqrt{4a^2 - x^2}\right)$ (ycbt).

2/ Gọi O là hình chiếu của D xuống mặt phẳng (ABC).

Do : AD = DB = DC = a $\Rightarrow$ OA = OB = OC

$\Rightarrow$ DO là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

DO hiển nhiên là đường cao tứ diện DABC.

Gọi I là trung điểm DC. Ta có : DH = HC $\Rightarrow \Delta DHC$ cân $\Rightarrow HI \perp DC$

Khi đó : $HI = \sqrt{HC^2 - IC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - x^2}$

Từ : $S_{DHC} = \frac{1}{2}DO.HC = \frac{1}{2}HI.DC$

$$\Rightarrow DO = \frac{HI.DC}{HC} \quad \Rightarrow DO = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - x^2}.a}{\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{a.\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$$

Vậy : $V_{ABCD} = \frac{1}{3}DO.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a.\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.\frac{x.\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{12}ax\sqrt{3a^2 - x^2} \text{ (ycbt); } (0 < x < a\sqrt{3})$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có :

$$V_{ABCD}^2 = \frac{a^2.x^2}{144}(3a^2 - x^2) \leqslant \frac{a^2}{144}.\left[\frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2}\right]^2 = \frac{a^2}{144}.\frac{9a^4}{4} = \left(\frac{a^3}{8}\right)^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} \leqslant \frac{a^3}{8} \quad (4)$$

Dấu đẳng thức trong (3) và (4) xảy ra $\Leftrightarrow \quad x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy : $\max(V_{ABCD}) = \frac{a^3}{8}$ tương ứng $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (ycbt).

Bài 282 (ĐẠI HỌC HUẾ – 1999)

Cho tứ diện ABCD có ba cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một và AB = a, AC = 2a, AD = 3a. Hãy tính diện tích tam giác BCD theo a.

Hướng dẫn

Gọi h là độ dài đường cao của tứ diện vuông ở A và kẻ từ A thì đã chứng minh được :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{9a^2} \quad \Rightarrow h = \frac{6}{7}a.$$

Thể tích hình tứ diện : $\quad V = \frac{1}{6}AB.AC.AD = a^3$

Do đó: diện tích ΔBCD là : $S = \frac{3V}{h} = \frac{7a^2}{2}$ (ycbt).

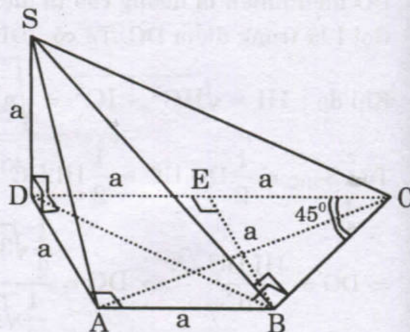
Bài 283 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM – KHỐI A – ĐỢT 1 – 2000)

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình thang ABCD vuông tại A và D; AB = AD = a; CD = 2a. Cạnh bên SD vuông góc với mặt phẳng (ABCD); SD = a.

1/ Chứng minh rằng tam giác SBC vuông.Tính diện tích tam giác SBC.

2/ Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Giải



1/ Gọi E là trung điểm của CD. Do tính chất hình thang vuông ABCD, suy ra :

$$BD = BC \Rightarrow EB \perp DC, \; EB = \frac{1}{2}DC = a$$

(trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

$\Rightarrow \Delta DBC$ vuông tại B.

Theo định lý ba đường vuông góc

$\Rightarrow$ SB $\perp$ BC (vì BC $\perp$ SD, BC $\perp$ BD)

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B (đpcm).

Lúc đó diện tích S của ΔSBC là:

$$S = \frac{1}{2}SB.BC = \frac{1}{2}\sqrt{SD^2 + DB^2}.\left(EB.\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}\left(a\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2 \text{ (ycbt).}$$

2/ Hạ AH ⊥ (SBC) tại H ⇒ h = AH = d[A; (SBC)]

Thể tích V của hình chóp A.SBC là : $V = \frac{1}{3}.S.h = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{2}a^2.h = \frac{a^2.h}{\sqrt{6}}$ (1)

Mặt khác thể tích V cũng là thể tích hình chóp S.ABC

$$V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SD = \frac{1}{3}.(S_{ABCD} - S_{DAC}).a$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(\frac{3a^2}{2} - a^2\right)a = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.a = \frac{a^3}{6} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2); ta có : $\frac{a^2.h}{\sqrt{6}} = \frac{a^3}{6} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Vậy : $d[A; (SBC)] = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ (ycbt).

Bài 284 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI – KHỐI A – 2000)

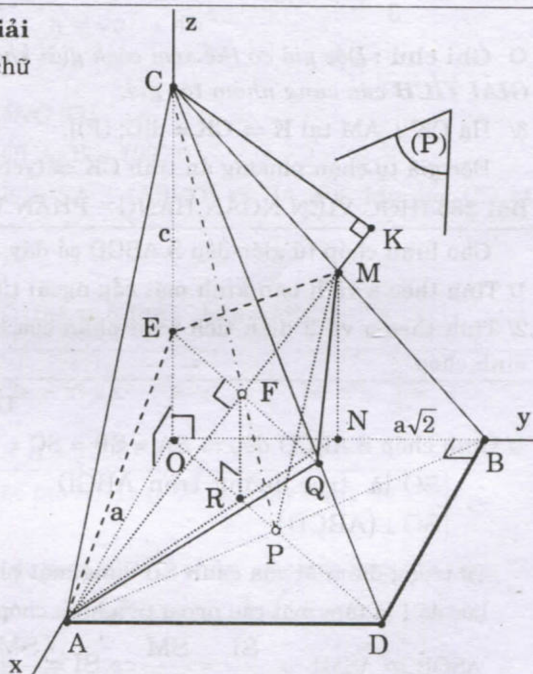
Trong không gian cho các điểm A; B; C theo thứ tự thuộc các tia Ox; Oy; Oz vuông góc với nhau từng đôi một, sao cho OA = a (a > 0); OB = $a\sqrt{2}$; OC = c (c > 0). Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật AOBD và M là trung điểm của đoạn BC. (P) là mặt phẳng đi qua AM và cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AM.

1/ Gọi E là giao điểm của (P) với đường thẳng OC. Tính độ dài đoạn thẳng OE.

2/ Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối hình chóp C.AOBD bởi mặt phẳng (P).

3/ Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P).

Giải



1/ Gọi N là trung điểm OB; P là tâm hình chữ nhật ABCD.

Xét hệ toạ độ : $\left\{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AD}\right\} \equiv (ADO)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; a\right) \\ \overrightarrow{DO} = (-a\sqrt{2}; a) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DO} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)(-a\sqrt{2}) + a.a = 0$

⇒ AN ⊥ DO tại R (1)

Mà : MN ⊥ DO

(vì MN // CO ⊥ (OBDA) ⊃ OD) (2)

Từ (1) và (2) cho : DO ⊥ AM

Lại thấy : EQ ⊥ AM với :

EQ = (P) ∩ (OCD) ⇒ EQ // OD

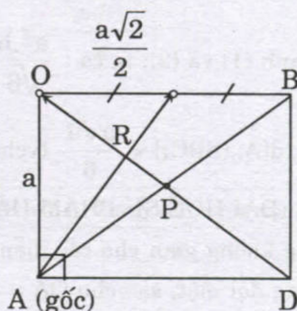
Tính chất đường trung bình cho : $MP = \frac{1}{2}AC$.

Gọi : $F = (P) \cap CP$ ta có : $\Delta FCA \backsim \Delta FPM$

$$\Rightarrow \frac{FC}{FP} = \frac{AC}{MP} = 2 \Rightarrow \frac{CE}{OE} = 2 \Rightarrow OE = \frac{1}{3}OC$$

mà $\frac{FC}{FP} = \frac{CE}{OE}$. Vậy : $OE = \frac{c}{3}$ (ycbt).

2/ Đặt : $Q = (P) \cap CD$. Thiết diện mà (P) cắt hình chóp C.AOBD sẽ chia hình chóp C.AOBD thành hai khối đa diện.



Để ý : $$\begin{cases} \dfrac{V_{C.AEQ}}{V_{C.AOD}} = \dfrac{CA}{CA}.\dfrac{CE}{CO}.\dfrac{CQ}{CD} = 1.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} \\ \dfrac{V_{C.MEQ}}{V_{C.BOD}} = \dfrac{CM}{CB}.\dfrac{CE}{CO}.\dfrac{CQ}{CD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Vì : $V_{C.OAD} = V_{C.BOD} = \frac{1}{2}V_{C.OABD}$

$$\Rightarrow V_{C.AEQ} + V_{C.MEQ} = \left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right).\frac{1}{2}.V_{C.OABD}$$

$$\Rightarrow V_{C.AEQ} + V_{CMEQ} = \frac{1}{3}.V_{C.OABD}$$

Vậy tỷ số thể tích của hai khối đa diện do mặt phẳng (P) cắt hình chóp C.OABD tạo thành là : $\frac{1}{3}$ hoặc 3 (ycbt).

✪ **Ghi chú :** *Độc giả có thể xem cách giải khác ở **TUYỂN TẬP 500 BÀI TOÁN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH** của cùng nhóm tác giả.*

3/ Hạ $CK \perp AM$ tại $K \Rightarrow CK = d[C; (P)]$.

Độc giả tự chọn phương án tính $CK \Rightarrow$ (ycbt).

Bài 285 (HỌC VIỆN NGÂN HÀNG – PHÂN VIỆN TP. HCM – Khối B – 2000)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, đường cao SO = h.

1/ Tính theo a và h bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

2/ Tính theo a và h diện tích toàn phần của hình chóp, từ đó tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Giải

1/ Hình chóp S.ABCD đều $\Rightarrow SA = SB = SC = SD$

$$\Rightarrow \begin{cases} SO \text{ là trục đường tròn } ABCD \\ SO \perp (ABCD) \end{cases}$$

Từ trung điểm M của cạnh SB dựng mặt phẳng trung trực (α) của cạnh SB $\Rightarrow (\alpha) \cap SO = I$

Lúc đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD và có bán kính R = SI.

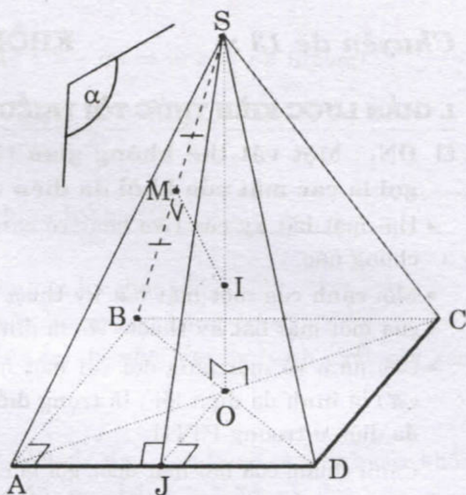
$$\Delta SOB \backsim \Delta SMI \Rightarrow \frac{SI}{SB} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SM.SB}{SO}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{SB^2}{2.SO}\left(\text{vì}: SM = \frac{SB}{2}\right)$$

$$\Rightarrow SI = \frac{SO^2 + OB^2}{2h}$$

$$= \frac{h^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2h} = \frac{2h^2 + a^2}{4h}$$

Vậy : $R = \dfrac{2h^2 + a^2}{4h}$ (ycbt).



2/ Gọi J là trung điểm cạnh AD thì trung đoạn SJ là :

$$SJ = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{2}$$

Diện tích toàn phần S_{tp} là của hình chóp S.ABCD : $S_{tp} = a^2 + 4(\frac{1}{2}.AD.SJ)$

$$\Rightarrow S_{tp} = a^2 + 4.\left(\frac{1}{2}.a.\frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{2}\right) = a\left(a + \sqrt{a^2 + 4h^2}\right) \text{ (ycbt)}$$

So sánh hai thể tích V của hình chóp :

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{3}Bh \\ V = \dfrac{1}{3}r.S_{tp} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{Bh}{S_{tp}} = \frac{a^2h}{a\left(a + \sqrt{a^2 + 4h^2}\right)} = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}} \text{ (ycbt).}$$

ĐỀ TƯƠNG TỰ

Bài 286 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI A, B – 1997)

Đáy hình chóp SABCD là hình vuông, cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = a. Mp qua CD cắt SA, SB tại M, N. Đặt MA = x

a/ Tìm diện tích thiết diện.

b/ Tìm x để thể tích hình chóp SMNCD bằng $\frac{2}{9}$ thể tích hình chóp SABCD.

Hướng dẫn: a/ $S = \frac{1}{2}(MN + CD)MD = \frac{1}{2}(2a - x)\sqrt{x^2 + a^2}$ b/ $x = \frac{2}{3}a$.

Bài 287 (ĐẠI HỌC ĐÔNG ĐÔ HÀ NỘI – KHỐI A – 1998)

Cạnh đáy hình chóp tam giác đều bằng a, góc tạo bởi mặt bên và đáy bằng 60^0.

a/ Tìm thể tích và S_{tp} hình chóp.

b/ Tìm tỉ số thể tích hai phần của hình chóp do mặt phẳng phân giác của góc nhị diện 60^0 cắt hình chóp.

Hướng dẫn : a/ $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ b/ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

Chuyên đề 13 : **KHỐI ĐA DIỆN**

I. GIẢN LƯỢC KIẾN THỨC TỐI THIỂU

☐ **ĐN$_1$: Một vật thể không gian ($\mathcal{H}$) gồm một số hữu hạn các miền đa giác được gọi là các mặt của khối đa diện ($\mathcal{H}$) và có các tính chất sau :**

- Hai mặt bất kỳ của ($\mathcal{H}$) hoặc có cạnh chung hoặc có một đỉnh chung hoặc không có điểm chung nào.
- Mỗi cạnh của một mặt bất kỳ thuộc ($\mathcal{H}$) là cạnh chung của đúng 2 mặt của ($\mathcal{H}$), mỗi đỉnh của một mặt bất kỳ thuộc ($\mathcal{H}$) là đỉnh chung của ít nhất của 3 mặt thuộc ($\mathcal{H}$).
- ($\mathcal{H}$) nằm về một phía đối với một mặt phẳng chứa một mặt bất kỳ thuộc ($\mathcal{H}$). Thì ta nói ($\mathcal{H}$) là hình đa diện lồi : là trọng điểm của môn Hình Không Gian khi nghiên cứu các khối đa diện ở trường PTTH

Cạnh chung của hai mặt được gọi là cạnh của ($\mathcal{H}$), đỉnh chung của các cạnh là đỉnh của ($\mathcal{H}$).

Nếu tồn tại các đoạn thẳng không nằm trong những mặt của ($\mathcal{H}$) và có các đầu mút là các đỉnh thuộc ($\mathcal{H}$), thì ta gọi chúng là các đường chéo của ($\mathcal{H}$).

Hình ($\mathcal{H}$) chia không gian thành 2 miền : miền trong và miền ngoài. Miền trong của ($\mathcal{H}$) là tập hợp điểm trong, miền ngoài của ($\mathcal{H}$) là tập hợp điểm ngoài.

Điểm A không thuộc ($\mathcal{H}$) được gọi là điểm trong, nếu A thuộc phần chung giao của các nửa không gian có bờ là các mặt phẳng chứa các mặt của hình ($\mathcal{H}$).

Điểm A không thuộc ($\mathcal{H}$) và miền trong của ($\mathcal{H}$) được gọi là điểm ngoài.

Hình ($\mathcal{H}$) cùng với miền trong của nó được gọi là khối đa diện lồi ($\mathcal{H}$). Trong chương trình PTTH ta chỉ xét các khối đa diện lồi. Nhân đây ta xét lại một số khái niệm.

☐ **ĐN$_2$: Hình lăng trụ là một khối đa diện có 2 mặt đa giác song song gọi là đáy, các mặt còn lại gọi là mặt bên; là những hình bình hành.**

- Hình hộp là một hình lăng trụ có đáy hình bình hành.
- Hình chóp đa giác là hình đa diện có một mặt là đa giác gọi là đáy, các mặt còn lại gọi là mặt bên là tam giác có một đỉnh chung (gọi là đỉnh chóp).
- Ta xét một khối đa diện lồi. Nếu có một qui tắc để từ khối ($\mathcal{H}$) ta nhận được các khối ($\mathcal{H}_1$), ($\mathcal{H}_2$); ...; ($\mathcal{H}_n$) đôi một không có điểm chung trong, khi đó ta nói ($\mathcal{H}$) đã được phân chia thành n khối đa diện rời nhau mà thể tích được bảo toàn : $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$

Chẳng hạn nếu ta nối một điểm nằm trong hình tứ diện với các đỉnh của nó bằng các đoạn thẳng, thì ta đã phân chia nó thành bốn hình chóp mà đỉnh của chúng là điểm chung của tứ diện, đáy của bốn hình chóp là bốn mặt bên của hình tứ diện.

Đối với khối đa diện lồi ta có một công thức liên hệ giữa cạnh, đỉnh và mặt, nó giúp ta khảo sát một số đặc trưng cơ bản của một khối đa diện tùy ý.

☐ **ĐỊNH LÝ EULER**

Giả sử một khối đa diện lồi có m mặt, d đỉnh, c cạnh, khi đó : $m + d - c = 2$.

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 288

Chứng minh rằng khối đa diện lồi ta luôn có : $m \geqslant \frac{c}{3} + 2$ và $d \geqslant \frac{c}{3} + 2$

Giải

Ký hiệu d_i là số đỉnh mà tại đó có i cạnh xuất phát $\forall i \in \overline{1; n}$ thì :

$2c = 3d_3 + 4d_4 + ... id_j + ... + nd_n \Rightarrow 2c \geqslant 3d = 3(c + 2 - m) \Rightarrow m \geqslant \frac{c}{3} + 2$ (đpcm)

Hoàn toàn tương tự ta có : $2c \geqslant 3m = 3(c + 2 - d) \Rightarrow d \geqslant \frac{c}{3} + 2$ (đpcm)

Bài 289

Có hay không một khối đa diện lồi mà các mặt là hình lục giác ?

Giải

Giả sử tồn tại khối như vậy. Vì mỗi mặt của khối là một lục giác lồi.

$\Rightarrow$ Tổng các góc của mỗi mặt bằng 4π và tổng các góc của m mặt bằng $4m\pi$

Mặt khác tại mỗi đỉnh của khối tổng các góc phẳng tại đó nhỏ hơn 2π (tính chất của góc đa diện lồi).

$\Rightarrow$ Tổng các góc tại d đỉnh bé hơn $2d\pi$.

ycbt cần Chứng minh rằng $d \leqslant 2m$. Thật vậy ta ký hiệu $d_3, d_4; ...; d_k$ là số các đỉnh của khối mà tại đó có 3; 4; ...; k mặt xuất phát, ta có : $6m = 3d_3 + 4d_4 + ... kd_k + ... \geqslant 3d \Rightarrow 2m \geqslant d$

Với cách tính đó tổng các góc của các mặt nhỏ hơn $4m\pi$. (hai cách tính dẫn đến hai kết quả khác nhau nên có mâu thuẫn)

Vậy không tồn tại khối đa diện thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 290

Chứng minh rằng nếu một khối đa diện lồi mà các mặt là những đa giác có số lẻ cạnh, thì số mặt của nó là chẵn.

Giải

Do mỗi mặt có $2k_i + 1$ cạnh, i là chỉ số mặt thứ i, nên :

$$2c = \Sigma(2k_i + 1) = 2(\Sigma k_i) + m \Leftrightarrow m = 2c - 2(\Sigma k_i) \text{ (ycbt)}$$

Bài 291

Trong một khối đa diện lồi. Chứng minh rằng tổng số các góc tam diện và các mặt tam giác không ít hơn 8.

Giải

Ta ký hiệu m_k và d_k là số mặt và đỉnh có k cạnh và k cạnh xuất phát, rõ ràng :

$$m = m_3 + m_4 + ... m_k + ...$$

$$d = d_3 + d_4 + ... d_k + ...$$

$$\Rightarrow 4m = 4m_3 + 4m_4 + ... 4m_k + ...$$

$$\Rightarrow 4d = 4d_3 + 4d_4 + ... 4d_k + ...$$

Mặt khác ta có : $4c = 2c + 2c = 3m_3 + 4m_4 + ... km_k + ... + 3d_3 + 4d_4 + ... kd_k + ...$

$$\Rightarrow 4(m + d - 2) = 3m_3 + 4m_4 + ... km_k + ... + 3d_3 + 4d_4 + ... kd_k + ...$$

$$\Rightarrow 4m_3 + 4m_4 + ... 4m_k + ... + 4d_3 + 4d_4 + ... 4d_k + ... - 8$$
$$= 3m_3 + 4m_4 + ... km_k + ... + 3d_3 + 4d_4 + ... kd_k + ...$$

$$\Rightarrow m_3 + d_3 > 8 \text{ (đpcm)}$$

Bài 292

Trong một khối đa diện lồi. Chứng minh rằng bao giờ cũng có một góc tam diện hoặc một góc tam giác.

Giải

Giả sử tại mỗi đỉnh xuất phát ít nhất bốn cạnh và mỗi mặt có ít nhất bốn cạnh.

$$\Rightarrow 2c > 4m \text{ và } 2c > 4d \Rightarrow 4c > 4(m + d) = 4(c - 2).$$

Bất đẳng thức này không thể xảy ra. Mâu thuẫn nhận được chứng minh bài toán.

Bài 293

Cho khối đa diện lồi d đỉnh. tính tổng của các góc của các mặt khối đa diện.

Giải

Ta ký hiệu k_i là số cạnh của mặt thứ i, vì các mặt của khối là các đa giác lồi nên tổng các góc của mặt thứ i là $(k_i - 2)\pi$.

Nếu m là số mặt của khối, thì tổng các góc của m mặt đó là :

$$\Sigma(k_i - 2)\pi = (\Sigma k_i)\pi - 2m\pi = (2c - 2m)\pi = 2(d - 2)\pi.$$

Trong đó c và d ký hiệu là số cạnh và số đỉnh của khối.

III. GIẢI TOÁN THI

Bài 294 (ĐẠI HỌC MIỀN BẮC – 1970)

Chứng minh rằng trong không gian, không tồn tại đa diện có một số lẻ các mặt mà đồng thời mỗi mặt là một đa giác có một số lẻ các cạnh.

Giải

Chúng ta sử dụng phép chứng minh phản chứng để chứng minh ycbt.

Giả sử đã tồn tại một khối đa diện có một số lẻ các mặt, đồng thời mỗi mặt lại là một đa giác có một số lẻ các cạnh.

Trong đa diện đó gọi :

$$\begin{cases} \text{số lẻ các mặt } k = 2n + 1 \ (n \in Z^+) \\ \text{số lẻ các cạnh của mỗi mặt đó là : } 2n_i + 1;\ i \in \overline{1; k} \\ \text{C là số cạnh của khối đa diện đó.} \end{cases}$$

Để ý thấy cứ hai mặt kề nhau có một cạnh chung nên :

$$(2n_1 + 1) + (2n_2 + 1) + ... + (2n_k + 1) = 2(n_1 + n_2 + ... + n_k) + k = 2C$$

$$\Leftrightarrow 2(n_1 + n_2 + ... n_k) + (2n + 1) = 2C \ (1) \text{ (vô lý)}$$

Với $n_1, n_2, ... n_k$ (vì vế trái là số lẻ còn vế phải là số chẵn).

Vậy không tồn tại khối khối đa diện có một số lẻ các mặt, đồng thời mỗi mặt là một đa giác có một số lẻ các cạnh. (đpcm)

Bài 295 (ĐẠI HỌC NGÂN HÀNG TP.HCM – 1991)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đỉnh S, cạnh đáy bằng a, đường cao SH; M là điểm bất kỳ thuộc AH. Mặt phẳng (P) qua M song song với AD và SH cắt AB, CD, SD, SA lần lượt tại I, J, K, L.

1/ Cho $SH = a\sqrt{2}$, xác định vị trí của M trên AH để thiết diện IJKL là một tứ giác ngoại tiếp.

2/ Xác định vị trí của M trên AH để thể tích của khối đa diện DIJKLH đạt giá trị lớn nhất.

Giải

1/ Ta có : (P) // AD = (ABCD) ∩ (SAD)

$$\Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (ABCD) = IJ \ /\!/ \ AD \\ (P) \cap (SCD) = LK \ /\!/ \ AD \end{cases}$$

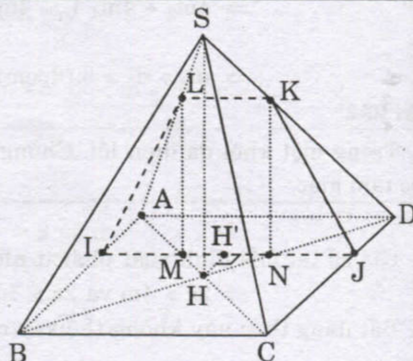
$\Rightarrow$ IJ // LK // AD (1)

- SH // (P) và (SAC) ⊃ SH

  $\Rightarrow$ (P) ∩ (SAC) = ML // SH.

- Tương tự : mp(SBD) ∩ (P) = NK // SH

  $\Rightarrow$ ML // NK // SH.



Tính chất hình vuông $\Rightarrow IM = NJ \Rightarrow IL = JK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ IJKL là hình thang cân.

Để hình thang cân IJKL là tứ giác ngoại tiếp, điều kiện cần và đủ là :

$$IJ + LK = IJ + IL = 2IL \quad (3)$$

Đặt : $AM = x \left(0 < x \leqslant \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$; với a là cạnh hình vuông ABCD.

• ΔIAM vuông cân $\Rightarrow IM = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$

$$ML \parallel SH \Rightarrow \frac{ML}{SH} = \frac{AM}{AH} \Leftrightarrow ML = \frac{2x}{a\sqrt{2}}.a\sqrt{2} = 2x$$

$$\Delta ILM \Rightarrow IL = \sqrt{IM^2 + ML^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 4x^2} = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$$

Định lý Thalès $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} LK \parallel AD \Rightarrow \dfrac{LK}{AD} = \dfrac{SL}{SA} \\ LM \parallel SH \Rightarrow \dfrac{HM}{HA} = \dfrac{SL}{SA} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{LK}{AD} = \dfrac{HM}{HA}$

$$\Rightarrow LK = \frac{a\sqrt{2} - 2x}{a\sqrt{2}}.a = a - x\sqrt{2}$$

Lúc đó (3) cho IJKL ngoại tiếp được $\Leftrightarrow a + a - x\sqrt{2} = 3x\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của AH (ycbt)

2/ Xét : $V_{(DIJKLH)} = V_{(HIJKL)} + V_{(DIJKL)}$ (4)

Do : $\begin{cases} LM \perp (ABCD) \\ IJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow DJ \perp (IJKL)$ và $(IJKL) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến IJ hạ $HH' \perp IJ$

$\Rightarrow HH' \perp (IJKL)$ và theo tính chất hình vuông thì :

$$DJ = AI = IM = \frac{x\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HH' = \frac{a}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Từ (4) $\Rightarrow V(x) = V_{(DIJKLH)} = \dfrac{1}{3}dt(IJKL).(HH' + DJ)$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{6}a.dt(IJKL) = \frac{a}{6}.\left(\frac{a + a - x\sqrt{2}}{2}\right)2x = \frac{ax}{6}(2a - x\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow V(x) = -\frac{a\sqrt{2}}{6}x^2 + \frac{a^2}{3}x \left(0 < x \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ta có: $V'(x) = -\dfrac{a\sqrt{2}}{3}x + \dfrac{a^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Bảng biến thiên :

x	0		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
V'(x)		+	0
V(x)	0	↗	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Vậy khi M trùng H thì thể tích đạt giá trị lớn nhất: $\max V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (ycbt)

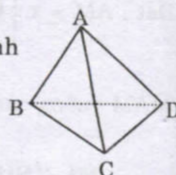
Chuyên đề 14 : TỨ DIỆN – CÁC LOẠI TỨ DIỆN ĐẶC BIỆT

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp là sử dụng các khái niệm (mở rộng) cho một tứ diện như sau :

❒ **Tứ diện là một vật thể có 4 đỉnh không nằm trong 1 mặt phẳng.**
Kí hiệu : Tứ diện ABCD

❒ Tứ diện ABCD còn gọi là hình chóp tam giác chẳng hạn A.BCD có đỉnh là A và đáy là ΔBCD.



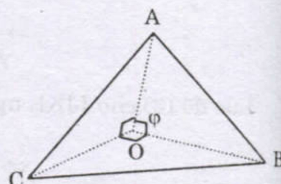
❒ Tứ diện ABCD có :

- Bốn đỉnh A; B; C; D, mỗi đỉnh là 1 góc tam diện.
- Sáu cạnh AB; AC; AD; BC; CD; DB.
- Bốn mặt là bốn tam giác ABC; ACD; ADB và BCD.
- Hai cạnh không cùng đi qua 1 đỉnh gọi là hai cạnh đối nhau : tứ diện ABCD có 3 cặp cạnh đối là : **AB và CD, AC và BD, BC và AD.**
- Từ A vẽ AH $\perp$ (BCD) và H $\in$ (BCD) thì AH gọi là đường cao của tứ diện phát xuất từ đỉnh A ký hiệu là $h_a \Rightarrow AH = h_a = d[A; (BCD)]$

$\Rightarrow$ Tứ diện có 4 đường cao phân biệt phát xuất từ 4 đỉnh là : h_a; h_b; h_c; h_d.

❒ **Tứ diện đều là tứ diện có 6 cạnh bằng nhau hay 4 mặt là 4 tam giác đều bằng nhau.**
$\Rightarrow$ Hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = SC = b và ΔABC đều cạnh a gọi là **hình chóp tam giác đều S.ABC.**

❒ **Tứ diện vuông** : **là tứ diện có 1 góc tam diện ba mặt vuông**. Các mặt vuông là các tam giác vuông có chung một đỉnh gọi là đỉnh của góc tam diện vuông. Mặt còn lại thường gọi là mặt huyền của tứ diện vuông (ba cạnh bên đôi một vuông góc với nhau).



❒ **Tứ diện gần đều : là tứ diện có 4 mặt là 4 tam giác bằng nhau**. Trong một tứ diện gần đều các cặp cạnh đối bằng nhau; và các góc tam diện bằng nhau.

❒ **Tứ diện trực tâm : là tứ diện mà các cặp cạnh đối vuông góc với nhau từng đôi một.** Trong một tứ diện trực tâm thì hình chiếu vuông góc của một đỉnh xuống mặt đối là trực tâm của mặt đó.

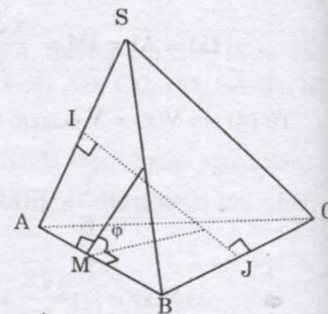
❒ **Diện tích của tứ diện là tổng diện tích của 4 mặt.**

∇ Nếu ta xét hình chóp S.ABC đỉnh S, đáy ΔBAC thì diện tích xung quanh :

$$S_{xq} = dt(\Delta SAB) + dt(\Delta SAC) + dt(\Delta SBC)$$

∇ Diện tích toàn phần (còn gọi là diện tích tứ diện)

$$S_{tp} = S_{xq} + dt(\Delta ABC)$$



❒ **Thể tích tứ diện** :

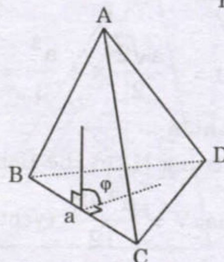
$$\boxed{V = \frac{1}{3}\mathcal{B}.h;} \quad \text{với } \begin{cases} \mathcal{B}: \text{diện tích đáy} \\ h: \text{độ dài chiều cao} \end{cases}$$

∇ Nếu gọi IJ là đoạn vuông góc chung của hai cạnh đối SA và BC là góc của hai cạnh đối SA và BC thì :

$$\boxed{V_{SABC} = \frac{1}{6}SA.BC.IJ.\sin\varphi}$$

∇ Nếu SABC là một tứ diện vuông tại đỉnh S thì :

$$\boxed{V_{SABC} = \frac{1}{6}SA.SB.SC}$$



V Nếu S_1 và S_2 là diện tích hai mặt của một hình tứ diện, a là độ dài cạnh chung của chúng là số đo góc nhị diện tại cạnh chung này thì thể tích hình tứ diện là :

$$V = \frac{2}{3a} S_1.S_2 \sin\varphi$$

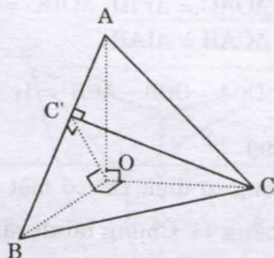
II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1 : TỨ DIỆN

Bài 296

Cho tứ diện OABC vuông tại O. Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích ΔABC; ΔOBC; ΔOCA và ΔOAB. Chứng minh : $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Giải



Xét : $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1}{4}OB^2.OC^2 + \frac{1}{4}OC^2.OA^2 + \frac{1}{4}OA^2.OB^2$

$= \frac{1}{4}OC^2.(OA^2 + OB^2) + \frac{1}{4}OA^2.OB^2$

$= \frac{1}{4}OC^2.AB^2 + \frac{1}{4}OC'^2.AB^2$

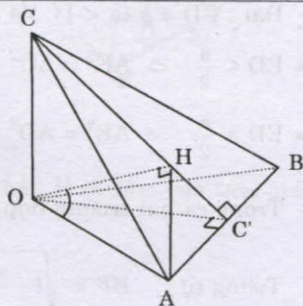
$\Leftrightarrow \quad S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1}{4}AB^2.(OC^2 + OC'^2)$

$= \frac{1}{4}AB^2.CC'^2 = \left(\frac{1}{2}AB.CC'\right) = S^2$ (đpcm).

Bài 297

Cho tứ diện OABC vuông ở O. Vẽ OH ⊥ (ABC). Gọi α; β; γ lần lượt là góc mà OH tạo với OA; OB; OC. Chứng minh : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Hướng dẫn



Ta chứng minh được : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (1)

ΔOAH vuông ở H $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{OH^2}{OA^2}$

Tương tự như vậy ta cũng có : $\cos^2\beta = \frac{OH^2}{OB^2}$; $\cos^2\gamma = \frac{OH^2}{OC^2}$

Do đó : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = OH^2\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = OH^2.\frac{1}{OH^2} \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (đpcm).

Bài 298

Cho tứ diện OABC vuông ở O. Đặt OA = a; OB = b; OC = c.

1/ Gọi A; B; C là ba góc trong tam giác ABC. Chứng minh : $a^2\tan A = b^2\tan B = c^2\tan C$.

2/ Nếu có a + b = c thì hãy chứng minh : $\widehat{OCA} + \widehat{OCB} + \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$.

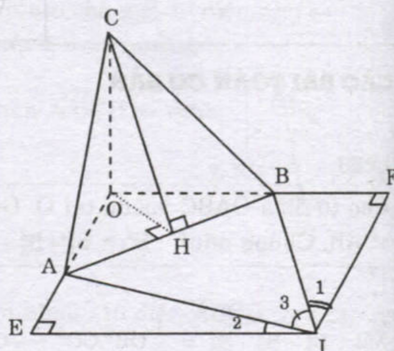
Giải

1/ Vẽ CH ⊥ AB. Định lý ba đường vuông góc cho : OH ⊥ AB

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2}AB.AH.\tan A = \frac{1}{2}OA^2\tan A = \frac{1}{2}a^2\tan A$

Tương tự như trên ta cũng có : $S_{ABC} = \frac{1}{2}b^2\tan B = \frac{1}{2}c^2\tan C$

Vậy : $a^2\tan A = b^2\tan B = c^2\tan C$ (đpcm).



2/ Trên tia OA lấy điểm E, trên tia OB lấy điểm F sao cho: $OE = OF = a + b$

Ta có : $\begin{cases} OA = BF = a \\ OB = AE = b \end{cases}$

Dựng hình vuông OEIF theo phương pháp trãi.

Cạnh hình vuông này dài là : $a + b = OC$.

$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta FBI, \Delta OBC = \Delta EAI.$

$\Rightarrow \Delta CAB = \Delta IAB$

$\Rightarrow \widehat{OCA} + \widehat{OCB} + \widehat{ACB} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{2}$ (ycbt).

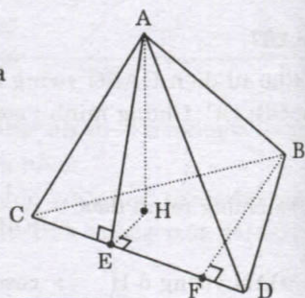
Bài 299

Trong tứ diện chỉ có một cạnh có độ dài lớn hơn 1 (còn các cạnh khác có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng 1). Chứng minh rằng thể tích tứ diện ấy không vượt quá $\frac{1}{8}$.

Giải

Xét tứ diện ABCD với giả thiết $AB > 1$, còn các cạnh còn lại của tứ diện nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Cần phải chứng minh $V \leqslant \frac{1}{8}$.



Thật vậy vẽ đường cao AE của ΔACD và đường cao BF của ΔBCD. Gọi AH là đường cao của tứ diện phát xuất từ A.

Đặt : $CD = a$ $(a < 1)$. Và xét 2 khả năng xảy ra :

- $ED \leqslant \frac{a}{2} \Rightarrow AE^2 = AC^2 - EC^2 \leqslant 1 - \frac{a^2}{4}$ (vì $EC \geqslant \frac{a}{2}$)
- $ED \geqslant \frac{a}{2} \Rightarrow AE^2 = AD^2 - ED^2 \leqslant 1 - \frac{a^2}{4}$ (vì $ED \geqslant \frac{a}{2}$)

Trong cả hai trường hợp ta đều có : $AE^2 \leqslant 1 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow AE \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$

Tương tự : $BF < \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$

Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.AH = \frac{1}{6}CD.BF.AH \leqslant \frac{1}{6}CD.BF.AE$

$$V \leqslant \frac{a}{6}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{24}a(4 - a^2)$$

Xét hàm số đặc trưng : $f(a) = a(4 - a^2)$ với $0 < a \leqslant 1$

$$\Rightarrow f'(a) = -3a^2 + 4 \geqslant 0 \Rightarrow f(a) \leqslant f(1) = 3 \Rightarrow V \leqslant \frac{1}{24}.3 = \frac{1}{8}$$

Chọn một tứ diện ABCD như sau : $\begin{cases} \Delta BCD \text{ đều cạnh } a = 1 \\ \Delta ACD \text{ đều cạnh } a = 1 \\ (BCD) \perp (ACD) \end{cases}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}$$

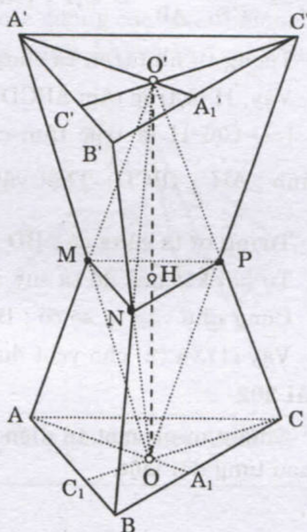
$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = 2AH^2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow AB > 1$$

Vậy thể tích của tứ diện ABCD không thể vượt quá $\frac{1}{8}$ (ycbt).

Bài 300

Hai hình chóp tam giác đều có chung chiều cao; đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia, mỗi cạnh bên của hình chóp này cắt một cạnh của hình chóp kia. Cạnh bên bằng 1 của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao góc α. Cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao góc β. Tìm thể tích phần chung của hai hình chóp.

Giải



Xét OABC và O'A'B'C' là hai hình chóp tam giác đều, có chung đường cao OO', trong đó O và O' lần lượt là tâm của các tam giác đều A'B'C' và ABC.

Lúc đó : $\begin{cases} (ABC) \mathbin{/\!/} (A'B'C') \\ OA = OB = OC = 1 \\ \widehat{AO'O} = \alpha;\ \widehat{A'OO'} = \beta \end{cases}$

Vì $OA' \cap O'A = M \Rightarrow OA \mathbin{/\!/} O'A'$.

Tương tự $\Rightarrow OB \mathbin{/\!/} O'B'$ và $OC \mathbin{/\!/} O'C'$. Do đó các cạnh của hai tam giác ABC và A'B'C' song song với nhau từng đôi một.

Gọi $N = OB' \cap O'B$, $P = OC' \cap O'C$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{MA}{MO} = \frac{O'A}{OA'} \\ \frac{NB}{NO} = \frac{O'B}{OB'} \\ O'A = O'B \text{ và } OA' = OB' \end{cases} \Rightarrow \frac{MA}{MO} = \frac{NB}{NO} \Rightarrow MN \mathbin{/\!/} AB$$

Tương tự $\Rightarrow NP \mathbin{/\!/} BC$ và $PM \mathbin{/\!/} CA$.

$\Rightarrow \Delta MNP$ cũng là tam giác đều. Gọi $H = OO' \cap (MNP)$. Nhận thấy H là tâm của tam giác đều MNP.

Để ý $\Delta AOO'$ vuông ở O $\Rightarrow OO' = h = l\cos\alpha$

Đặt $x = HM$. Hai ΔMHO và $\Delta MHO'$ vuông ở H :

$$\Rightarrow \begin{cases} HO = x.\cot\alpha \\ HO' = x.\cot\beta \end{cases} \Rightarrow OO' = x.(\cot\alpha + \cot\beta)$$

Từ đó : $l\cos\alpha = x(\cot\alpha + \cot\beta) \Rightarrow x = \frac{l\cos\alpha}{\cot\alpha + \cot\beta} = \frac{l\sin 2\alpha.\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$

Do ΔMNP đều có cạnh $MN = x\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{MN^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.\frac{l^2.\sin^2 2\alpha.\sin^2\beta}{4\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{3\sqrt{3}l^2\sin^2 2\alpha.\sin^2\beta}{16\sin^2(\alpha+\beta)}$$

Phần chung của hai hình chóp O.ABC và O'.A'B'C' gồm hai hình chóp đỉnh O và O', đáy chung là ΔMNP. Nên thể tích của nó là :

$$V = \frac{1}{3}\,dtMNP.(HO + HO') = \frac{1}{3}\,dtMNP.OO'$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}.l^2.\sin^2 2\alpha.\sin^2\beta}{16\sin^2(\alpha+\beta)}.l.\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}.l^3.\sin^2 2\alpha.\cos\alpha.\sin^2\beta}{16.\sin^2(\alpha+\beta)} \text{ (ycbt).}$$

Dạng 2 : TỨ DIỆN TRỰC TÂM

Bài 301

Chứng minh một tứ diện trực tâm khi và chỉ khi hình chiếu của mỗi đỉnh lên mặt đối là trực tâm của mặt đó.

Giải

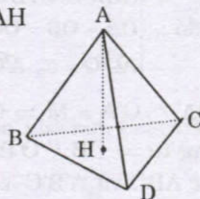
❒ (⇒) Giả sử tứ diện ABCD là tứ diện trực tâm. Dựng AH vuông góc với mặt BCD.

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH$$

Tương tự như trên ta cũng sẽ có : $BD \perp CH$ và $BC \perp DH$

Vậy, H là trực tâm ΔBCD (ycbt) (1)

❒ (⇐) Gọi H là trực tâm của tam giác BCD trong tứ diện trực tâm ABCD. Ta cần chứng minh : $AH \perp (BCD)$. Thật vậy : $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AH$



Tương tự ta cũng có : $BD \perp AH$

Từ hai kết quả đó ta suy ra : $AH \perp (BCD)$

Cũng như vậy ta sẽ có : $BK \perp (ACD)$, ... ⇒ ycbt (2)

Vậy (1) và (2) cho ycbt được chứng minh.

Bài 302

Chứng minh một tứ diện trực tâm khi và chỉ khi tổng bình phương các cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi một.

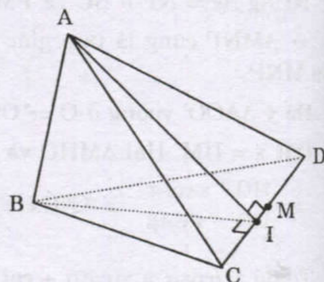
Giải

❒ (⇒) Cho tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc nhau. Vẽ đường cao BI của ΔBCD.

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp BI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABI) \Rightarrow CD \perp AI$$

Gọi M là trung điểm của CD.

$$\Rightarrow \begin{cases} AC^2 - AD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MI} \\ BC^2 - BD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MI} \end{cases}$$



$$\Rightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$$

$$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \quad (1)$$

Nếu ta sử dụng thêm điều kiện $BC \perp AD$, ta có :

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 \quad (2)$$

(1) và (2) : $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2$ (3)

❒ (⇐) Cho tứ diện ABCD có các cạnh thoả (3). Ta cần chứng minh tứ diện ABCD là một tứ diện trực tâm.

Thậy vậy vẽ đường cao BI của ΔACD; M là trung điểm của CD.

$$\Rightarrow \begin{cases} BC^2 - BD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MI} & (4) \\ AC^2 - AD^2 = 2\overline{CD}.\overline{MJ} & (5) \end{cases}$$

Từ (3) $\Rightarrow$ $BC^2 - BD^2 = AC^2 - AD^2$

Do đó (4) và (5) cho : $I \equiv J$

Vậy : $CD \perp (ABI)$ $\Rightarrow$ $CD \perp AB$

Tương tự như vậy nếu ta sử dụng thêm cho hết giả thiết (3) ta sẽ được :

$\begin{cases} BC \perp AD \\ AC \perp BD \end{cases}$ (ycbt).

Vậy ycbt đã được chứng minh xong (đpcm).

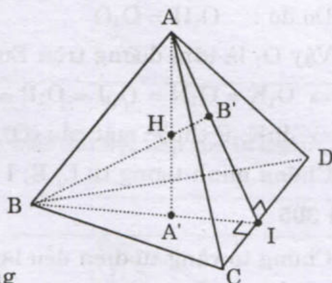
Bài 303

Chứng minh một tứ diện là tứ diện trực tâm nếu và chỉ nếu các đường cao của nó đồng quy. (Giao điểm gọi là trực tâm của tứ diện).

Giải

□ ($\Rightarrow$) Cho tứ diện trực tâm ABCD. Gọi AA'; BB'; CC' và DD' là các đường cao của tứ diện. Ta cần chứng minh chúng cắt nhau từng đôi một, chẳng hạn ta chứng minh AA' và BB' cắt nhau.

Ta có : $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AA' \end{cases}$



$\Rightarrow CD \perp (ABA') \equiv (ABI)$ (trong đó $I = B'A \cap CD$)

$\Rightarrow (ABI) \perp (ACD)$

Nhưng $BB' \perp (ACD)$ có $B \in (ABI) \Rightarrow B' \in AI$.

Do đó AA' và BB' là hai đường cao tam giác ABI.

$\Rightarrow H = AA' \cap BB'$

Suy ra, các đường cao của tứ diện đôi một cắt nhau nên đồng quy. Giao điểm H gọi là trực tâm của tứ diện.

□ ($\Leftarrow$) Cho tứ diện ABCD có 4 đường cao AA'; BB'; CC' và DD' đồng qui tại một điểm H. Ta cần chứng minh tứ diện ấy là tứ diện trực tâm.

Thật vậy xét hai đường cao AA' và BB'. Ta có :

$$\begin{cases} AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp CD \\ BB' \perp (ACD) \Rightarrow BB' \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$$

Sử dụng một cặp đường cao khác với trên nữa ta sẽ được một cặp cạnh đối khác của tứ diện vuông góc nhau $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 304

Chứng minh rằng trong tứ diện trực tâm trung điểm của các cạnh và chân các đoạn vuông góc chung của các cặp cạnh đối nằm trên cùng một mặt cầu.

Giải

Gọi M; N;P; Q; R; S lần lượt là trung điểm của AB; BC; CD; AD; AC và BD. Ta chứng minh dễ dàng ba đoạn MP; NQ và RS cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Giao điểm O đó gọi là trọng tâm của tứ diện ABCD.

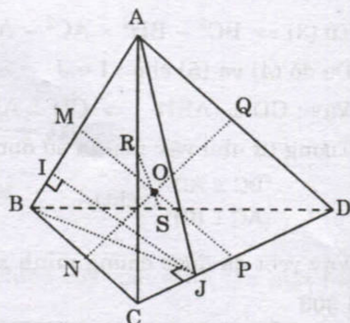
Hơn nữa do : $AC \perp BD \Rightarrow MN \perp MQ$ và tương tự $\Rightarrow$ MNPQ; MRPS;... là những hình chữ nhật :

$\Rightarrow MP = NQ = RS$

$\Rightarrow MO = ON = OP = OQ = OR = OS$

Vậy 6 điểm M; N; P; Q; R; S cùng ở trên mặt cầu tâm O (đpcm).

Gọi : $\begin{cases} \text{IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD} \\ \text{KL là đoạn vuông góc chung của BC và AD} \\ \text{EF là đoạn vuông góc chung của AC và BD} \end{cases}$



Ta cần phải chứng minh 6 điểm I; J; K; L; E; F cũng thuộc mặt cầu nói trên

Thật vậy : $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp IJ \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABJ) \Rightarrow CD \perp BJ$

Tương tự $\Rightarrow CF \perp BD$ và $DK \perp BC$

Gọi G; H; Ω lần lượt là trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Gọi O_1 là hình chiếu của O lên (BCD)

Biết rằng : $AH \perp (BCD)$ và $O \in AG \Rightarrow O_1 \in GH$.

Lúc đó : $\frac{GO_1}{O_1H} = \frac{GO}{OA} = \frac{1}{3}$ (do tính chất trọng tâm tứ diện)$\Rightarrow \frac{G\Omega}{GH} = \frac{GP}{GB} = \frac{1}{2}$

Do đó : $O_1H = O_1\Omega$

Vậy O_1 là tâm đường tròn Euler của ΔBCD và đường tròn này đi qua K; N; J; P; S; F

$\Rightarrow O_1K = O_1N = O_1J = O_1P = O_1S = O_1F \quad \Rightarrow ON = OK = OJ = OP = OS = OF$

$\Rightarrow$ J; K; F thuộc mặt cầu (O).

Chứng minh tương tự L; E; I cũng thuộc mặt cầu đó $\Rightarrow$ (đpcm).

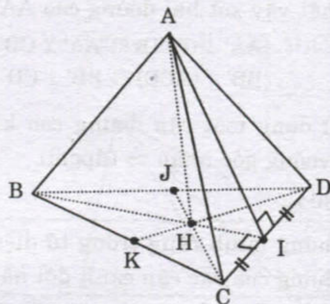
Bài 305

1/ Chứng tỏ rằng tứ diện đều là một tứ diện trực tâm.
2/ Tính chiều cao của tứ diện đều cạnh a.

Giải

1/ Gọi I là trung điểm của CD. Ta có : $\begin{cases} CD \perp AI \\ CD \perp BI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABI) \Rightarrow CD \perp AB$

Tương tự : $BC \perp AD$ và $AC \perp BD \Rightarrow$ (đpcm).



2/ Vẽ AH vuông góc với (BCD).Do ABCD là tứ diện đều nên H là tâm của tam giác đều BCD. Ta có :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

Vậy : $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (ycbt).

Dạng 3 : TỨ DIỆN GẦN ĐỀU

Bài 306

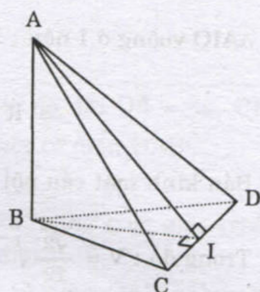
Cho tứ diện ABCD có AB = CD = 2x và bốn cạnh còn lại có độ dài bằng 1.
1/ Tính diện tích toàn phần của tứ diện.
2/ Xác định x để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

Giải

1/ Nhận thấy bốn mặt của tứ diện là bốn tam giác bằng nhau

$\Rightarrow S_{TP} = 4S_{ACD} = 2.AI.ID$; với I là trung điểm của D.

$\Rightarrow$ ID = x $\Rightarrow \begin{cases} AI^2 = AD^2 - ID^2 = 1 - x^2 \\ AI = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{(do } 0 < x < 1) \end{cases}$



Vậy : $S_{TP} = 2x.\sqrt{1 - x^2}$ (ycbt).

2/ Vì $S_{TP} > 0$ nên S_{TP} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $S^2{}_{TP}$ đạt giá trị lớn nhất, mà $S^2{}_{TP} = 4x^2(1 - x^2)$

Nhưng $0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases}$

Bất đẳng thức Cauchy $\Rightarrow x^2(1 - x^2) \leqslant \left(\dfrac{x^2 + 1 - x^2}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow S^2{}_{TP} \leqslant 1$ (1)

Đẳng thức xảy trong (1) $\Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (vì x > 0)

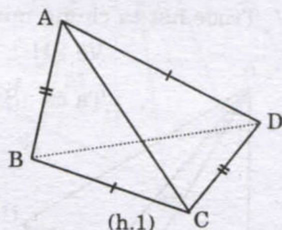
Vậy : $\max\limits_{0<x<1} S_{tp} = S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ (ycbt).

Bài 307

Cho tứ diện gần đều ABCD với AB = CD = a; AC = BD = b; AD = BC = c.
1/ Chứng minh tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện cũng chính là tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện.
2/ Tính bán kính của hai mặt cầu ấy theo a, b, c.

Giải

1/ Để ý các tam giác tạo nên bốn mặt của tứ diện gần đều thì bằng nhau.



(h.1)

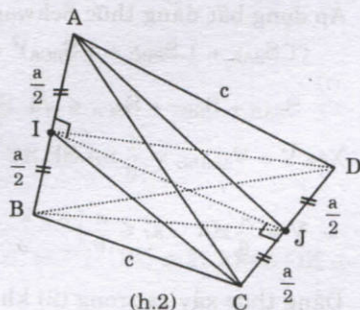
$\Rightarrow$ Các đường tròn ngoại tiếp chúng có cùng bán kính.

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ tâm O của hình cầu ngoại tiếp tứ diện đến 4 mặt này bằng nhau hay cách khác O cũng chính là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện (đpcm).

2/ Ký hiệu R; r lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại và nội tiếp tứ diện.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. thì IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD. Gọi O là trung điểm của IJ. O chính là tâm các mặt cầu đã nói ở trên.

Thật vậy, IJ là trung trực của AB và CD $\Rightarrow \begin{cases} OA = OB \\ OC = OD \end{cases}$



(h.2)

Mà các đoạn nối trung điểm của các cạnh đối trong tứ diện đồng qui tại O nên, chẳng hạn xét cặp AC và BD.

$\Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$

Vậy : OA = OB = OC = OD

Định lý đường trung tuyến trong ΔABC.

$$CI^2 = \frac{2CA^2 + 2CB^2 - AB^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

ΔIJC vuông ở I nên : $IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$

ΔAIO vuông ở I nên : $R^2 = OA^2 = AI^2 + OI^2 = \dfrac{AB^2}{4} + \dfrac{IJ^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{8} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$

Bán kính mặt cầu nội tiếp tính bởi : $r = \dfrac{3V}{S_{TP}}$

Trong đó : $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}.\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$

$$S_{TP} = 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Vậy: $r = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\dfrac{\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ (ycbt).

Dạng 4 : TỨ DIỆN VUÔNG

Bài 308

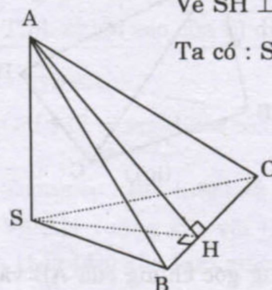
Cho tứ diện SABC có các góc phẳng ở đỉnh S vuông.

1/ Chứng minh : $\sqrt{3}.S_{ABC} > S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA}$

2/ Biết SA = a, SB + SC = k. Đặt SB = x. Tính thể tích tứ diện SABC theo a, k, x. Xác định SB, SC để thể tích ấy đạt giá trị lớn nhất.

Giải

1/ Trước hết ta chứng minh hệ thức Pythagore: $S^2_{ABC} = S^2_{SAB} + S^2_{SBC} + S^2_{SCA}$ (1)



Vẽ $SH \perp BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có : $S^2_{SAB} + S^2_{SBC} + S^2_{SCA} = \dfrac{1}{4}SA^2.SB^2 + \dfrac{1}{4}SB^2.SC^2 + \dfrac{1}{4}SC^2.SA^2$

$$= \frac{1}{4}SA^2(SB^2 + SC^2) + \frac{1}{4}SB^2.SC^2$$

$$= \frac{1}{4}SA^2.BC^2 + \frac{1}{4}SH^2.BC^2 = \frac{1}{4}BC^2.(SA^2 + SH^2)$$

$$= \frac{1}{4}BC^2.AH^2 = S^2_{ABC}$$

$\Rightarrow$ **(1) đã được chứng minh xong.**

Áp dụng bất đẳng thức Schwart :

$$(1.S_{SAB} + 1.S_{SBC} + 1.S_{SCA})^2 \leqslant (1^2 + 1^2 + 1^2)(S^2_{SAB} + S^2_{SBC} + S^2_{SCA})$$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} \leqslant \sqrt{3}.S_{ABC}$ (đpcm).

2/ Xét $V = V_{\Delta SABC} = \dfrac{1}{6}SA.SB.SC$ Trong đó : SA = a; SB = x; SC = k − x

$$\Rightarrow V = \frac{a}{6}x(k-x) \leqslant \frac{a}{6}\left(\frac{x+k-x}{2}\right)^2 = \frac{ak^2}{24} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra trong (2) khi và chỉ khi : $x = k - x \Leftrightarrow x = \dfrac{k}{2}$

Vậy $\max\limits_{0<x\leqslant k} V = V\left(\dfrac{k}{2}\right) = \dfrac{ak^2}{24}$ (ycbt).

❑ **Ghi chú** : *Đây là đề thi vào ĐHQG.TpHCM – 1996.*

III. GIẢI TOÁN THI

Bài 309 (ĐẠI HỌC KHỐI A – 1971 – MIỀN BẮC)

Trên các cạnh của một tam diện ba góc vuông đỉnh O, ta lấy các độ dài OA = 4a, OB = $3a\sqrt{2}$, OC = $3a\sqrt{2}$, trong đó a là độ dài cho sẵn. Như vậy ta được một tứ diện OABC.

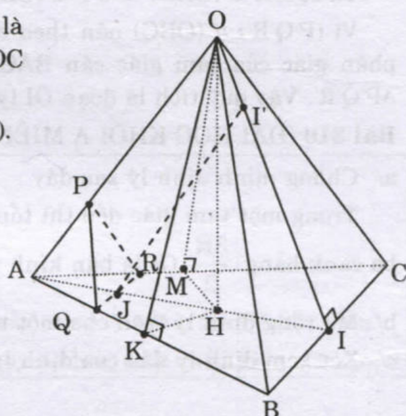
a/ Tính khoảng cách từ đỉnh O tới mặt phẳng ABC.

b/ Chứng minh rằng bất cứ hai cạnh đối diện nào của tứ diện OABC cũng trực giao (vuông góc với nhau). Xác định đường trực giao chung của mỗi cặp cạnh đối diện.

c/ Một mặt phẳng biến thiên song song với mặt phẳng (OBC) cắt tứ diện OABC theo một tam giác PQR. Xác định vị trí tâm vòng tròn ngoại tiếp với tam giác đó. Tìm quỹ tích hình chiếu tâm đó lên trên mặt phẳng (OBC).

Giải

a/ Ta có : $\begin{cases} BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{2(3a\sqrt{2})^2} = 6a \\ AB = AC = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{34} \end{cases}$



Gọi I là trung điểm của BC; thì OI và AI theo thứ tự là đường cao và là đường phân giác của các tam giác cân BOC và ABC.

Gọi H là chân đường cao hạ từ O xuống mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow$ OH = d[O; (ABC)]

Thứ tự kẻ đường cao OK và OM của ΔAOB và ΔAOC xuống AB và AC, ta có :

$\Delta AOB = \Delta AOC \Rightarrow OK = OM$

Định lý ba đường vuông góc cho :

$\begin{cases} HK \perp AB \\ HM \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta OKH = \Delta OMH \\ H \in AI \end{cases}$

Trong tam giác vuông cân BOC, ta có : $BI = IC = IO = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{6a}{2} = 3a$

Xét tam giác vuông ABI, ta có :

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{(a\sqrt{34})^2 - (3a)^2} = \sqrt{25a^2} = 5a$$

Có thể viết : $AI = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = \sqrt{OA^2 + OI^2}$,

$\Rightarrow$ ΔAOI vuông tại O và ta có : $\sin\widehat{OIA} = \dfrac{OA}{AI} = \dfrac{4a}{5a} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow OH = OI.\sin\widehat{OIA} = 3a.\dfrac{4}{5} = \dfrac{12a}{5}$ (ycbt).

b/ Ta có : $OC \perp OA$, $OC \perp OB \Rightarrow OC \perp (AOB) \Rightarrow OC \perp AB$, $OC \perp OK$; mặt khác $OK \perp AB$ $\Rightarrow$ OK là đường vuông góc chung của OC và AB.

Tương tự : $OB \perp OA$; $OB \perp OC \Rightarrow OB \perp (AOC) \Rightarrow OB \perp AC$, $OB \perp OM$; mặt khác $OM \perp AC$ $\Rightarrow$ OM là đường vuông góc chung của OB và AC.

Tương tự : $OA \perp (BOC) \Rightarrow$ OI là đường vuông góc chung của OA và BC.

Ta đã có : OI = 3a và xét tam giác vuông AOB.

$\Rightarrow \sin\widehat{BAO} = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{a\sqrt{34}} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$.

$OM = OK = OA \sin\widehat{BAO} = 4a\dfrac{3}{\sqrt{17}} = \dfrac{12a}{\sqrt{17}}$ (ycbt).

c/ Hai mặt phẳng (PQR) // (OBC), nên : PQ //OB, PR // OC (và QR // BC) mà OB ⊥ OC, do đó PQ ⊥ PR. Gọi J là trung điểm của QR ⇒ J ∈ AI (do AI là phân giác của tam giác cân BAC).

⇒ JQ = JR = JP

⇒ J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPQR. Do đó mặt phẳng (PQR) biến thiên // (OBC) thì tâm của các tam giác PQR chạy trên AI. (ycbt)

Vì AO ⊥ (OBC) ⇒ OI là hình chiếu của AI trên (OBC).

⇒ Quỹ tích hình chiếu của tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPQR lên trên (OBC) là OI.

Đảo lại, lấy tùy ý I' ∈ OI. Trong (AOI) kẻ qua I' đường thẳng song song với OA cắt AI tại J'. Gọi (P'Q'R') là mặt phẳng đi qua J' song song với (OBC).

Ta có OA ⊥ (OBC) ⇒ J'I' ⊥ (OBC), (do I' là hình chiếu của J').

Vì (P'Q'R') // (OBC) nên theo chứng minh trên ta có ΔP'Q'R' vuông tại P' và AI là đường phân giác của tam giác cân BAC ⇒ J'Q' = J'R' = J'P' ⇔ J' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔP'Q'R'. Vậy quỹ tích là đoạn OI (ycbt).

Bài 310 (ĐẠI HỌC KHỐI A MIỀN BẮC – 1973)

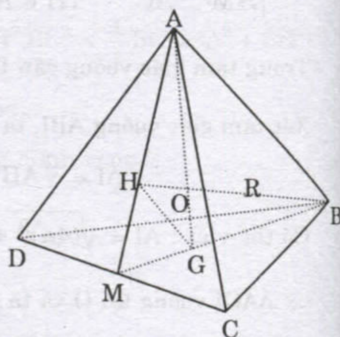
a/ Chứng minh định lý sau đây :

Trong một tam giác đều thì tổng các khoảng cách x, y, z từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến ba cạnh bằng $\dfrac{3R}{2}$ (R là bán kính vòng tròn ngoại tiếp).

b/ Mở rộng định lý trên cho một tứ diện đều trong không gian.

c/ Xét xem định lý đảo của định lý nói ở phần a) có đúng không ?

Giải



a/ Trong tam giác đều ABC, tâm của đường tròn ngoại tiếp đồng thời cũng là trọng tâm.

$\Rightarrow x = y = z = \dfrac{R}{2}$

Để ý thấy : $x + y + z = \dfrac{3R}{2}$ (đpcm).

b/ Để ý khi tứ diện ABCD đều nên tâm O của mặt cầu ngoại tiếp cũng là trọng tâm tứ diện.

Vì vậy nếu ta kéo dài AO và BO theo thứ tự cắt các mặt đáy BDC và ADC tại G và H thì G và H là trọng tâm của hai tam giác đó.

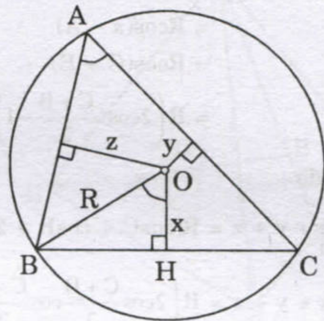
$\Rightarrow \dfrac{MG}{MB} = \dfrac{MH}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HG$ // AB và $HG = \dfrac{1}{3}AB$

Thành thử : $\dfrac{OG}{OA} = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} OG = \dfrac{1}{3}OA = \dfrac{R}{3} \\ OH = \dfrac{1}{3}OB = \dfrac{R}{3} \end{cases}$

Vậy tâm mặt cầu cách các mặt một khoảng cách bằng $\dfrac{R}{3}$; tổng các khoảng cách đó bằng: $\dfrac{4R}{3}$.

c/ Để xét định lý đảo có tồn tại hay không ? Ta giả sử ta có một tam giác thỏa:

$x + y + z = \dfrac{3R}{2}$



Ta xét ba khả năng xảy ra sau đây :

❒ **TH_1 :** Tam giác ABC nhọn

Ta có : $x = R\cos\widehat{BOH} = R\cos A$

Tương tự ta có : $y = R\cos B$; $z = R\cos C$

$\Rightarrow x + y + z = R(\cos A + \cos B + \cos C)$

Theo giả thiết : $x + y + z = \dfrac{3R}{2}$ nên

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Xét hàm đặc trưng $f(x) = \cos x; \forall x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin x; f''(x) = -\cos x < 0$$

BĐT Jensen cho: $3f\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right) \geq f(A) + f(B) + f(C)$

$$\Rightarrow 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq \cos A + \cos B + \cos C$$

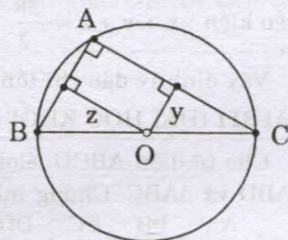
$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Đã có (1) nghĩa là $\exists$ABC sao cho dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy : tồn tại một tam giác duy nhất trong các ΔABC tùy ý thỏa mãn điều kiện đã cho, đó là tam giác đều.

❒ **TH_2 :** Tam giác ABC vuông tại A.

Để ý tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC là trung điểm của cạnh huyền BC :



$\Rightarrow x = 0; y = \dfrac{c}{2}; z = \dfrac{b}{2}$

$\Rightarrow x + y + z = \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{3R}{2}$ (theo giả thiết)

$\Leftrightarrow b + c = 3R$ hay $b^2 + c^2 + 2bc = 9R^2$ (1)

Mặt khác định lý Pythagore cho : $b^2 + c^2 = 4R^2$ (2)

Trừ (1) và (2) ta có : $2bc = 5R^2$ (3)

Trừ (2) cho (3) ta có : $-R^2 = b^2 + c^2 - 2bc = (b - c)^2$ (vô lý)

$\Rightarrow$ không tồn tại tam giác vuông nào thỏa $x + y + z = \dfrac{3R}{2}$

❒ **TH_3 :** Tam giác ABC có góc A tù.

Nhưng các góc C và B đều nhọn

$\Rightarrow z = R\cos C; y = R\cos B$

Với A tù $\Rightarrow x = R\cos\widehat{BOH}$

$$= R\cos(\pi - A)$$

$$= R\cos(C + B)$$

$$= R\left(2\cos^2\frac{C+B}{2} - 1\right)$$

Lúc đó :

$$x + y + z = R(\cos C + \cos B + 2\cos^2\frac{C+B}{2} - 1)$$

$$\Rightarrow x + y + z = R\left(2\cos\frac{C+B}{2}\cos\frac{C-B}{2} + 2\cos^2\frac{B+C}{2}\right) - R$$

$$\Rightarrow x + y + z = 2R\cos\frac{C+B}{2}\left(\cos\frac{C-B}{2} + \cos\frac{C+B}{2}\right) - R \quad (4)$$

Từ giả thiết : $x + y + z = \frac{3R}{2}$ (5)

$(4) \equiv (5) \Rightarrow \cos\frac{C+B}{2}\left(\cos\frac{C-B}{2} + \cos\frac{C+B}{2}\right) = \frac{5}{4}$ (6)

Nếu cho C = B thì (1) : $\cos^2 C + \cos C - \frac{5}{4} = 0$ (7)

$$\Leftrightarrow u = \cos C = \frac{\sqrt{6}-1}{2}$$

Dễ dàng so sánh được : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{6}-1}{2} < 1 = \cos 0$

$\Rightarrow$ Tam giác cân có các góc ở đáy bằng $\arccos\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ là một tam giác có góc tù thỏa mãn điều kiện : $x + y + z = \frac{3R}{2}$

Vậy định lý đảo chỉ tồn tại khi tam giác không vuông (ycbt).

Bài 311 (ĐẠI HỌC KHỐI B MIỀN BẮC– 1973)

Cho tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ΔBCD, ΔACD, ΔABD và ΔABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC', DD' cùng đi qua một điểm G và $\frac{AA'}{GA'} = \frac{BB'}{GB'} = \frac{CC'}{GC'} = \frac{DD'}{GD'} = 4$.

Giải

Gọi M là trung điểm của CD thì AM và BM theo thứ tự là trung tuyến của các tam giác : ΔACD và ΔBCD.

$\Rightarrow$ A' nằm trên BM và B' nằm trên AM.

$\Rightarrow$ AA' và BB' cùng nằm trong một mặt phẳng đi qua AM và BM và chúng cắt nhau tại G.

Vì A', B' theo thứ tự là trọng tâm của ΔBCD và ΔACD.

$$\Rightarrow \frac{BM}{A'M} = \frac{AM}{B'M} = 3 \Rightarrow \begin{cases} B'A' // AB \\ \frac{AB}{B'A'} = 3 \end{cases}$$

$\Delta GAB \backsim \Delta GA'B' \Rightarrow \dfrac{AG}{GA'} = \dfrac{BG}{GB'} = \dfrac{AB}{A'B'} = 3$

$\Rightarrow AG = 3GA'$ và $BG = 3GB'$

$$\begin{cases} AA' = AG + GA' = 3GA' + GA' = 4GA' \\ BB' = BG + GB' = 3GB' + GB' = 4GB' \end{cases} \Rightarrow \frac{AA'}{GA'} = \frac{BB'}{GB'} = 4$$

Tương tự xét AA' và CC'.

Lặp lại phép chứng minh trên, ta thấy rằng :

$$\begin{cases} AA' \cap CC' = G_1 \\ \dfrac{AA'}{G_1A'} = \dfrac{CC'}{G_1C'} = 4 \end{cases}$$

Để ý $\dfrac{AA'}{G_1A'} = \dfrac{AA'}{GA'} = 4$ và G, G_1 nằm giữa khoảng hai điểm A, A' nên $G_1 \equiv G$. Lặp lại phép chứng minh tương tự cho AA' và DD', cuối cùng ta đi đến kết quả :

Các đường thẳng AA', BB', CC', DD' cùng đi qua một điểm G và :

$$\frac{AA'}{GA'} = \frac{BB'}{GB'} = \frac{CC'}{GC'} = \frac{DD'}{GD'} = 4 \text{ (đpcm).}$$

Bài 312 (ĐẠI HỌC KHỐI B – 1976)

Cho tứ diện ABCD, trong đó AD vuông góc với mặt phẳng ABC, AD = 4a, AB = 3a, AC = 4a, BC = 5a, a là một số dương cho trước.

a/ Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông. Tính diện tích toàn phần và thể tích của tứ diện đó.

b/ Gọi h là chiều cao của tứ diện xuất phát từ A.

Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

c/ Gọi M là một điểm trên cạnh AB và MA = x. Người ta cắt tứ diện bởi một mặt phẳng (α) đi qua M, song song với AD và BC. Tính diện tích của tiết diện tạo thành theo a và x. Xác định x để diện tích đó lớn nhất. Chứng minh rằng khi diện tích đó lớn nhất thì thể tích của hai phần của tứ diện bị chia bởi tiết diện này là bằng nhau.

Giải

a/ Ta có : $BC^2 = 25a^2 = 16a^2 + 9a^2 = AC^2 + AB^2$

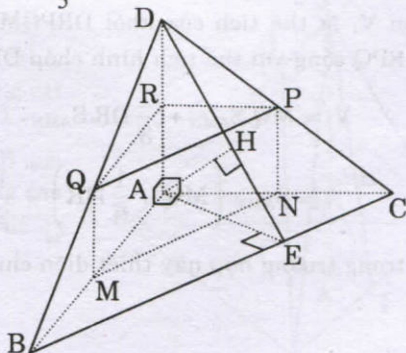
$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác vuông tại A (đpcm).

Gọi AE là đường cao của ΔABC. Theo định lý ba đường vuông góc

$\Rightarrow$ DE là đường cao của tam giác DBC.

ΔABC vuông $\Rightarrow AE.BC = AB.AC \Rightarrow AE = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{12a}{5}$

ΔDAE vuông $\Rightarrow DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \dfrac{4a}{5}\sqrt{34}$



$$\begin{cases} S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{2}\dfrac{4a}{5}\sqrt{34}.5a = 2a^2\sqrt{34} \\ S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = 6a^2 \\ S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}AB.AD = 6a^2 \\ S_{\Delta ACD} = \dfrac{1}{2}AC.AD = 8a^2 \end{cases}$$

Vậy diện tích toàn phần của tứ diện là :

$$S_{tp} = 2a^2(10 + \sqrt{34}) \text{ (ycbt)}$$

Còn thể tích của tứ diện là: $V = \frac{1}{3} S_{ABC}.AD = \frac{1}{3}.6a^2.4a = 8a^3$ (ycbt).

b/ Kẻ AH ⊥ DE. Với chú ý : BC ⊥ AE và BC ⊥ AD

⇒ BC ⊥ AH ⇒ AH vuông góc với mặt phẳng DBC.

⇒ AH chính là đường cao hạ từ A của tứ diện ABCD.

ΔDAE vuông ⇒ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AD^2}$

Trong tam giác vuông BAC, ta có :

ΔBAC vuông ⇒ $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Cộng theo vế ⇒ $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$ (đpcm).

c/ Gọi MN, PQ là những giao tuyến của mặt phẳng (α) cắt với mặt phẳng (ABC), (DBC).

Theo tính chất của mặt phẳng (α) ⇒ MN // PQ // BC.

Tương tự ta có : MQ // NP // AD.

Do : AD ⊥ (ABC) nên MQ ⊥ MN ⇔ MNPQ là hình chữ nhật.

Mà: $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \frac{BC.AM}{AB} = \frac{5a\,.\,x}{3a} = \frac{5x}{3}$

$\frac{QM}{AD} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow QM = \frac{AD.BM}{AB} = \frac{4a(3a-x)}{3a} = \frac{4}{3}(3a - x)$

Vậy : $S_{MNPQ} = MN.QM = \frac{20}{9}.x(3a - x) \quad (0 < x < 3a)$

BĐT Cauchy ⇒ $S_{MNPQ} \leqslant \frac{20}{9}\left(\frac{3a - x + x}{2}\right)^2 = 5a^2$

⇒ $\max S_{MNPQ} = 5a^2$ xảy ra khi : $x = 3a - x \Leftrightarrow \quad x = \frac{3a}{2}$.

Khi diện tích thiết diện là lớn nhất thì M chính là trung điểm của đoạn AB, và khi đó N, P, Q, R theo thứ tự là trung điểm của : AC, DC, DB, DA.

Gọi V_1 là thể tích của khối DRPQMNA. Thể tích này bằng thể tích hình lăng trụ đứng AMNRPQ cộng với thể tích hình chóp DRPQ :

$$V_1 = MQ.S_{AMN} + \frac{1}{3}DR.S_{AMN} \quad (\text{vì } S_{AMN} = S_{RPQ})$$

$$= S_{AMN}\left(MQ + \frac{1}{3}DR\right) = \frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{4a}{2}\left(2a + \frac{1}{3}.2a\right) = 4a^3 = \frac{1}{2}V$$

Vậy trong trường hợp này thiết diện chia đôi khối tứ diện ABCD (ycbt).

Bài 313 (ĐẠI HỌC Y – DƯỢC – NHA – 1978)

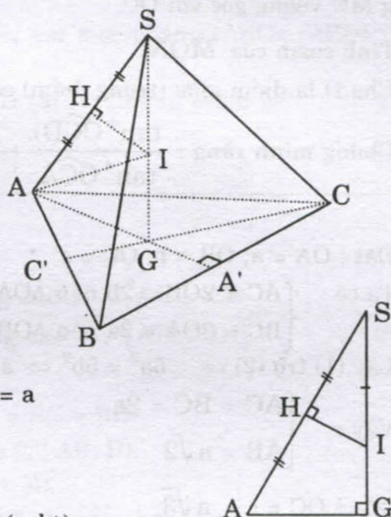
Từ trọng tâm G của tam giác đều ABC cạnh a, ta kẻ đường vuông góc với mặt phẳng (ABC). Trên đường thẳng đó, ta lấy một điểm S với $SG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a/ Chứng minh các cạnh đối của tứ diện SABC vuông góc với nhau từng đôi một.

b/ Chứng minh tứ diện SABC đều.

c/ Tìm bán kính R của hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

Giải



a/ Ta có : SG ⊥ (ABC) nên SG là trục của ΔABC.

$\left.\begin{array}{l} SG \perp (ABC) \\ AG \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAG) \Rightarrow BC \perp SA$

Lý luận tương tự ta có :

$AB \perp SC$ và $AC \perp SB \Rightarrow$ (đpcm).

b/ SG là trục đường tròn nên : SA = SB = SC

Ta có: $SA^2 = SG^2 + GA^2 = \frac{6a^2}{9} + \frac{3a^2}{9} = a^2$

$\Rightarrow SA = a$

Do tính đối xứng $\Rightarrow SA = SB = SC = AB = AC = BC = a$

$\Rightarrow$ Tứ diện SABC đều (đpcm).

c/ Độc giả tự giải :

$\frac{SI}{SA} = \frac{SH}{SG} \Rightarrow SI = \frac{SA \times SH}{SG} \Rightarrow R = SI = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ (ycbt).

Bài 314 (ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC – SƯ PHẠM TP.HCM, HUẾ 1978)

Cho tứ diện ABCD, cạnh AB vuông góc với cạnh CD.

a/ Gọi AA', BB', CC', DD' là các đường cao của tứ diện. Chứng minh rằng : AA'. BB' cắt nhau tại H, CC', DD' cắt tại K và HK nằm trên đường vuông góc chung của AB và CD.

b/ Chứng minh rằng : $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

c/ Ngược lại, giả sử trong tứ diện ABCD, ta có : $AC^2 + BD^2 + CB^2$.

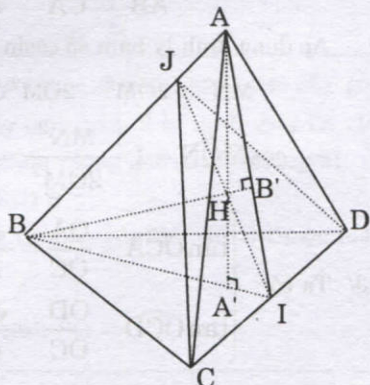
Chứng minh : AB ⊥ CD.

Giải

a/ Do AB ⊥ CD nên tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với CD tại I.

Ta có :

$\begin{cases} AA' \perp CD & \Rightarrow AA' \subset (ABI) \equiv (\alpha) \text{ và } AA' \perp BI \\ BB' \perp CD & \Rightarrow BB' \subset (ABI) \equiv (\alpha) \text{ và } BB' \perp AI \end{cases}$



Vậy AA', BB' là hai đường cao của ΔABI nên chúng cắt nhau tại trực tâm H của ΔABI.

Tương tự ta có CC', DD' nằm trong mặt phẳng (β) qua CD và vuông góc với AB tại J; CC' và DD' là 2 đường cao của ΔCDJ nên đồng quy tại trực tâm K của tam giác đó.

Ta có : $\begin{cases} CD \perp (ABI) \equiv (\alpha) \Rightarrow CD \perp IJ \\ AB \perp (CDJ) \equiv (\beta) \Rightarrow AB \perp IJ \end{cases}$

$\Rightarrow$ IJ là đường vuông góc chung của AB và CD

Do đó IJ là một đường cao của $\Delta ABI \Rightarrow H \in IJ$

Lý luận tương tự IJ là một đường cao $\Delta CDJ \Rightarrow K \in IJ$ (đpcm).

b/ và c/ Độc giả xem điều kiện Đại số để hai cạnh đối của tứ diện vuông góc nhau.

Bài 315 (ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG TP.HCM – 1991)

Cho một tam diện vuông đỉnh O. Trên 3 cạnh của tam diện lấy ba điểm A, B, C sao cho AC = 2OB và BC = 2OA.

1/ M và N là chân các đường vuông góc kẻ từ O tương ứng xuống AC và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với OC.

2/ Tính cosin của $\widehat{MON}$.

3/ Cho D là điểm giữa (trung điểm) của AB.

Chứng minh rằng : $\dfrac{\tan^4 \widehat{OCD})}{\tan^4 \widehat{OCA}} + \dfrac{MN}{AB} = 1.$

Giải

1/ Đặt : OA = a; OB = b; OC = c

Ta có : $\begin{cases} AC = 2OB = 2b \text{ nên } \Delta OAC \Rightarrow 4b^2 = c^2 + a^2 & (1) \\ BC = 2OA = 2a \text{ nên } \Delta OBC \Rightarrow 4a^2 = c^2 + b^2 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) $\Rightarrow \quad 5a^2 = 5b^2 \Leftrightarrow a = b$

Vậy : $\begin{cases} AC = BC = 2a \\ AB = a\sqrt{2} \end{cases}$

(2) $\Rightarrow OC = c = a\sqrt{3}$

$\left.\begin{matrix} \Delta OAC = \Delta OBC \Rightarrow OM = ON \text{ và } CA = CB \\ \Delta OMC = \Delta ONC \Rightarrow CM = CN \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \,//\, AB \quad (3)$

Mà $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$ (4)

(3) và (4) $\Rightarrow OC \perp MN$ (đpcm).

2/ $\Delta OAC \Rightarrow OM.CA = OA.OC \Rightarrow OM = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

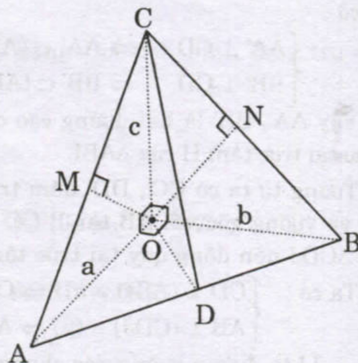
$\Delta OAC \Rightarrow CM.CA = CO^2 \Rightarrow CM = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3a}{2}$

$MN \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow MN = \dfrac{3}{4}a\sqrt{2}$

Áp dụng định lý hàm số cosin vào tam giác cân OMN :

$MN^2 = 2OM^2 - 2OM^2 \cos\widehat{MON}$

$\Rightarrow \cos\widehat{MON} = 1 - \dfrac{MN^2}{2OM^2} = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$ (ycbt).



3/ Ta có : $\begin{cases} \tan\widehat{OCA} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan\widehat{OCD} = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$

Vậy : $\dfrac{\tan^4 \widehat{OCD}}{\tan^4 \widehat{OCA}} + \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{\dfrac{1}{36}}{\dfrac{1}{9}} + \dfrac{\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$ (ycbt).

Bài 316 (ĐẠI HỌC NÔNG LÂM TP.HCM – 1993)

Cho tứ diện ABCD với AB ⊥ CD, có I,J lần lượt là trung điểm AB, CD và IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

1/ Chứng minh AC = AD = BC = BD.

2/ Với O là điểm trên đoạn IJ. Chứng minh O cách đều hai mặt phẳng (ABC); (ABD) và O cách đều hai mặt phẳng (ACD); (BCD).

3/ Một điểm M trên đoạn AC, mặt phẳng (IMJ) cắt BD tại N. Chứng minh MN ⊥ IJ và IJ qua trung điểm của MN.

Giải

1/ Ta có $\begin{cases} AB \perp IJ \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CID)$

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp IC \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân tại C; CI là đường cao} \\ AB \perp DI \Rightarrow \Delta ABD \text{ cân tại D; DI là đường cao} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = CB \\ AD = DB \end{cases}$

Từ ΔICD cân tại I ⇒ IC = ID

⇒ AC = AD (tính chất đường xiên) ⇒ AC = AD = BC = BD

2/ Để ý thấy : ⇒ (ABJ) là mặt phân giác của nhị diện (C; AB; D).

Tương tự (ICD) là mặt phân giác của nhị diện (A; CD; B).

Ta có : O ∈ IJ, mà (ABJ) ∩ (ICD) = IJ (nằm trong hai mặt phân giác của các nhị diện (C; AB; D) và (A; CD; B)).

Vậy O cách đều bốn mặt (ABC), (ABD), (ACD), (BCD) (đpcm).

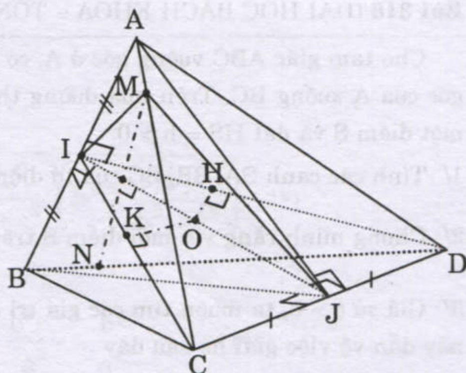
3/ Thực hiện phép đối xứng f ≡ ĐX(IJ) với trục đối xứng là trục IJ, ta có :

$f \equiv ĐX(IJ) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Với : $\begin{cases} A \overset{f}{\longmapsto} B \\ C \overset{f}{\longmapsto} D \end{cases} \Rightarrow AC \overset{f}{\longmapsto} BD$

$\Rightarrow M \overset{f}{\longmapsto} N$

Do đó : IJ ⊥ MN tại trung điểm của MN (đpcm).



Bài 317 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM – 1993)

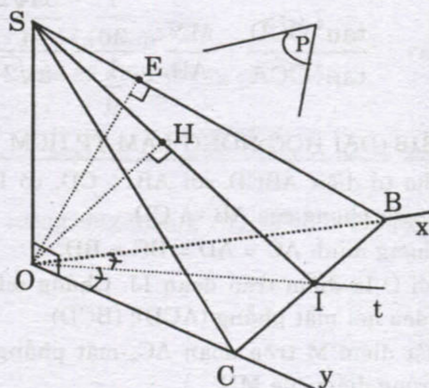
Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$ với I là một điểm nằm trong $\widehat{xOy}$ và thuộc đường phân giác của góc này. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (xOy) tại O lấy một điểm S cố định (S ≠ O), (P) là mặt phẳng qua SI và cắt Ox tại B, Oy tại C. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O xuống SI.

1/ Với vị trí nào của BC thì OH vuông góc với mặt phẳng (SBC) ?

2/ Gọi E là hình chiếu vuông góc của O xuống (SBC). Với vị trí nào của BC thì E thuộc mặt phẳng (SOB) ?

3/ Trường hợp $\widehat{xOy} = \dfrac{\pi}{3}$; $OI = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; OS = 1; $OB = \dfrac{1}{2}$, hãy tính SC.

Giải



1/ Giả sử đã có: $OH \perp (SBC)$

$\Rightarrow OH \perp BC$

Mà : $SO \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOI)$

$\Rightarrow BC \perp OI$ (1)

Mặt khác : $\widehat{BOI} = \widehat{COI}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ΔBOC cân tại O

$\Rightarrow OC = OB$.

Vậy với $B \in Ox$; $C \in Oy$ sao cho :

$OC = OB$ thì $OH \perp (SBC)$ (ycbt).

2/ Giả sử đã có : $OE \perp (SBC) \Rightarrow OE \perp BC$

Nhưng : $SO \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOB) \Rightarrow BC \perp Ox$ và $E \in (SOB)$. Hay với $BC \perp Ox$ thì E thuộc mặt phẳng (SOB), với E là hình chiếu vuông góc của O xuống (SBC) (ycbt).

3/ Xét : $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta BOI} + S_{\Delta COI}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}OB.OC\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(OB.OI\sin\frac{\pi}{6} + OC.OI\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow OB.OC\sqrt{3} = OB.OI + OC.OI \Leftrightarrow \frac{1}{2}.OC\sqrt{3} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} + OC.\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow OC = 1$$

Lúc đó tam giác SOC vuông tại O, cho ta : $SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{2}$ (ycbt).

Bài 318 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – TỔNG HỢP – Y – DƯỢC – KIẾN TRÚC TP.HCM – 1984)

Cho tam giác ABC vuông góc ở A, có $AC = b$, $AB = c$ và $BC = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống BC. Trên nửa đường thẳng Hx vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H ta lấy một điểm S và đặt $HS = h > 0$.

1/ Tính các cạnh SA, SB, SC của tứ diện SABC theo b, c, h.

2/ Chứng minh rằng với mọi điểm S trên Hx ta luôn luôn có $SA < \dfrac{SB + SC}{\sqrt{2}}$.

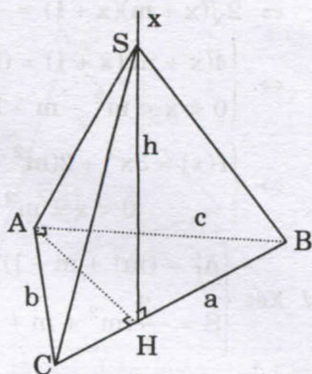
3/ Giả sử $c > b$, ta muốn tìm các giá trị của h để có $SB = SA + SC$. Chứng minh rằng bài toán này dẫn về việc giải hệ sau đây :

$$\begin{cases} 3x^2 + 2(m^2 + m + 1)x - (m^2 + m + 1)(m^2 - 3m + 1) = 0. \\ 0 < x < m^2 - m - 1 \end{cases}$$

Nên đặt : $\dfrac{c^2}{b^2} = m$ và $\dfrac{a^2h^2}{b^4} = x$.

4/ Chứng minh rằng chỉ với điều kiện $\dfrac{c}{b} > \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ta mới có một tứ diện duy nhất S.ABC thỏa mãn $SB = SA + SC$.

Giải



1/ $\begin{cases} SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2 + \dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2} \quad \left(AH^2 = \dfrac{AC^2.AB^2}{AC^2+AB^2}\right) \\ SB^2 = SH^2 + HB^2 = h^2 + \dfrac{c^4}{b^2+c^2} \\ SC^2 = SH^2 + HC^2 = h^2 + \dfrac{b^4}{b^2+c^2} \end{cases}$

$\Rightarrow SA = \sqrt{h^2 + \dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}}$ (ycbt)

$\Rightarrow SB = \sqrt{h^2 + \dfrac{c^4}{b^2+c^2}}$ (ycbt) $\Rightarrow SC = \sqrt{h^2 + \dfrac{b^4}{b^2+c^2}}$ (ycbt).

2/ Ta chứng minh : $SA < \dfrac{SB+SC}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2SA^2 < (SB+SC)^2 \Leftrightarrow SB^2 + SC^2 - 2SA^2 + 2SB.SC > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^4 + c^4 - 2b^2c^2}{b^2+c^2} + 2SB.SC > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2} + 2SB.SC > 0$ (BĐT luôn đúng với mọi S trên Hx)

Nghĩa là $\Rightarrow SA < \dfrac{SB+SC}{\sqrt{2}}$ (ycbt).

3/ $SB = SA + SC \Leftrightarrow SB^2 = SA^2 + SC^2 + 2SA.SC$

$$\Leftrightarrow h^2 + \frac{c^4}{b^2+c^2} = h^2 + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} + h^2 + \frac{b^4}{b^2+c^2} + 2\sqrt{\left(h^2 + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\right)\left(h^2 + \frac{b^4}{b^2+c^2}\right)} \quad (*)$$

Thay : $b^2 + c^2 = a^2$ vào (*); và rút gọn :

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2\sqrt{\left(h^2 + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\right)\left(h^2 + \frac{b^4}{b^2+c^2}\right)} = -h^2 + \frac{c^4}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{b^4}{a^2} \quad (**)$$

Nhân hai vế của (**) cho $\dfrac{a^2}{b^4}$, ta được :

$$\overset{(**)}{\Leftrightarrow} 2\sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{b^4} + \frac{c^2}{b^2}\right)\left(\frac{a^2h^2}{b^4} + 1\right)} = -\frac{a^2h^2}{b^4} + \frac{c^4}{b^4} - \frac{c^2}{b^2} - 1$$

Đặt : $\dfrac{c^2}{b^2} = m > 1$, vì $c > b$; $\dfrac{a^2h^2}{b^4} = x > 0$; vì $h > 0$

Ta thấy rằng việc xác định h để cho SB = SA + SC

$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{(x+m)(x+1)} = -x + m^2 - m - 1$; với $x > 0$ và $m > 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+m)(x+1) = (m^2 - m - 1 - x)^2 \\ 0 < x < m^2 - m - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3x^2 + 2(m^2 + m + 1)x - (m^2 + m + 1)(m^2 - 3m + 1) = 0 \\ 0 < x < m^2 - m - 1 \end{cases}$$

4/ Xét $\begin{cases} \Delta'_f = (m^2 + m + 1)^2 + 3(m^2 + m + 1)(m^2 - 3m + 1) = 4(m^2 + m + 1)(m - 1)^2 \\ S = -\dfrac{2}{3}(m^2 + m + 1) < 0;\ \forall m \end{cases}$

$\Rightarrow f(m^2 - m - 1) = 4m(m-1)^2(m+1)$

Vì $m > 1 \Rightarrow \Delta' > 0;\quad S < 0;\ f(m^2 - m - 1) > 0$

$\Rightarrow f(x)$ có 2 nghiệm riêng biệt, mà tổng 2 nghiệm là số âm và $m^2 - m - 1$ nằm ngoài khoảng 2 nghiệm.

Muốn bài toán có lời giải thì một trong hai nghiệm phải lớn hơn 0 và $m^2 - m - 1 > 0$.

Vì tổng $S < 0$, nên phải có : $\begin{cases} m^2 - m - 1 > 0 & (2) \\ 1 = \dfrac{-(m^2 + m + 1)(m^2 - 3m + 1)}{3} < 0 & (3) \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{Giải (2)} : m < \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee m > \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \text{Giải (3)} : m < \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee m > \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Giao nghiệm $\Rightarrow m > \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ thì hệ (1) có nghiệm duy nhất.

Lúc đó : $m = \dfrac{c^2}{b^2} > \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$$\frac{c}{b} > \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Vậy : $\dfrac{c}{b} > \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$, ta sẽ có một lời giải $x_0 > 0$ duy nhất, vì

$$x_0 = \frac{a^2h^2}{b^4} \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \frac{b^4x_0}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{b^2\sqrt{x_0}}{a}$$

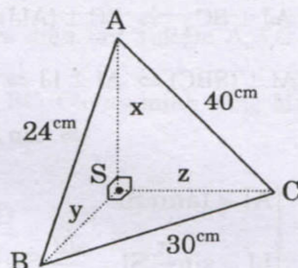
Tóm lại, chỉ với điều kiện $\dfrac{c}{b} > \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$ ta mới có một tứ diện duy nhất với SH = h xác định.

$h = \dfrac{b^2\sqrt{x_0}}{a}$ và thỏa SB = SA + SC (ycbt).

Bài 319 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM – 1986)

Cho một hình tứ diện SABC với SAB, SBC, SCA vuông góc với nhau từng đôi một và có diện tích tương ứng là $24cm^2$, $30cm^2$, $40cm^2$. Hãy tính thể tích của hình tứ diện đó.

Giải



Đặt : SA = x, SB = y, SC = z $\Rightarrow \begin{cases} xy = 2.24 = 48 \\ yz = 2.30 = 60 \\ zx = 2.40 = 80 \end{cases}$

Ta lại có : $V = \dfrac{1}{6}xyz = \dfrac{1}{6}\sqrt{xy.yz.zx}$

$\Rightarrow \quad V = \dfrac{1}{6}\sqrt{48.60.80} = \dfrac{1}{6}6.10.8 = 80\ (cm^3)$.

Bài 320 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM – 1994)

Cho tứ diện SABC có cạnh SA ⊥ (ABC). Nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông, cho biết $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^0$, $\widehat{ASB} = \alpha$ $(0 < \alpha < 90^0)$.

1/ Chứng minh rằng BC ⊥ SB. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

2/ Tính thể tích tứ diện SABC. Với giá trị nào của α thì thể tích đó lớn nhất.

3/ Xác định α để góc phẳng của nhị diện cạnh SC bằng 60^0.

Giải

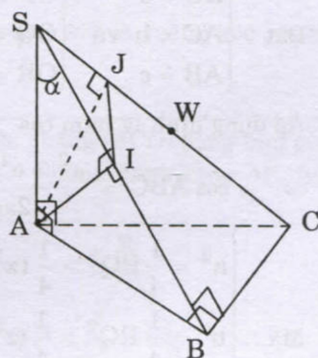
1/ Ta có : $\begin{cases} (SBC) \perp (SAB) \\ (ABC) \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (ABC) = BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB$ (đpcm).

⇒ Hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC có tâm là trung điểm W của SC (A và B cùng nhìn SC dưới 1 góc vuông) và ta có : $\widehat{BSC} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân

$\Rightarrow SC = a.\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a \Rightarrow R = a$ (ycbt).

2/ Thể tích tứ diện SABC : $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}BC.S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{6}BC.SA.AB$



Trong đó : $\begin{cases} BC = SB = a\sqrt{2} \\ AB = SB\sin\alpha = a\sqrt{2}\ \sin\alpha \\ SA = SB\cos\alpha = a\sqrt{2}\ \cos\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}\sin 2\alpha}{6}$ (đvtt)

$\Rightarrow V_{SABC} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3 \quad (1)$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (nhọn)

$\Rightarrow \max V_{SABC} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$, tương ứng $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (ycbt).

3/ Dựng AI ⊥ SB; AJ ⊥ SC

Ta có BC ⊥ (SAB) ⇒ BC ⊥ AI ⇒ AI ⊥ (SBC) ⇒ AI ⊥ SC

Mà : AJ ⊥ SC $\Rightarrow$ SC ⊥ (AIJ) $\Rightarrow$ IJ ⊥ SC $\Rightarrow \widehat{(SC)} = \widehat{AJI} = \dfrac{\pi}{3}$

Do : AI ⊥ (SBC) $\Rightarrow$ AI ⊥ IJ $\Leftrightarrow$ ΔAIJ vuông tại I

$$\Leftrightarrow \tan\widehat{AJI} = \frac{AI}{IJ} \Leftrightarrow \frac{AI}{IJ} = \sqrt{3} \qquad (1)$$

Với : $\begin{cases} AI = \tan\alpha.SI \\ IJ = \sin\dfrac{\pi}{4}.SI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.SI \ (\Delta SIJ \text{ vuông tại J và } \widehat{ISJ} = \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$

Khi đó : $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad \dfrac{SI.\tan\alpha}{SI\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (ycbt).

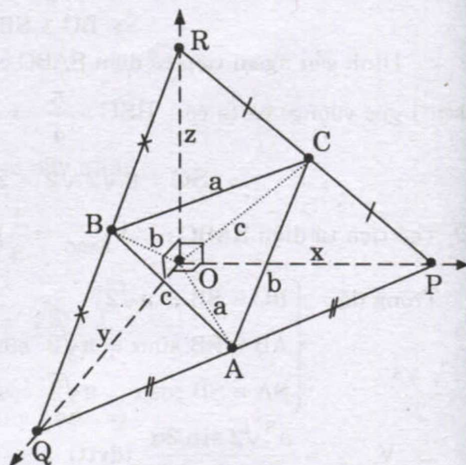
Bài 321 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP KHỐI D – 1994)

Cho tam diện ba mặt vuông Oxyz. Lấy lần lượt trên Ox, Oy, Oz các điểm P, Q, R không trùng với O. Gọi A, B, C theo thứ tự là trung điểm các đoạn PQ, QR, RP.

1/ Chứng minh rằng bốn mặt của tứ diện OABC là những tam giác bằng nhau.

2/ Chứng minh rằng : ABC có cả ba góc nhọn.

Giải



1/ Ta có : $\begin{cases} AB = \dfrac{1}{2}PR \\ OC = \dfrac{1}{2}PR \end{cases} \Rightarrow AB = OC$

Lập luận tương tự $\Rightarrow$ BC = OA; AC = OB

Vậy bốn mặt của tứ diện OABC là những tam giác bằng nhau (đpcm).

2/ Đặt : $\begin{cases} BC = a \\ AC = b \\ AB = c \end{cases}$ và $\begin{cases} OP = x \\ OQ = y \\ OR = z \end{cases}$

Áp dụng định lý hàm cos

$$\Rightarrow \quad \cos\widehat{ABC} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Mà : $\begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{4}PQ^2 = \dfrac{1}{4}(x^2 + y^2) \\ b^2 = \dfrac{1}{4}RQ^2 = \dfrac{1}{4}(z^2 + y^2) \\ c^2 = \dfrac{1}{4}RP^2 = \dfrac{1}{4}(x^2 + z^2) \end{cases} \Rightarrow \cos\widehat{ABC} = \dfrac{x^2}{4ac} > 0$

Hoàn toàn tương tự : $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{z^2}{4bc} > 0; \quad \cos\widehat{ACB} = \dfrac{y^2}{4ab} > 0$

Vậy ΔABC có cả ba góc nhọn (đpcm).

Bài 322 (ĐẠI HỌC KINH TẾ TP.HCM – 1995)

Cho một tam diện vuông đỉnh O. Trên ba cạnh của tam diện lấy 3 điểm A,B,C sao cho AC = 2.OB; BC = 2.OA.

1/ M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ O xuống AC và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với OC.

2/ Tính cos $\widehat{MON}$.

3/ Gọi D là điểm giữa của đoạn AB, chứng minh : $\dfrac{\tan^4 \widehat{OCD}}{\tan^4 \widehat{OCA}} + \dfrac{MN}{AB} = 1.$

Giải

(Xem Đề ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG TP.HCM – 1991)

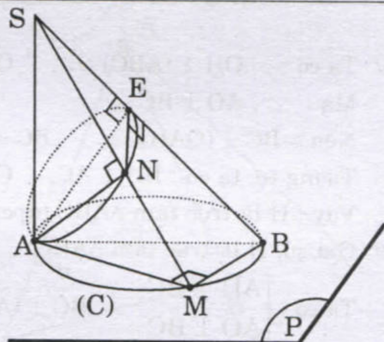
Bài 323 (ĐẠI HỌC LUẬT TP.HCM – 1996)

Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) đường kính AB cố định và điểm M di động trên (C). Gọi S là điểm cố định trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A. Hạ AE ⊥ SB tại E và AN ⊥ SM tại N.

1/ Chứng minh AN ⊥ EN.

2/ Chứng minh khi M di động trên (C) thì N luôn thuộc một đường tròn cố định

Giải



1/ Ta có : BM ⊥ AM ⇒ MB ⊥ (SAM)

⇒ MB ⊥ AN

Mà : AN ⊥ SM ⇒ AN ⊥ (SMB)

Suy ra : AN ⊥ NE (đpcm).

2/ Ta có : $\begin{cases} AN \perp (SMB) \Rightarrow AN \perp SB \\ AE \perp SB \end{cases}$

$\Rightarrow SB \perp (ANE)$

Mà : AE và SB cố định.

⇒ N thuộc mặt phẳng cố định chứa AE và vuông góc với SB; hay mặt phẳng (AEN) cố định.

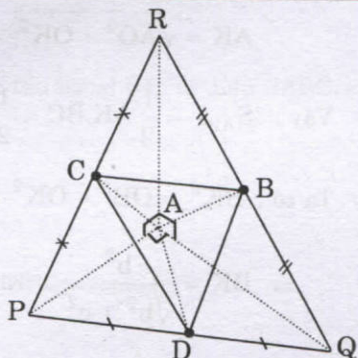
Mặt khác : N luôn nhìn AE dưới một góc vuông

⇒ N thuộc đường tròn đường kính AE nằm trong mặt phẳng qua AE và vuông góc với SB (đpcm).

Bài 324 (ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM – 1996)

Cho tứ diện ABCD với AB = CD; AC = BD; AD = BC. Trong mặt phẳng (BCD) dựng tam giác PQR sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm các cạnh QR. PR, PQ. Chứng minh rằng AP, AQ, AR vuông góc với nhau từng đôi một.

Giải



Để ý : $\begin{cases} DC = \dfrac{1}{2}RQ \\ DC = AB \end{cases} \Rightarrow AB = \dfrac{1}{2}RQ$

⇒ ΔAQR có trung tuyến AB bằng $\dfrac{1}{2}RQ$.

⇒ ΔAQR vuông tại A ⇒ RA ⊥ AQ

Tương tự : $\begin{cases} \Delta ARP \text{ vuông tại A} \Rightarrow AR \perp AP \\ \Delta APQ \text{ vuông tại A} \Rightarrow AQ \perp AP \end{cases}$ (đpcm).

Bài 325 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – 1996)

Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) đường kính AB cố định và điểm M di động trên (C). Gọi S là điểm cố định trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A. Hạ AE ⊥ SB tại E và AN ⊥ SM tại N.

1/ Chứng minh AN ⊥ EN .

2/ Chứng minh khi M di động trên (C) thì N luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải

(Xem ĐẠI HỌC LUẬT TP.HCM – 1996)

Bài 326 (ĐẠI HỌC NGOẠI NGỮ HÀ NỘI – PB – 1997)

Cho hình chóp O.ABC với OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và OA = a, OB = b, OC = c.

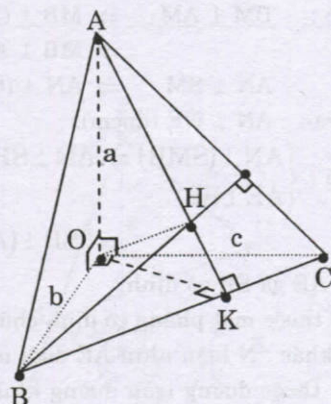
1/ Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.

2/ Chứng minh rằng nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì OH vuông góc với mặt phẳng (ABC).

3/ Tính diện tích tam giác ABC theo a, b, c.

4/ Chứng minh rằng : $a^2\tan A = b^2\tan B = c^2\tan C$.

Giải



1/ Ta có : OH ⊥ (ABC) ⇒ OH ⊥ BC.

Mà : AO ⊥ BC

Nên : BC ⊥ (OAH) ⇒ BC ⊥ AH.

Tương tự, ta có : BH ⊥ AC; CH ⊥ AB.

Vậy : H là trực tâm ΔABC (đpcm).

2/ Giả sử, H là trực tâm ΔABC.

Ta có : $\begin{cases} AH \perp BC \\ AO \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AHO) \Rightarrow BC \perp OH$

Tương tự : AC ⊥ OH.

Vậy : OH ⊥ (ABC) (đpcm).

3/ Ta có : $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$

Gọi : $K = BC \cap AH \Rightarrow BC \perp (AKO) \Rightarrow BC \perp OK$

Suy ra: $OK = \dfrac{OB.OC}{BC} = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

$$AK = \sqrt{AO^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{b^2 + c^2}}$$

Vậy : $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AK.BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}$ (ycbt)

4/ Ta có : $BK^2 = OB^2 - OK^2 = b^2 - \dfrac{b^2c^2}{b^2 + c^2} = \dfrac{b^4}{b^2 + c^2}$

$\Rightarrow BK = \dfrac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$. Khi đó trong ΔABC : $\tan B = \dfrac{AK}{BK}$

$$\Rightarrow \tan B = \sqrt{\frac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{b^2 + c^2}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b^2} = \frac{\sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}}{b^2}$$

$$\Rightarrow b^2.\tan B = \sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}$$

Tương tự : $\begin{cases} a^2.\tan A = \sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2} \\ c^2.\tan C = \sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2} \end{cases}$

Vậy : $a^2.\tan A = b^2.\tan B = c^2.\tan C$ (đpcm).

Bài 327 (ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG TP.HCM KHỐI A, D – 1998)

Cho tam diện ba mặt vuông Oxyz. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C.

1/ Hãy tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) theo OA = a, OB = b, OC = c.

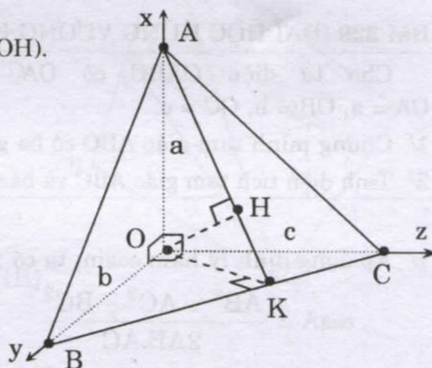
2/ Giả sử điểm A cố định còn điểm B và điểm C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn OB + OC = OA. Hãy xác định vị trí của B và C sao cho thể tích tứ diện OABC là lớn nhất. Chứng minh rằng khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC lại là nhỏ nhất.

Giải

1/ Dựng $OK \perp BC \Rightarrow BC \perp (AOK)$ (1)

Dựng $OH \perp AK \Rightarrow OH \perp (ABC)$ tại H (do : $\overset{(1)}{\Rightarrow} BC \perp OH$).

Khi đó ta có : $d[O;(ABC)] = OH$



Xét : $\begin{cases} \Delta AOK \text{ vuông tại } O \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2} \\ \Delta BOC \text{ vuông tại } O \Rightarrow \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ (ycbt).}$$

2/ Xem Đề ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG – ĐỀ 2 – 1995.

Độc giả có thể thay A bằng S; M bằng C và N bằng B. Khi đó :

$$OB + OC = OA \equiv ON + OM = a \text{ (ycbt).}$$

Bài 328 (ĐẠI HỌC DÂN LẬP NGOẠI NGỮ TIN HỌC – CPB – 1998)

Cho tứ diện SABC có cạnh $SA \perp (ABC)$, nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông. Cho biết cạnh $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^0$, $\widehat{ASC} = \alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1/ Chứng minh rằng $BC \perp SB$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

2/ Tính thể tích tứ diện SABC.

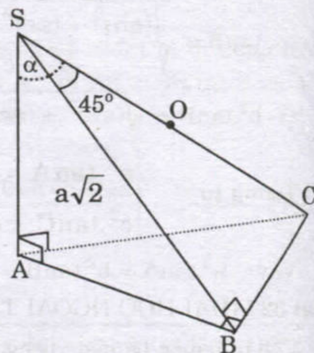
Giải

1/ Nhị diện (SB) vuông $\Rightarrow \begin{cases} (SBC) \perp (SBA) \\ (ABC) \perp (SBA) \end{cases}$

Mà : $BC = (SBC) \cap (ABC)$ Nên : $BC \perp (SBA) \Rightarrow BC \perp SB$.

Khi đó : A; B cùng nhìn SC dưới một góc vuông.

Vậy SABC nội tiếp hình cầu đường kính SC có tâm O là trung điểm SC (ycbt).



Ta có : $\begin{cases} \widehat{BSC} = \dfrac{\pi}{4} \\ \widehat{SBC} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại B

$\Rightarrow SC = \sqrt{2}.SB = 2a \quad \Rightarrow R = \dfrac{SC}{2} = a$ (ycbt).

2/ Thể tích tứ diện là : $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}BC.S_{SAB} = \dfrac{1}{6}BC.SA.AB$

Ta có : $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{AS}{SC} \\ AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = a\sqrt{2(1-2\cos^2\alpha)} = a\sqrt{2(-\cos 2\alpha)} \ ; \dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Vậy : $V_{SABC} = \dfrac{2}{3}a^3\cos\alpha\sqrt{(-\cos 2\alpha)}$; $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ (ycbt).

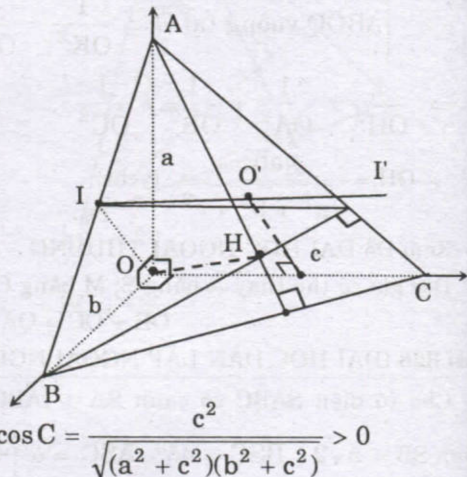
Bài 329 (ĐẠI HỌC HÙNG VƯƠNG KHỐI A – 1998)

Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau tại O. Cho OA = a, OB = b, OC = c.

1/ Chứng minh tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

2/ Tính diện tích tam giác ABC và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Giải



1/ Áp dụng định lý hàm cosin, ta có :

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - b^2 - c^2}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} > 0$$

Nên A là góc nhọn.

Tương tự : $\cos B = \dfrac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}} > 0$; $\cos C = \dfrac{c^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} > 0$

Vậy ΔABC có ba góc đều nhọn (đpcm).

2/ Dựng : OH ⊥ (ABC). Độc giả có thể xem Câu 3 Đề ĐẠI HỌC NGOẠI NGỮ HÀ NỘI – PB – 1997; để có kết quả.

Gọi I là trung điểm AB. Tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp sẽ nằm trên đường thẳng II' vuông góc với mặt phẳng (OAB) và cách I một đoạn $\dfrac{c}{2}$.

Ta có : $R = OO' = \sqrt{OI^2 + O'I^2} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

Bài 330 (ĐẠI HỌC DÂN LẬP HỒNG BÀNG - KHỐI A - 1998)

Hình chóp SABC có đáy là tam giác cân AB = AC = a, (SBC) $\perp$ (ABC) và SA = SB = a.

1/ Chứng tỏ rằng SBC là một tam giác vuông.

2/ Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp biết SC = x.

Hướng dẫn

(Xem Đề ĐẠI HỌC TÀI CHÁNH KẾ TOÁN - 1993)

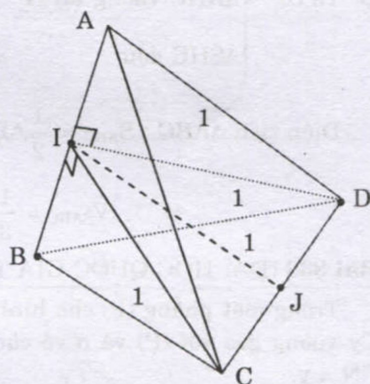
Bài 331 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM - KHỐI B - 1999)

Cho tứ diện ABCD có AB = CD = 2x ($0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$) và AC = AD = BC = BD = 1. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

1/ Chứng minh AB $\perp$ CD và IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.

2/ Tính thể tích tứ diện ABCD theo x. Tìm x để thể tích này lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Giải



1/ Ta có : $\begin{cases} DI \perp AB \\ CI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD) \Rightarrow AB \perp IJ$

Tương tự : CD $\perp$ IJ

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD (đpcm).

2/ Ta có : $IJ = \sqrt{ID^2 - DJ^2} = \sqrt{1 - 2x^2}$

Diện tích ΔICD : $S_{ICD} = \frac{1}{2}IJ.CD = x\sqrt{1 - 2x^2}$

Khi đó : $V_{ABCD} = V_{AICD} + V_{IBCD} = \frac{1}{3}.S_{ICD}.(AI + IB)$

$\Rightarrow V(x) = V_{ABCD} = \frac{2}{3}x^2\sqrt{1 - 2x^2}$ (ycbt).

Áp dụng BĐT Cauchy $\Rightarrow V^2(x) = \frac{4}{9}.x^2.x^2(1 - 2x^2) \leqslant \frac{4}{9}\left(\frac{x^2 + x^2 + 1 - 2x^2}{3}\right)^3$

$\Rightarrow V_{ABCD} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{27}$ (1)

Dấu đẳng thức xảy ra trong (1) khi và chỉ khi : $x^2 = x^2 = 1 - 2x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy : $\max(V_{ABCD}) = \frac{2\sqrt{3}}{27}$ xảy ra khi và chỉ khi : $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ycbt).

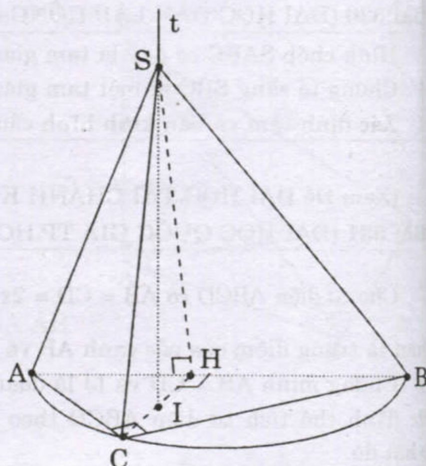
Bài 332 (ĐẠI HỌC HUẾ - KHỐI D - 1999)

Trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R lấy một điểm C tuỳ ý. Dựng CH vuông góc với AB (H thuộc đoạn AB) và gọi I là trung điểm của CH. Trên nửa đường thẳng It vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I lấy điểm S sao cho $\widehat{ASB} = 90^0$.

1/ Chứng minh tam giác SHC là tam giác đều.

2/ Đặt AH = h. Tính thể tích V của tứ diện SABC theo h và R.

Giải



1/ Ta có : $\begin{cases} SI \perp (ABC) \Rightarrow SI \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow$ $AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp SH$

Trong ΔASB vuông tại S $\Rightarrow SH^2 = AH.BH$

Trong ΔACB vuông tại C $\Rightarrow CH^2 = AH.BH$

$\Rightarrow$ SH = CH $\Rightarrow$ ΔSCH cân tại H

Mặt khác : $\begin{cases} SI \perp CH \\ CI = IH \end{cases} \Rightarrow \Delta SCH$ cân tại S

Vậy ΔSCH là tam giác đều (đpcm).

2/ Ta có : $\begin{cases} \Delta ABC \text{ vuông tại C } \Rightarrow AC^2 = 2Rh \\ \Delta AHC \text{ vuông tại H } \Rightarrow HC^2 = 2Rh - h^2 \\ \Delta SHC \text{ đều } \Rightarrow SI = \dfrac{\sqrt{3h(2R-h)}}{2} \end{cases}$

Diện tích ΔABC : $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.CH = R\sqrt{h(2R-h)}$

$$\Rightarrow \quad V_{SABC} = \frac{1}{3}.SI.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{6}Rh(2R-h) \text{ (ycbt).}$$

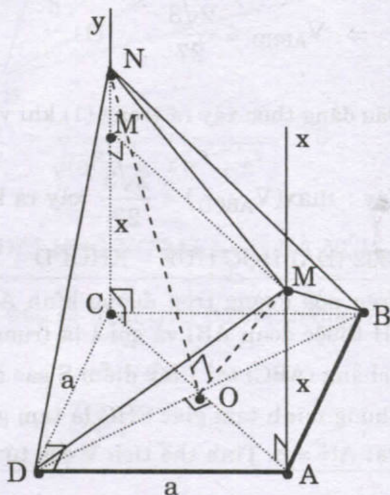
Bài 333 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI D – 1999)

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a, có tâm là O. Trên nửa đường thẳng Ax; Cy vuông góc với (P) và ở về cùng phía đối với (P) lấy lần lượt hai điểm M; N. Đặt AM = x; CN = y.

1/ Tính độ dài MN. Từ đó chứng minh rằng, điều kiện cần và đủ để ΔOMN vuông tại O là $xy = \dfrac{a^2}{2}$.

2/ Giả sử M; N thay đổi sao cho ΔOMN vuông tại O. Tính thể tích tứ diện BDMN. Xác định x; y để thể tích tứ diện này bằng $\dfrac{a^3}{4}$.

Giải



1/ Ta có : $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$

Hạ $MM' \perp Cy \Rightarrow CM' = x$; $MM' = a\sqrt{2}$

Khi đó : $MN = \sqrt{M'M^2 + M'N^2} = \sqrt{2a^2 + (y-x)^2}$

Giả sử ΔOMN vuông tại O

$\Rightarrow MN^2 = NO^2 + OM^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 + (y-x)^2 = \dfrac{a^2}{2} + y^2 + \dfrac{a^2}{2} + x^2$

$\Leftrightarrow xy = \dfrac{a^2}{2}$ (đpcm).

2/ Ta có : $BD \perp (CON) \Rightarrow BD \perp NO$

Mà : $MO \perp NO$; nên : $NO \perp (MBD)$

Khi đó, thể tích BDMN là :

$$V_{BDMN} = \frac{1}{3}NO.S_{MBD} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2}{2}+y^2}.\frac{1}{2}a\sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}+x^2} = \frac{a^2}{6}(x+y)$$

Khi $V_{BDMN} = \frac{a^3}{4} \Leftrightarrow x + y = \frac{3a}{2}$

Mà khi ΔOMN vuông tại O thì $xy = \frac{a^2}{2}$. Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y=\frac{3a}{2} \\ xy=\frac{a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=a \\ y=\frac{a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=a \\ x=\frac{a}{2} \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{(ycbt).}$$

Bài 334 (ĐẠI HỌC LUẬT – ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI – 2000)

Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng :

1/ $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ khi và chỉ khi $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

2/ Nếu $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ và $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ thì $AC \perp BD$.

Giải

1/ Xét : $AD^2 + BC^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$

$\Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = \left(\overline{AB}+\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{BA}+\overline{AC}\right)^2$

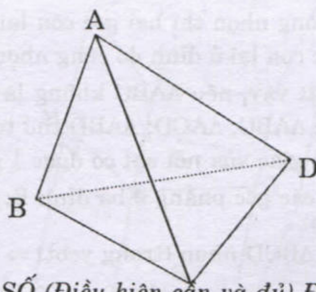
$\Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = AB^2 + BD^2 + BA^2 + AC^2 + 2\overline{AB}\left(\overline{BD}-\overline{CA}\right)$

$\Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2 + 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\left(\overline{BD}+\overline{CA}\right)$

$\Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2 + 2\overline{AB}\left(\overline{BD}+\overline{CA}+\overline{AB}\right)$

$\Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2 + 2.\overline{AB}\overline{CD}$ (*)

(do hệ thức Chales)



Để ý : $\overline{AB} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{AB}.\overline{CD} = 0$

Nên : $\overset{(*)}{\Rightarrow} AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2$ (**) (đpcm).

✪ **Ghi chú** $_1$ **:** ***Đẳng thức (**) còn gọi là ĐIỀU KIỆN ĐẠI SỐ (Điều kiện cần và đủ) ĐỂ HAI CẠNH ĐỐI CỦA MỘT TỨ DIỆN VUÔNG GÓC NHAU LÀ TỔNG BÌNH PHƯƠNG CỦA HAI CẶP CẠNH ĐỐI DIỆN CÒN LẠI BẰNG NHAU.***

2/ Xét điều kiện (**) cho tứ diện ABCD. Ta có :

$$\begin{cases} AB \perp CD \Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2 & (1) \\ AD \perp BC \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2 & (2) \end{cases}$$

So sánh (1) và (2), ta được : $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$ (3)

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \overline{AB} \perp \overline{BD}$

✪ **Ghi chú** $_2$ **:** *Điều kiện:* $\begin{cases} \overline{AB} \perp \overline{CD} \\ \overline{AD} \perp \overline{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$ ***là ĐIỀU KIỆN ĐẠI SỐ (Điều kiện cần và đủ) THỨ NHÌ ĐỂ HAI CẠNH ĐỐI CỦA MỘT TỨ DIỆN VUÔNG GÓC NHAU LÀ: HAI CẶP CẠNH CÒN LẠI VUÔNG GÓC NHAU.***

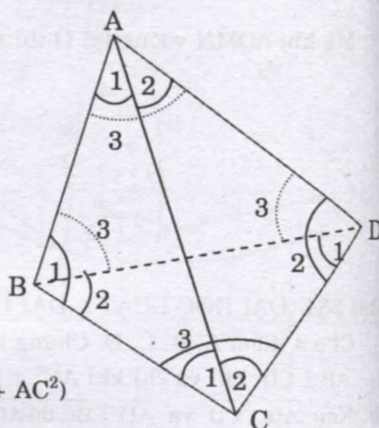
Bài 335 (ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN – KHỐI A – 2000)

Cho tứ diện ABCD có các cạnh thoả mãn hệ thức :

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

Chứng minh rằng trong 4 mặt của tứ diện phải có ít nhất một mặt là tam giác có cả ba góc đều nhọn.

Giải



Xét tứ diện ABCD với điều kiện đã cho sẵn như sau :

$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ (1)

Giả sử $\hat{A}_1 = \widehat{BAC} \geqslant 90^0$ (không nhọn).

Lúc đó định lý hàm cos cho ta :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A_1$

$\Rightarrow BC^2 \geqslant AB^2 + AC^2$ (2) (vì $\cos\widehat{BAC} \leqslant 0$)

Từ (1) cho : $\begin{cases} AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 & (3) \\ AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 & (4) \end{cases}$

Từ (2) & (3) $\Rightarrow BC^2 + (AB^2 + CD^2) \geqslant (AD^2 + BC^2) + (AB^2 + AC^2)$

$\Rightarrow CD^2 \geqslant AD^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A}_2 = \widehat{CAD} \geqslant 90^0$

Tương tự, (2) & (4) suy ra :

$BC^2 + (AC^2 + BD^2) \geqslant (AB^2 + AC^2) + (AD^2 + BC^2)$

$\Rightarrow BD^2 \geqslant AB^2 + AD^2 \Rightarrow \hat{A}_3 = \widehat{BAD} \geqslant 90^0$

Tóm lại ta có : $\hat{A}_1$; $\hat{A}_2$; $\hat{A}_3 \geqslant 90^0$ (không nhọn). Nghĩa là, tại một đỉnh nào đó nếu có một góc không nhọn thì hai góc còn lại cũng không nhọn, do đó nếu có một góc ở một đỉnh nhọn thì hai góc còn lại ở đỉnh đó cũng nhọn (*).

Thật vậy, nếu ΔABC không là tam giác nhọn, chẳng hạn $A_1 \geqslant 90^0$. Theo chứng minh trên thì các ΔABC; ΔACD; ΔABD thứ tự có B_1 và C_1; C_2 và D_2; D_3 và B_3 đều nhọn (vì mỗi một trong ba tam giác vừa nói chỉ có được 1 góc không nhọn ở đỉnh).

$\Rightarrow$ các góc phẳng ở ba đỉnh B; C; D đều nhọn.

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \Delta BCD$ nhọn (trong ycbt) $\Rightarrow$ đpcm.

ĐỀ TƯƠNG TỰ

Bài 336 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KHỐI B – 1978)

Cho tứ diện ABCD với cạnh AB = a. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD.

a/ Chứng minh rằng $AC \perp (BCD)$; tính độ dài AC theo a.

b/ Lấy M trên đoạn BC, N trên đoạn CD. Đặt CM = x ($0 \leqslant x \leqslant a$), CN = y ($0 \leqslant y \leqslant a$). Tính thể tích của tứ diện ACMN theo a, x, y.

Bài 337 (ĐẠI HỌC KHỐI B – 1981)

Cho hai đường thẳng chéo nhau d và d', $d \perp d'$ nhận IJ = h làm đường vuông góc chung. Lấy A; B $\in$ d và có IA = b. Lấy M $\in$ d' và JM = m.

a/ Tìm thể tích tứ diện ABMJ.

b/ Kẻ $BC \perp AJ$. Gọi H là trực tâm ΔCAM. Chứng minh : $BC \perp (CAM)$ và $MA \perp BH$.

Hướng dẫn

a/ $V = \frac{1}{6}hm(a + b)$. b/ Độc giả tự giải.

Bài 338 (ĐẠI HỌC VĂN HOÁ HÀ NỘI – 1998)

Tứ diện ABCD có CD = 2a, các cạnh còn lại đều bằng $a\sqrt{2}$.

a/ Chứng minh : $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 1v$. b/ Tìm S_{tp} tứ diện.

c/ Chứng minh mp (ACD) ⊥ (BCD).

Hướng dẫn

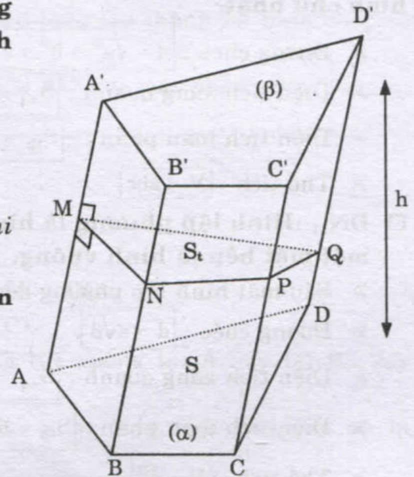
a/ $\Delta BCD = \Delta ACD$ (ccc) ⇒ $\widehat{CBD} = 1v$.

b/ $S_{tp} = a^2(2 + \sqrt{3})$

c/ Theo định lí đảo Pythagore thì $\widehat{AIB}$ (đpcm).

Chuyên đề 15 : HÌNH LĂNG TRỤ – HÌNH LĂNG TRỤ CỤT

I. GIẢN LƯỢC KIẾN THỨC TỐI THIỂU



❐ **$ĐN_1$: Hình lăng trụ là một khối đa diện có hai mặt (bằng nhau) nằm trong hai mặt phẳng song song ((α) và (β)) gọi là đáy và tất cả những cạnh không thuộc hai đáy đều song song nhau.**

❐ **$ĐN_2$: Chiều cao hình lăng trụ là : h = d[(α); (β)].**

✪ **Ghi chú :**

➢ *Các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành.*

➢ *Ta có thể nói một hình lăng trụ được xác định khi biết một đáy và một cạnh của nó.*

❐ **$ĐN_3$: Mặt chéo là thiết diện chứa hai cạnh bên không cùng ở trong một mặt bên.**

❐ **$ĐN_4$: Mặt phẳng vuông góc với cạnh bên cắt hình lăng trụ tạo nên thiết diện thẳng S_t.**

♦ TA CÓ THỂ PHÂN LOẠI LĂNG TRỤ NHƯ SAU :

❐ **$ĐN_5$: Lăng trụ đứng là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy. Khi cạnh bên có không vuông góc với đáy ta có lăng trụ xiên.**

♦ Trong lăng trụ đứng thì :

➢ Cạnh bên là đường cao.

➢ Thiết diện thẳng bằng đáy.

➢ Các mặt bên và mặt chéo đều là hình chữ nhật.

❐ **$ĐN_6$: Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có mặt đáy là đa giác đều.**

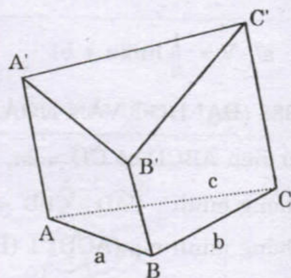
Lăng trụ đều có các mặt bên đều là những hình chữ nhật bằng nhau.

❐ **$ĐN_7$: Lăng trụ cụt là lăng trụ có hai mặt đáy không song song.**

◆ Trong lăng trụ cụt thì :

➢ Các cạnh bên đều là hình thang hay tam giác.

➢ Các cạnh bên không bằng nhau.



• **Tính chất 1 :** Diện tích xung quanh.

➢ Lăng trụ : $\boxed{S_{xq} = p\mathscr{C}}$.

➢ Lăng trụ đứng, lăng trụ đều : $\boxed{S_{xp} = \mathscr{C}.h}$.

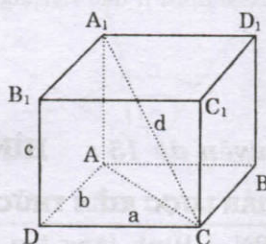
• **Tính chất 2 :** Diện tích toàn phần : $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2\mathscr{B}}$.

• **Tính chất 3 :** Thể tích

➢ Lăng trụ : $\boxed{V = S.l = \mathscr{B}.h}$

➢ Lăng trụ tam giác : $\boxed{V = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)S}$; a, b, c là 3 cạnh đáy.

◆ TA CÓ MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT SAU :



❐ **$ĐN_8$: Hình hộp là hình lăng trụ có một đáy là hình bình hành.**

➢ Sáu mặt bên là hình bình hành.

❐ **$ĐN_9$: Hình hộp đứng là hình hộp có các mặt bên là hình chữ nhật.**

❐ **$ĐN_{10}$: Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.**

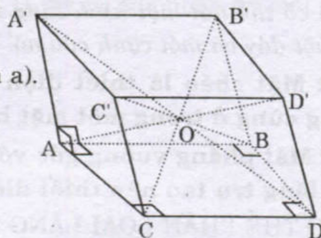
➢ Đường chéo : $\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; a, b, c : ba kích thước.

➢ Diện tích xung quanh : $\boxed{S_{xq} = 2(a+b)c}$

➢ Diện tích toàn phần : $\boxed{S_{tp} = 2(ab + bc + ca)}$

➢ Thể tích : $\boxed{V = abc}$

❐ **$ĐN_{11}$:Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có một mặt bên là hình vuông.**



➢ Sáu mặt hình lập phương đều là hình vuông (cạnh a).

➢ Đường chéo : $\boxed{d = a\sqrt{3}}$.

➢ Diện tích xung quanh : $\boxed{S_{xq} = 4a^2}$.

➢ Diện tích toàn phần : $\boxed{S_{tp} = 6a^2}$.

➢ Thể tích : $\boxed{V = a^3}$.

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 339

Cho hình hộp chữ nhật. Gọi α, β, γ là góc tạo bởi một đường chéo của hình hộp với ba cạnh cùng phát xuất từ một đỉnh.

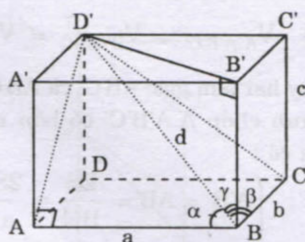
1/ Chứng minh : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (1)

2/ Chứng minh : $\sqrt{4\cos^2\alpha + 1} + \sqrt{4\cos^2\beta + 1} + \sqrt{4\cos^2\gamma + 1} \leq \sqrt{21}$ (2)

Giải

1/ Xét đường chéo BD' = d của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

Đặt : $\alpha = \widehat{ABD'}$; $\beta = \widehat{CBD'}$; $\gamma = \widehat{B'BD'}$



$\Delta BAD'$ vuông ở A $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{AB}{BD'} = \dfrac{a}{d}$

Tương tự $\Rightarrow \cos\beta = \dfrac{b}{d}$ và $\cos\gamma = \dfrac{c}{d}$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2}$$

Theo tính chất đường chéo ta có : $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (1) (đpcm).

2/ Áp dụng bất đẳng thức Schwartz

$\Rightarrow 1.\sqrt{4\cos^2\alpha + 1} + 1.\sqrt{4\cos^2\beta + 1} + 1.\sqrt{4\cos^2\gamma + 1} \leqslant$

$$\leqslant \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^1)(4\cos^2\alpha + 1 + 4\cos^2\beta + 1 + \cos^2\gamma + 1)} =$$

do $\overset{(1)}{=} \sqrt{3(4\cos^2\alpha + 4\cos^2\beta + 4\cos^2\gamma + 3)} = \sqrt{21}$ (đpcm).

III. GIẢI TOÁN THI

Bài 340 (ĐẠI HỌC KHỐI B – 1976)

> Cho một hình lăng trụ đứng có đáy ABC là một tam giác vuông góc ở B, có các cạnh bên là AA', BB', CC'.
>
> a/ Chứng minh rằng tam giác AB'C' là tam giác vuông, còn tam giác AB'C không thể là tam giác vuông.
>
> b/ Chứng minh rằng hai tam giác AB'C' và AB'C chia hình lăng trụ thành ba hình chóp có thể tích bằng nhau.
>
> c/ Biết diện tích đáy (ABC) là S, cạnh BC bằng a, góc giữa AC' với mặt phẳng đáy bằng α, tính diện tích toàn phần của hình chóp A.A'B'C'.

Giải

a/ Để ý thấy lăng trụ ABC.A'B'C' là lăng trụ đứng.

$\Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \supset AB' \Rightarrow BC \perp AB'$; mà $B'C' \parallel BC$

$\Rightarrow B'C' \perp AB' \quad \Rightarrow \Delta AB'C'$ vuông tại B'. (đpcm)

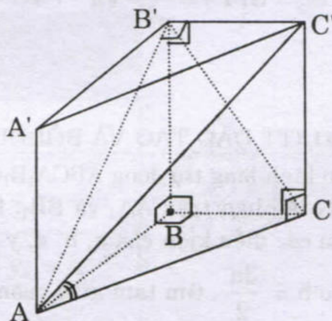
□ Thật vậy giả sử $\Delta AB'C$ vuông tại C $\Rightarrow AC \perp B'C$ mà : $AC \perp CC'$

$\Rightarrow AC \perp (BB'C'C)$ (điều này mâu thuẫn với $AB \perp (BB'C'C)$.

□ Tương tự ta cũng chứng minh được rằng $\Delta AB'C$ không thể vuông tại A hay tại B'. Vậy ΔABC không thể là tam giác vuông (đpcm).

b/ Gọi đường cao của lăng trụ đứng ABC.A'B'C' là CC' = h, diện tích đáy của nó là dt(ΔABC) = dt($\Delta A'B'C'$) = S. Ta có :

$$\begin{cases} V_{ABC.A'B'C'} = Sh \\ V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}AA'.dt(\Delta A'B'C') = \dfrac{1}{3}Sh \\ V_{B'.ABC} = \dfrac{1}{3}BB'.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3}Sh \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad V_{A.B'C'C} = Sh - \left(\frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}Sh\right) = \frac{1}{3}Sh$$

$$\Rightarrow\ V_{A.A'B'C'} = V_{B'.ABC} = V_{A.B'C'C} = \frac{1}{3}Sh$$

Vậy hai tam giác AB'C' và AB'C chia lăng trụ thành ba phần bằng nhau (đpcm).

c/ Hình chóp A.A'B'C' có bốn mặt AA'B', AB'C', AA'C', A'B'C' đều là những tam giác vuông. Ta có :

$$\begin{cases} A'B' = AB = \dfrac{2S}{BC} = \dfrac{2S}{a} \\ A'C' = AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \dfrac{1}{a}\sqrt{a^4 + 4S^2} \\ AA' = BB' = CC' = AC.\tan\alpha = \dfrac{1}{a}\sqrt{a^4 + 4S^2}\ \tan\alpha \\ AB' = \sqrt{B'B^2 + AB^2} = \dfrac{1}{a}\sqrt{a^4\tan^2\alpha + 4S^2(1+\tan^2\alpha)} \end{cases}$$

$$\text{Mà : }\begin{cases} S_{\Delta A'B'C'} = S = \dfrac{1}{2}A'B'.B'C' \\ S_{\Delta AA'B'} = \dfrac{1}{2}AA'.A'B' \\ S_{\Delta AA'C'} = \dfrac{1}{2}AA'.AC \\ S_{\Delta AB'C'} = \dfrac{1}{2}AB'.B'C' \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{1}{2}B'C'(A'B' + AB') + \frac{1}{2}AA'(A'B' + A'C')$$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{1}{2}a\left(\frac{2S}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{a^4\tan^2\alpha + 4S^2(1+\tan^2\alpha)}\right) + \frac{1}{2}.\frac{1}{a}\sqrt{a^4 + 4S^2}.\tan\alpha\left(\frac{2S}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{a^4 + 4S^2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{1}{2}\left(2S + \sqrt{a^4\tan^2\alpha + 4S^2(1+\tan^2\alpha)}\right) + \frac{1}{2}.\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4 + 4S^2}\ \tan\alpha(2S + \sqrt{a^4 + 4S^2})$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S\left(1 + \frac{\tan\alpha}{a^2}\sqrt{a^4 + 4S^2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{a^4\tan^2\alpha + 4S^2(1+\tan^2\alpha)} + \frac{1}{2}\frac{\tan\alpha}{a^2}(a^4 + 4S^2)\ \text{(ycbt).}$$

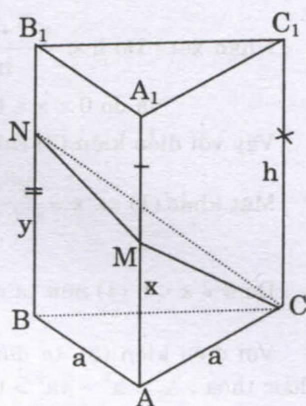
Bài 341 (TT ĐÀO TẠO VÀ BỒI DƯỠNG CÁN BỘ Y TẾ TP.HCM – 1991)

Cho hình lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ đáy ABC là tam giác vuông, AB = AC = a, đường cao AA_1 = h. M, N lần lượt trên AA_1 và BB_1. Đặt AM = x; BN = y.

1/ Tìm các điều kiện của a, h, x, y để tam giác CMN vuông.

2/ Cho $h = \dfrac{3a}{2}$, tìm tam giác vuông CMN có diện tích lớn nhất. Tìm diện tích đó.

3/ Cho h = 3a. Tìm tam giác vuông CMN có diện tích lớn nhất. Tìm diện tích đó.



Giải

1/ Áp dụng định lý Pythagore, ta có :

$$\begin{cases} MC^2 = a^2 + x^2 \\ NC^2 = 2a^2 + y^2 \\ MN^2 = a^2 + |y - x|^2 = a^2 + y^2 + x^2 - 2xy \end{cases}$$

Khi đó ΔCMN vuông tại C

$\Leftrightarrow MN^2 = MC^2 + NC^2$

$\Leftrightarrow a^2 + y^2 + x^2 - 2xy = a^2 + x^2 + 2a^2 + y^2$

$\Leftrightarrow -xy = a^2$ (vô lý)

Vậy không tồn tại a, h, x, y để ΔCMN vuông tại C (ycbt).

2/ Tương tự ΔCMN vuông tại M

$\Leftrightarrow NC^2 = MC^2 + MN^2$

$\Leftrightarrow 2a^2 + y^2 = a^2 + x^2 + a^2 + y^2 + x^2 - 2xy$

$$\Leftrightarrow x(x - y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \,;\, \forall y : 0 \leqslant y \leqslant h \\ x = y \ \ (0 \leqslant x, y \leqslant h) \end{array}\right.$$

Do đó ΔCMN vuông tại M nếu trong lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ xảy ra một trong hai khả năng sau:

- TH_1 : $M \equiv A, \forall N \in BB_1$ (ycbt).
- TH_2 : $AM = BN \Leftrightarrow MN \,//\, AB$ (ycbt).

3/ ΔCMN vuông tại N $\Leftrightarrow MC^2 = NC^2 + MN^2$

$\Leftrightarrow a^2 + x^2 = 2a^2 + y^2 + a^2 + y^2 + x^2 - 2xy$

$\Leftrightarrow y^2 - xy + a^2 = 0$ (1)

Vậy ΔCMN vuông tại N thì các độ dài a, x, y phải thỏa mãn điều kiện (1).

Do : $0 \leqslant y \leqslant h$ (2), nên phương trình (1) phải có nghiệm y thỏa điều kiện (2).

Đặt $f(y) = y^2 - xy + a^2$. Ta có : $\Delta_f = x^2 - 4a^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2a$ (do $x \geqslant 0$)

$f(0) = a^2 > 0$

$f(h) = h^2 - hx + a^2$, nên : $f(h) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{h^2 + a^2}{h}$

- $\dfrac{S}{2} - 0 = \dfrac{x}{2} \geqslant 0$ (do $x \geqslant 0$)
- $\dfrac{S}{2} - h = \dfrac{x}{2} - h < 0$ (do $x \leqslant h \Rightarrow x < 2h$)

x	Δ	f(0)	f(h)	$\frac{S}{2}-0$	$\frac{S}{2}-h$	Kết quả
	−	+	+	−	−	
0				0		VN
	−	+	+	+	−	
2a	0					$y_1 = y_2 = a$
h	+	+	+	+	−	$0 < y_1 < y_2 < h$
$\frac{h^2 + a^2}{h}$			0			$y_1 = \frac{a^2}{h}$; $y_2 = h$
	+	+	−	+	−	$0 < y_1 < h < y_2$

Nhận xét : Do $h < \dfrac{a^2 + h^2}{h} \Leftrightarrow \quad a^2 > 0$

và do $0 \leqslant x \leqslant h$ nên ta phải chọn $2a \leqslant x \leqslant h$ (3)

Vậy với điều kiện (3) thì (1) cho ta hai giá trị của y thỏa (2) và lúc đó ΔCMN vuông tại N.

* Mặt khác (1) $\Rightarrow x = \dfrac{y^2 + a^2}{y}$ $(y \neq 0)$

Do $0 \leqslant x \leqslant h$ (4) nên ta có : $0 \leqslant \dfrac{y^2 + a^2}{y} \leqslant h \Leftrightarrow g(y) = y^2 - hy + a^2 \leqslant 0$ (5)

Với điều kiện (3), ta được hai giá trị y thỏa (2). Vấn đề còn lại là ta tìm điều kiện để (5) được thỏa : $\Delta_g = h^2 - 4a^2 > 0$ (theo (3) $\Rightarrow h > 2a$)

Đến đây (5) $\Leftrightarrow \dfrac{h - \sqrt{h^2 - 4a^2}}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{h + \sqrt{h^2 - 4a^2}}{2}$ (6)

Đã có : $\dfrac{h - \sqrt{h^2 - 4a^2}}{2} > 0$ và $\dfrac{h + \sqrt{h^2 - 4a^2}}{2} < h$

Vậy khi (6) thỏa thì (2) thỏa.

Kết luận : để ΔCMN vuông tại N thì các độ dài a, x, y đồng thời phải thỏa điều kiện (1), (3) và (6) (ycbt).

2/ Với $h = \dfrac{3a}{2} < 2a$, điều kiện (3) không thỏa nên ΔCMN chỉ có thể vuông tại M. Theo 1b), xét hai khả năng xảy ra :

❑ **TH₁ :** $M \equiv A$ và $\forall N \in BB_1$

$\exists \max dt(NAC) \Leftrightarrow \exists \max NA \Leftrightarrow \exists \max \sqrt{y^2 + a^2} \Leftrightarrow y = h = \dfrac{3a}{2}$

Vậy $\max dt(NAC) = \dfrac{1}{2} AC.\max(NA) = \dfrac{1}{2} a\sqrt{\dfrac{9a^2}{4} + a^2} = \dfrac{a^2\sqrt{13}}{4}$

❑ **TH₂ :** MN // AB $\Leftrightarrow x = y$: ΔNMC có cạnh góc vuông MN = a

$\exists \max dt(NMC) \Leftrightarrow \exists \max MC \Leftrightarrow \exists \max \sqrt{x^2 + a^2} \Leftrightarrow x = h = \dfrac{3a}{2}$.

$\Rightarrow \max dt(NMC) = \dfrac{1}{2} a\sqrt{a^2 + \dfrac{9a^2}{4}} = \dfrac{a^2\sqrt{13}}{4}$.

✪ ***Kết luận :***

❑ Với $h = \dfrac{3a}{2}$, ΔCMN chỉ có thể vuông tại M, và $\max dt(CMN) = \dfrac{a^2\sqrt{13}}{4}$ xảy ra tại hai vị trí:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta AB_1C \text{ (vuông tại A) với } x = 0,\ y = \dfrac{3a}{2} \\ \Delta AB_1C \text{ (vuông tại } A_1\text{) với } x = y = h = \dfrac{3a}{2} \end{array}\right.$$

3/ Với $h = 3a > 2a \Rightarrow$ điều kiện (3) thỏa nên tam giác CMN có thể vuông tại M (đã khảo sát riêng ở câu 2) hoặc vuông tại N (với h = 3a). Ta khảo sát ΔCMN tại N.

$$\text{Khi } h = 3a \Rightarrow \begin{cases} (3) \Rightarrow 2a \leqslant x \leqslant 3a & (3') \\ (6) \Rightarrow \dfrac{a(3-\sqrt{5})}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{a(3+\sqrt{5})}{2} & (6') \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow NM^2 = y^2 - xy + a^2 + x^2 - xy$

$$\Rightarrow NM^2 = x^2 - xy = \left(\frac{y^2 + a^2}{y}\right)^2 - (y^2 + a^2) = \frac{a^2}{y^2}(a^2 + y^2)$$

Đặt : $t = y^2$; $(6') \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2}(7 - 3\sqrt{5}) \leqslant t \leqslant \dfrac{a^2}{2}(7 + 3\sqrt{5})$ (7)

Lúc đó: $dt^2(NMC) = \dfrac{1}{4}NC^2.NM^2 = \dfrac{a^2}{4t}(2a^2 + t)(a^2 + t)$

$$\Rightarrow dt^2(NMC) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{t^2 + 3a^2t + 2a^4}{t}\right) = Z(t)$$

$$\Rightarrow Z(t) = \frac{a^2}{4}\left(t + 3a^2 + \frac{2a^4}{t}\right)' = \frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{2a^4}{t^2}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{t^2 - 2a^4}{t^2}\right) \quad (8)$$

Ta có bảng biến thiên :

t	$-a^2\sqrt{2}$		$\frac{a^2(7-3\sqrt{5})}{2}$		$a^2\sqrt{2}$		$\frac{a^2(7+3\sqrt{5})}{2}$	
Z'	+ 0	−		−	0	+		+
Z				↘	(min)	↗		

$$\Rightarrow \max Z = \max\left\{Z\left(\frac{a^2(7-3\sqrt{5})}{2}\right); Z\left(\frac{a^2(7+3\sqrt{5})}{2}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \max Z = \max\left\{\frac{3a^4}{8}(9+\sqrt{5}); \frac{3a^4}{8}(9-\sqrt{5})\right\} = \frac{3a^4}{8}(9+\sqrt{5})$$

Vậy $\max dt(NMC) = \dfrac{a^2}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}(9+\sqrt{5})}$ xảy ra khi :

$$t = y^2 = \frac{a^2}{2}(7 - 3\sqrt{5}) \Leftrightarrow y = a\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} \text{ thỏa } (6')$$

Lúc đó $x = \dfrac{y^2 + a^2}{y} = \dfrac{a}{2}(3+\sqrt{5})\sqrt{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}$ thỏa (3').

o ***Kết luận :***

Trong trường hợp $h = 3a \Rightarrow \Delta NMC$ vuông tại M và $\max dt(NMC) = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a^2$, xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x = y = h = 3a \\ x = 0 \wedge y = h = 3a \end{array}\right.$

Còn lại ΔNMC cũng có thể vuông tại N và maxdt(NMC) = $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}(9+\sqrt{5})}$ xảy ra khi và

chỉ khi $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}(3+\sqrt{5})\sqrt{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}} \\ y = a\sqrt{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$ (ycbt).

Bài 342 (ĐẠI HỌC AN NINH – CẢNH SÁT – KHỐI A – 1997)

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi α là góc phẳng nhị diện (B'; CD, B).

1/ Xác định α và chứng tỏ rằng : $S_{BCD} = S_{B'CD} \times \cos\alpha$.

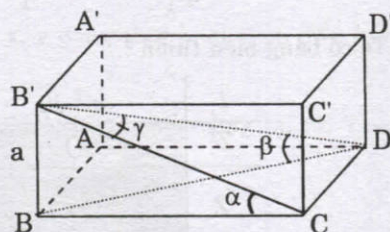
2/ Cho AA' = a và đường thẳng B'D tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc có số đo β, đồng thời đường thẳng B'D tạo với mặt bên BCC'B' một góc γ. Tính thể tích hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' theo a, β, γ, α.

Giải

1/ Để ý thấy góc phẳng nhị diện (B'; CD; B) là $\widehat{BCB'} = \alpha$.

ΔBCB' vuông tại B

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{BC}{B'C} \Rightarrow BC = \cos\alpha.B'C$



$\Rightarrow \dfrac{1}{2}BC.CD = \dfrac{1}{2}B'C.CD.\cos\alpha$

$\Rightarrow S_{BCD} = S_{B'CD}\cos\alpha$ (đpcm).

2/ Ta xét các yếu tố :

- BD là hình chiếu của B'D lên mặt phẳng (ABCD) nên $\widehat{BDB'} = \beta$.
- B'C là hình chiếu của B'D lên mặt phẳng (BCC'B') nên $\widehat{CB'D} = \gamma$
- ΔBB'D vuông tại B và AA' = BB' = a

$$\Rightarrow \sin\widehat{BDB'} = \sin\beta = \frac{BB'}{B'D} = \frac{a}{B'D} \Rightarrow B'D = \frac{a}{\sin\beta}.$$

- ΔCB'D vuông tại C $\Rightarrow$ CD = B'D.sinγ = $\dfrac{a\sin\gamma}{\sin\beta}$.
- ΔCB'B vuông tại B $\Rightarrow$ BC = $\dfrac{BB'}{\tan\alpha} = a.\cot\alpha$.

Khi đó, thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' là :

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = BB'.BC.CD = a^3\cot\alpha.\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \text{ (ycbt).}$$

Bài 343 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – KHỐI D – 1999)

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Dựng mặt phẳng chứa đường chéo AC của hình vuông ABCD và đi qua trung điểm M của cạnh B' C'. Mặt phẳng đó chia hình lập phương thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Giải

Gọi : $MN = (ACM) \cap (A'B'C'D')$. Ta có : $AC \,//\, (A'B'C'D')$

Nên : $MN \,//\, AC \,//\, A'C'$.

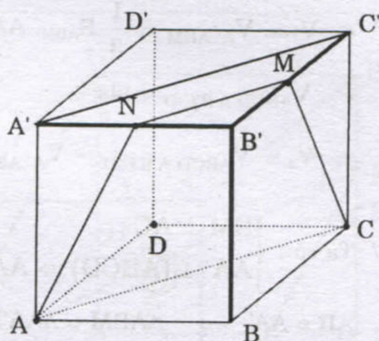
Hay N là trung điểm của A'B'.

Gọi a là cạnh hình lập phương, ta có : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$

Mặt khác thể tích hình chóp cụt ABC.NB'M là :

$$V_{ABC.NB'M} = \frac{1}{3}BB'\left(S_{ABC} + S_{NB'M} + \sqrt{S_{ABC}.S_{NB'M}}\right)$$

$$\Rightarrow V_{ABC.NB'M} = \frac{1}{3}a\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{7}{24}a^3$$



Suy ra: $V_{ACD.A'NMC'D'} = a^3 - \frac{7}{24}a^3 = \frac{17}{24}a^3$

Vậy: $\dfrac{V_{ACD.A'NMC'D'}}{V_{ABC.NB'M}} = \dfrac{17}{7}$ (ycbt).

Bài 344 (ĐẠI HỌC NGOẠI NGỮ HÀ NỘI – CB – 1999)

Cho một hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' và điểm M trên cạnh AD. Mặt phẳng (A'BM) cắt đường chéo AC' của hình hộp tại điểm H.

1/ Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AD thì đường thẳng MH cắt đường thẳng A'B tại một điểm cố định.

2/ Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện tạo bởi mặt phẳng (A'BM) cắt hình hộp trong trường hợp M là trung điểm của cạnh AD.

3/ Giả sử AA' = AB và MB vuông góc với AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (A'BM) vuông góc với AC' và điểm H là trực tâm của tam giác A'BM.

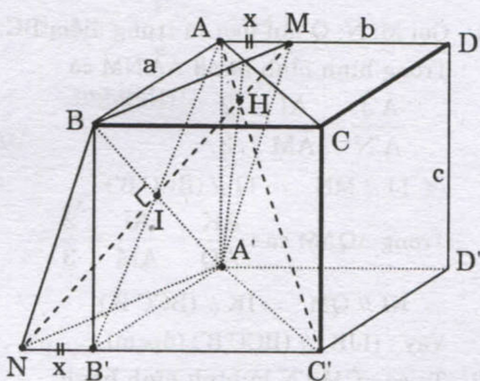
Giải

1/ Trên tia đối của tia B'C' lấy điểm N sao cho : B'N = AM = x

$\Rightarrow$ AMB'N là hình bình hành.

Gọi : $I = AB' \cap MN$

$$\Rightarrow \begin{cases} AI = B'I = \dfrac{1}{2}AB' \\ MI = NI = \dfrac{1}{2}MN \end{cases}$$



Do đó hình chữ nhật ABB'A' có I cũng là trung điểm của BA'

$\Rightarrow$ A'MBN là hình bình hành

$\Rightarrow A'N \,//\, BM$

$\Rightarrow mp\,(A'BM) \equiv mp\,(A'MBN)$

$\Rightarrow$ N; M; H; I cùng thuộc mặt phẳng (A'MBN) (1)

Ta có : $\begin{cases} M;\, I;\, N \in NM \\ H \in AC' \end{cases} \Rightarrow N; M; H; I \in (AMC'N)$ (2)

Từ (1) và (2) ⇒ N; M; H; I thẳng hàng.

Vậy khi M thay đổi trên cạnh AD thì MH cắt A'B tại điểm cố định I là trung điểm A'B (đpcm).

2/ Đặt : AB = a; AD = b; AA' = c. Khi đó : $AM = \dfrac{b}{2}$.

Xét hình chóp A'.ABM, ta có :

- $V_1 = V_{A'.ABM} = \dfrac{1}{3}.S_{ABM}.AA' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}.a.\dfrac{b}{2}\right).c = \dfrac{abc}{12}$
- $V_{ABCD.A'B'C'D'} = abc$

$\Rightarrow V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{A'.ABM} = abc - \dfrac{abc}{12} = \dfrac{11}{12}abc \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{11}$ (ycbt).

3/ Ta có : $\begin{cases} BM \perp AC \\ AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BM \end{cases} \Rightarrow BM \perp (ACC'A') \Rightarrow \begin{cases} BM \perp AC' \\ A'H \perp BM \end{cases}$

$AB = AA' \Rightarrow \Delta ABM = \Delta AA'M \Rightarrow BM = A'M$

⇒ A'MBN là hình thoi ⇒ $A'B \perp MN$ (hay $MH \perp A'B$)

Mặt khác : $AM \perp (AA'B'B) \Rightarrow A'B \perp AM$.

Nên : $A'B \perp (AMC'N) \Rightarrow A'B \perp AC'$.

Vậy : $\begin{cases} BM \perp AC' \\ A'B \perp AC' \end{cases} \Rightarrow AC' \perp (A'BM)$.

và : $\begin{cases} BM \perp A'H \\ A'B \perp MH \end{cases} \Rightarrow$ H là trực tâm ΔA'BM (đpcm).

Bài 345 (ĐẠI HỌC THỦY SẢN NHA TRANG – 1999)

Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác : ΔABC, ΔA'B'C', ΔACC'. Chứng minh rằng :

1/ (IJK) // (BB'C'C) 2/ (A'JK) // (AIB').

Giải

1/ Gọi M; N; Q lần lượt là trung điểm BC; B'C'; CC'.

Trong hình bình hành AA'NM có :

$\dfrac{A'J}{A'N} = \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{2}{3}$

⇒ IJ // MN ⇒ IJ // (BCC'B')

Trong ΔQAM có : $\dfrac{AK}{AQ} = \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{2}{3}$

⇒ KI // QM ⇒ IK // (BCC'B')

Vậy : (IJK) // (BCC'B') (đpcm).

2/ Ta có : CMB'N là hình bình hành

⇒ CN // B'M

Mà : A'N // AM; nên : (A'CN) // (AMB')

Suy ra : (A'JK) // (AIB') (đpcm).

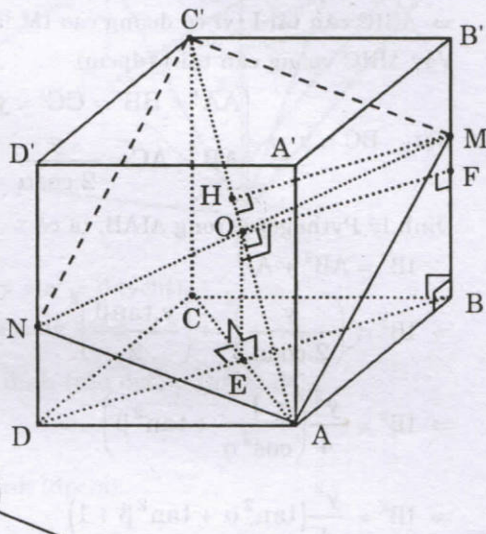
Bài 346 (ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI - CƠ SỞ TP.HCM - 2000)

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

1/ Xác định đường vuông góc chung của cạnh BB' và đường chéo AC'.

2/ Một mặt phẳng (P) đi qua đường chéo AC' cắt BB' và DD' tại M và N. Thiết diện AMC'N là hình gì ? Hãy xác định mặt phẳng (P) để thiết diện AMC'N có diện tích bé nhất và tính diện tích đó.

Giải



1/ Để ý : $\begin{cases} AC' : \text{đường xiên} \\ AC : \text{hình chiếu} \end{cases}$

Mà BB' ⊥ (ABCD) ⊃ AC

$\Rightarrow$ Dựng $\begin{cases} BE \perp AC \text{ tại } E \\ EO \perp (ABCD) \text{ tại } E; O \in AC' \\ OF // BE; F \in BB' \end{cases}$

⇒ OF là đoạn vuông góc chung của BB' và AC' (Độc giả tự chứng minh kiểm tra cách dựng) (ycbt).

Thấy được ngay sau cách dựng :

$$OF = BE = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow d[BB'; AC'] = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ (ycbt)}.$$

2/ Ta có : $\begin{cases} (ABB'A') // (DCC'D') \\ (P) \cap (ABB'A') = AM; (P) \cap (DCC'D') = NC' \end{cases} \Rightarrow AM // NC'$

Tương tự, do : (ADD'A') // (CBB'C') ⇒ AN // MC'

Vậy thiết diện nhận được là hình bình hành AMC'N (ycbt).

Hạ MH ⊥ AC' ta thấy diện tích thiết diện : $S = 2.S_{AMC'} = 2.\frac{1}{2}.AC'.MH$

$$\Rightarrow \quad S = a.\sqrt{3}.MH \quad \Rightarrow \quad \exists\min(S) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\min(MH).$$

Đã có OF là đoạn vuông góc chung của BB' và AC'

$$\Rightarrow \quad OF = \min(d[BB'; AC']) = \min(MH) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \min(S) = a.\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2} \text{ (ycbt)}.$$

Bài 347 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - KHỐI D - 2000)

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác cân đỉnh A, $\widehat{ABC} = \alpha$; BC' hợp với đáy (ABC) góc β. Gọi I là trung điểm của AA'. Biết rằng $\widehat{BIC}$ là góc vuông.

1/ Chứng minh rằng BIC là tam giác vuông cân.

2/ Chứng minh rằng : $\tan^2\alpha + \tan^2\beta = 1$.

Giải

1/ Gọi M là trung điểm cạnh đáy BC của lăng trụ ABC.A'B'C'

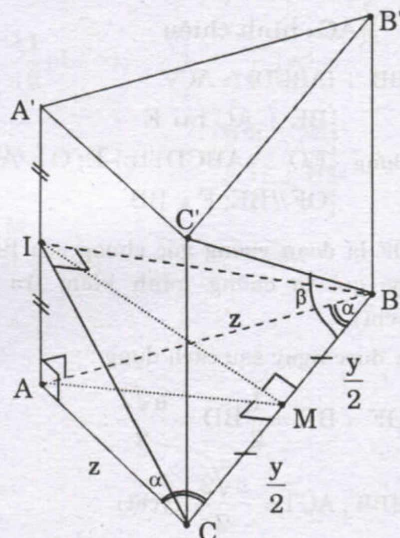
$\Rightarrow$ AM $\perp$ BC (vì ΔABC cân tại A)

Do AA' $\perp$ (ABC) $\Rightarrow$ IM $\perp$ BC (định lý ba đường vuông góc)

$$\left(\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp IA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (IAM)\right)$$

$\Rightarrow$ ΔBIC cân tại I (vì có đường cao IM là trung tuyến).

Vậy ΔBIC vuông cân tại I (đpcm).



2/ Đặt BC = y $\Rightarrow \begin{cases} AA' = BB' = CC' = y.\tan\beta \\ AB = AC = \dfrac{y}{2.\cos\alpha} \end{cases}$

Định lý Pythagore trong ΔIAB, ta có :

$IB^2 = AB^2 + AI^2$

$$\Rightarrow IB^2 = \left(\frac{y}{2.\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y.\tan\beta}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow IB^2 = \frac{y^2}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \tan^2\beta\right)$$

$$\Rightarrow IB^2 = \frac{y^2}{4}\left(\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1\right) \qquad (1)$$

Mặt khác, từ ΔIBC vuông cân tại I, ta có :

$$2BI^2 = BC^2 \Rightarrow BI^2 = \frac{BC^2}{2} = \frac{y^2}{2} \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{y^2}{4}(\tan^2\alpha + \tan^2\beta + 1) = \dfrac{y^2}{2}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha + \tan^2\beta = 1$ (đpcm).

Bài 348 (TT ĐÀO TẠO VÀ BỒI DƯỠNG CÁN BỘ Y TẾ TP.HCM – 2000)

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều ABC cạnh a. Lấy trên BB' và CC' các đoạn BM = x; CN = y.

1/ Chứng minh rằng tam giác AMN chỉ có thể vuông ở M hay N. Tìm hệ thức giữa x và y để tam giác AMN vuông ở M.

2/ Chứng minh rằng nếu x = 2y thì mặt phẳng (AMN) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

3/ Gọi I là trung điểm của đoạn AA' và α là góc của hai mặt phẳng (BIC') và (ABC). Tính cạnh bên AA' theo a và α.

Giải

1/ Lăng trụ ABC.A'B'C' $\Rightarrow \begin{cases} \Delta ABM \ (\hat{B} = 90^0) \\ \Delta ACN \ (\hat{C} = 90^0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = a^2 + x^2 \ (1) \\ AN^2 = a^2 + y^2 \ (2) \end{cases}$

Hạ DN $\perp$ BB' tại D

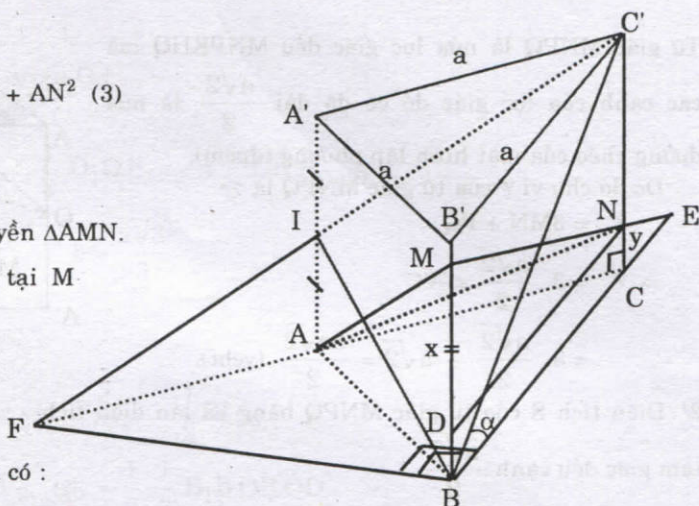
$\Rightarrow \Delta MDN$ ($\hat{D} = 90^0$)

$\Rightarrow MN^2 = a^2 + (x - y)^2 = AM^2 + AN^2$ (3)

Từ $\begin{cases}(1);(3) \Rightarrow MN \leqslant AM \\ (2);(3) \Rightarrow MN \leqslant AN\end{cases}$

$\Rightarrow$ MN không thể là cạnh huyền ΔAMN.

$\Rightarrow \Delta AMN$ chỉ có thể vuông tại M hoặc N (đpcm).



2/ Giả sử ΔAMN vuông tại M, ta có :

$AM^2 + MN^2 = AN^2$

$\Leftrightarrow (a^2 + x^2) + a^2 + (x - y)^2 = a^2 + y^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2xy + a^2 = 0$ (ycbt).

Gọi E = BC $\cap$ MN,do hai cạnh bên lăng trụ luôn song song

$\Rightarrow \dfrac{EC}{EB} = \dfrac{NC}{MB} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{2y} \Leftrightarrow \dfrac{EC}{EB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ E cố định trên đường thẳng BC.

Để ý thấy : (AMN) $\ni$ A (cố định).

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (AMN) qua đường thẳng AE cố định (đpcm).

3/ Gọi F = IC' $\cap$ AC $\Rightarrow$ BF = (BIC') $\cap$ (ABC).

Để ý thấy : $\begin{cases} IA \,//\, CC' \\ IA = \dfrac{1}{2}CC' \end{cases} \Rightarrow FA = AC = AB$

$\Rightarrow \Delta FBC$ vuông ở B ($FB \perp BC$) (4)

Theo định lý ba đường vuông góc $\Rightarrow$ $C'B \perp FB$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow$ $\alpha = \widehat{C'BC} = [(BIC'); (ABC)]$

Ta có : $\tan\alpha = \dfrac{CC'}{BC} = \dfrac{AA'}{a} \Rightarrow AA' = a.\tan\alpha$ (ycbt).

Bài 349 (HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ – KHỐI D – 2000)

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với cạnh a. Giả sử M; N; P; Q lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D'; D'C'; CC'; AA'.

1/ Chứng minh rằng bốn điểm M; N; P; Q cùng nằm trên một mặt phẳng. Tính chu vi của tứ giác MNPQ theo a.

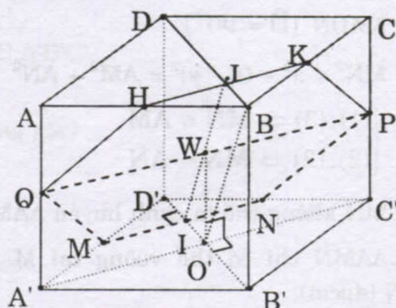
2/ Tính diện tích của tứ giác MNPQ theo a.

Giải

1/ Để ý thấy $\begin{cases} PQ \,//\!= A'C' \\ MN \,//\!= \dfrac{1}{2}A'C' \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

$\Rightarrow$ M, N, P, Q cùng nằm trên một mặt phẳng.

Tứ giác MNPQ là nửa lục giác đều MNPKHQ mà các cạnh của lục giác đó có độ dài $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ là nửa đường chéo của mặt hình lập phương (đpcm).

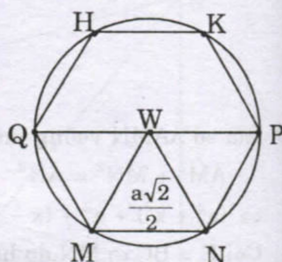


Do đó chu vi $\mathscr{C}$ của tứ giác MNPQ là :

$$\mathscr{C} = 3MN + PQ$$

$$\Rightarrow \mathscr{C} = 3.\frac{a\sqrt{2}}{2} + A'C'$$

$$= 3.\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2} \text{ (ycbt).}$$



2/ Diện tích S của tứ giác MNPQ bằng ba lần diện tích tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\Rightarrow S = 3.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8} \text{ (ycbt).}$$

✪ **Ghi chú₁ :** *Độc giả có thể xem cách giải khác của cả bài toán bằng HHGT trong sách* ***TUYỂN TẬP 500 BÀI TOÁN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH*** *của cùng nhóm tác giả.*

✪ **Ghi chú₂ :** *Độc giả có thể giải* ***Câu 2*** *của Bài toán này bằng cách sử dụng diện tích và hình chiếu* $S_{MNPQ}.\cos\varphi = S_{A'MNC'}$

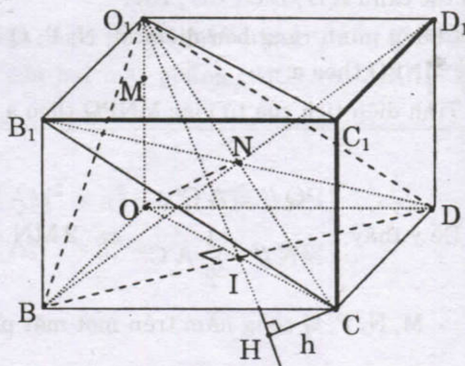
Trong đó : $\begin{cases} S_{A'MNC'} = \frac{3}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}a^2 \\ \tan\varphi = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{8} \text{ (ycbt).}$$

Bài 350 (ĐẠI HỌC Y THÁI BÌNH – 2000)

Cho hình lập phương $OBCD.O_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.
1/ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng O_1B và B_1C.
2/ N là trung điểm của BD_1. Tính thể tích hình chóp $ONBB_1$.
3/ M là một điểm bất kỳ thuộc OO_1. Chứng minh rằng tỷ số thể tích hình chóp $MBCC_1B_1$ và hình lăng trụ $OCBO_1C_1B_1$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

Giải



1/ Để tìm $d[O_1B; B_1C]$, ta dựng $(\alpha) \equiv (O_1BD)$:

$\begin{cases} O_1D \subset (\alpha) \\ B_1C \,//\, (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow d[O_1B; B_1C] = d[C; (O_1BD)] = h$

Ta có : $\begin{cases} BD \perp OC \subset (O_1OC): \text{tại I} \\ BD \perp OO_1 \subset (O_1OC) \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (O_1OC)$

$\Rightarrow (O_1BD) \perp (O_1OC)$ theo giao tuyến O_1I

Hạ $CH \perp O_1I$ tại H, thì CH = h.

Xét : $V_{O_1.BCD} = V_{C.O_1BD} \Leftrightarrow \frac{1}{3}.O_1O.S_{BCD} = \frac{1}{3}.CH.S_{O_1BD}$

$$\Leftrightarrow a.\frac{a^2}{2} = h.\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy : $d[O_1B; B_1C] = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (ycbt).

2/ Để ý N là tâm hình lập phương và : $S_{BNB_1} = \frac{1}{2}S_{BDB_1}$

$$\Rightarrow V_{O.BNB_1} = \frac{1}{2}V_{O.BDB_1} = \frac{1}{2}V_{B_1.OBD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{6}.B_1B.OB.OD$$

$\Rightarrow V_{O.BNB_1} = \frac{a^3}{12}$ (ycbt).

3/ Xét : $V_{M.BCC_1B_1} = V_{O_1.BCC_1B_1}$ (cùng đáy và chiều cao $O_1B_1 = a$)

$$\Rightarrow V_{M.BCC_1B_1} = \frac{1}{3}.O_1B_1.S_{BCC_1B_1} = \frac{1}{3}.a.a^2 = \frac{a^3}{3} \quad (1)$$

Mặt khác : $V_{OBC.O_1C_1B_1} = O_1O.S_{O_1C_1B_1} = a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{2}$ (2)

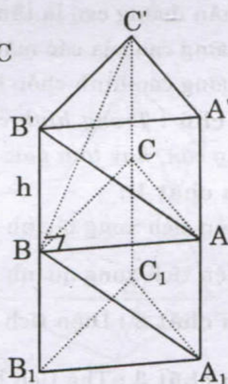
Từ (1) và (2), cho ta tỷ số thể tích ở giả thiết không phụ thuộc M như sau :

$$\frac{V_{M.BCC_1B_1}}{V_{OCB.O_1C_1B_1}} = \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{a^3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ (đpcm).}$$

Bài 351 (ĐẠI HỌC XÂY DỰNG VÀ LUẬT HÀ NỘI – 2000)

Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có chiều cao bằng h và hai đường thẳng AB', BC' vuông góc nhau. Tìm thể tích lăng trụ đó.

Giải



Kéo dài lăng trụ ABC.A'B'C' thêm một lăng trụ $A_1B_1C_1.ABC$ bằng lăng trụ đã cho ⇒ Tam giác A_1BC' vuông tại B.

Giả sử cạnh đáy lăng trụ bằng a.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \Delta ABB' \Rightarrow AB'^2 = a^2 + h^2 \\ \Delta A_1BC' \Rightarrow 2A_1B^2 = a^2 + (2h)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2h^2$$

Thể tích lăng trụ là : $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}h = \frac{h^3\sqrt{3}}{2}$ (ycbt).

ĐỀ TƯƠNG TỰ

Bài 352 (ĐẠI HỌC AN NINH – CẢNH SÁT – KHỐI A – 1997)

Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D', α là góc phẳng của nhị diện (B', CD, B).

a/ Xác định α và chứng tỏ $S_{ABCD} = S_{AB'CD}.\cos\alpha$.

b/ Cho AA' = a và B'D tạo với đáy góc β, tạo với mặt bên BCC'B' góc γ. Tính thể tích hình hộp.

Hướng dẫn

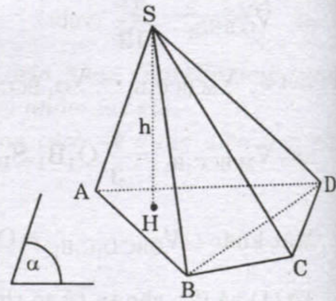
a/ $\widehat{B'CB} = \alpha \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}B'C.CD.\cos\alpha = S_{AB'CD}.\cos\alpha$ (vì ΔB'BC cho BC = B'Ccosα)

b/ $V = \frac{a^3\cos\tan\alpha\tan\gamma}{\sin\alpha}$.

Chuyên đề 16 : HÌNH CHÓP – HÌNH CHÓP CỤT

Loại 1 : HÌNH CHÓP

I. GIẢN LƯỢC KIẾN THỨC TỐI THIỂU

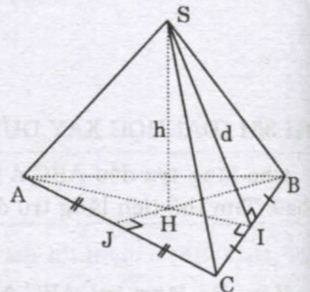


❒ **$ĐN_1$: Hình chóp là một khối đa diện lồi có một mặt là đa giác gọi là đáy, nằm trong mặt (α).**
Các mặt còn lại là các tam giác có chung một đỉnh (gọi là các mặt bên, đỉnh thường ký hiệu là S).

❒ **$ĐN_2$: Đường cao hình chóp S là d = [S; (α)].**

❒ **$ĐN_3$: Mặt chéo của hình chóp là mặt phẳng đi qua hai cạnh bên không liên tiếp nhau.**

- Ta thường phân loại hình chóp theo hình dạng của đáy và số cạnh của đáy (nếu đáy hình là một n – giác thì ta gọi đó là hình chóp n – giác).
- Ta ký hiệu một hình chóp n – giác như sau :
  $S.A_1.A_2.A_3...A_n$ với $A_1A_2A_3...A_n$ là tên gọi của đa giác đáy.



❒ **$ĐN_4$: Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và tất cả các cạnh bên bằng nhau.**

♦ **HÌNH CHÓP ĐỀU CÓ CÁC TÍNH CHẤT SAU :**

➢ Các mặt bên là tam giác cân.

➢ Chân đường cao là tâm của đáy.

➢ Đường cao của các mặt bên gọi là trung đoạn d.

➢ Đường cao hình chóp là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đều ở đáy.

✪ **Ghi chú :** *Trong hình chóp đều mặt chéo, mặt bên có thể là tam giác cân, hay tam giác vuông cân, hay tam giác đều.*

- **Tính chất 1 :**
  ➢ Diện tích xung quanh hình chóp : S_{xq} = (Tổng diện tích các mặt bên)
  ➢ Diện tích xung quanh hình chóp đều : $S_{xq} = \mathscr{C}.d$
- **Tính chất 2 :** Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + \mathscr{B}$
- **Tính chất 3 :** Thể tích hình chóp $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}.h$

II. CÁC BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 353

Cho hình chóp tam giác SABC. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA; SB; SC lần lượt tại A'; B'; C' và cắt SG tại G'. Chứng minh : $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}$.

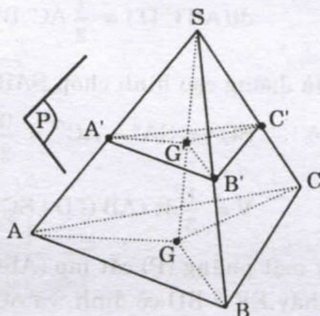
Giải

Gọi V là thể tích hình chóp S.ABC. Ta có :

$$S_{\Delta AGB}=S_{\Delta BGC}=S_{\Delta CGA}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\Rightarrow V_{SAGB}=V_{SBGC}=V_{SCGA}=\frac{1}{3}V$$

Áp dụng định lý tỷ số thể tích hai tứ diện ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{V_{SA'G'B'}}{V_{SAGB}}=\dfrac{3V_{SA'G'B'}}{V}=\dfrac{SA'.SB'.SG'}{SA.SB.SG} & (1)\\[2mm] \dfrac{V_{SB'G'C'}}{V_{SBGC}}=\dfrac{3V_{SB'G'C'}}{V}=\dfrac{SB'.SC'.SG'}{SB.SC.SG} & (2)\\[2mm] \dfrac{V_{SC'G'A'}}{V_{SCGA}}=\dfrac{3V_{SC'G'A'}}{V}=\dfrac{SC'.SA'.SG'}{SC.SA.SG} & (3)\end{cases}$$



Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta được :

$$\frac{3V_{SA'B'C'}}{V}=\frac{SG'}{SG}\left(\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}+\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}+\frac{SC'}{SC}.\frac{SA'}{SA}\right)\quad(4)$$

Ta lại có : $\frac{V_{SA'B'C'}}{V}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$ (5)

Từ (4) và (5) ta được : $\frac{SG'}{SG}\left(\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}+\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}+\frac{SC'}{SC}.\frac{SA'}{SA}\right)=3\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$

$$\Leftrightarrow\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}\left(\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}+\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}+\frac{SC'}{SC}.\frac{SA'}{SA}\right)=3\frac{SG}{SG'}\quad(6)$$

Thực hiện phép nhân phân phối, thì : $\overset{(6)}{\Leftrightarrow}\frac{SC}{SC'}+\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}=3\frac{SG}{SG'}$ (đpcm).

Bài 354

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy a, đường cao h. Một mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc với SC, cắt SA; SB; SC; SD theo thứ tự tại A'; B'; C'; D'.

a/ h phải thỏa mãn điền kiện gì để C' không vượt ra ngoài đoạn SC ? Khi đó hãy tính diện tích thiết diện AB'C'D'.

b/ Tìm thể tích hình chóp SAB'C'D'.

c/ Chứng minh ΔB'C'D' luôn luôn là một tam giác có góc tù.

Giải

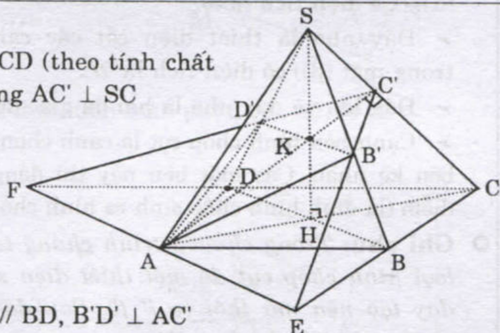
Kẻ đường cao SH thì H là tâm hình vuông ABCD (theo tính chất hình chóp đều), và ΔSAC cân đỉnh S, theo cách dựng AC' ⊥ SC

a/ Điều kiện để C' ∈ SC là $\widehat{ASC}<1v$

$\Leftrightarrow AC^2<SA^2+SC^2\Leftrightarrow AC^2<2SA^2$

$\Leftrightarrow AC^2<2(SH^2+AH^2)$

$\Leftrightarrow 2a^2<2(h^2+\frac{a^2}{2})\Leftrightarrow h>\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (ycbt).



Do tính đối xứng : K là trực tâm ΔSAC và B'D' // BD, B'D' ⊥ AC'

Trong ΔSAC ⇒ AC'.SC = SH.AC (= 2dt ΔSAC)

Áp dụng định lý Pitago vào trong tam giác vuông SHC

$$\Rightarrow SC = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2} \Rightarrow AC' = \frac{SH.AC}{SC} = \frac{2ha}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}$$

Để ý : $\Delta SHC \backsim \Delta AHK \Rightarrow \frac{SH}{AH} = \frac{HC}{HK} \Leftrightarrow SH.HK = HA.HC$

$$\Leftrightarrow h(SH - SK) = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow SK = \frac{2h^2 - a^2}{2h}$$

Do $B'D' \,//\, BD \Rightarrow \frac{B'D'}{BD} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow B'D' = \frac{SK}{SH}.BD = \frac{a(2h^2 - a^2)\sqrt{2}}{2h^2}$

$$dt(AB'C'D') = \frac{1}{2}AC'.B'D' = \frac{a^2(2h^2 - a^2)\sqrt{2}}{2h\sqrt{a^2 + 2h^2}} \text{ (ycbt).}$$

b/ SC' là đường cao hình chóp SAB'C'D'

Ta có : $SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = \frac{(2h^2 - a^2)^2}{2(2h^2 + a^2)}$

$$V = \frac{1}{3}dt\,(AB'C'D').SC' = \frac{a^2(2h^2 - a^2)^2}{6h(2h^2 + a^2)} \text{ (ycbt).}$$

c/ Để ý mặt phẳng (P) cắt mp (ABCD) theo giao tuyến EF qua A.
Dễ thấy EF // BD cố định, và ΔCEF là tam giác vuông cân đỉnh C.
$\Rightarrow AE = AF = AC = a\sqrt{2}$

Xét tam giác vuông AC'E ($\hat{A} = 90^0$) $\Rightarrow \sin\widehat{AC'E} = \frac{AE}{C'E}$

Xét tam giác vuông cân ACE ($\hat{A} = 90^0$) $\Rightarrow \sin\widehat{ACE} = \sin 45^0 = \frac{AE}{CE}$

Xét tam giác vuông EC'C ($\hat{C} = 90^0$) $\Rightarrow EC' < EC \Rightarrow \frac{AE}{C'E} > \frac{AE}{CE}$

$\Rightarrow \sin\widehat{AC'E} > \sin 45^0 \Rightarrow \widehat{AC'E} > 45^0 \Leftrightarrow \widehat{EC'F} > 90^0$ (đpcm).

Loại 2 : HÌNH CHÓP CỤT

I. GIẢN LƯỢC KIẾN THỨC TỐI THIỂU

❐ **ĐN$_1$: Hình chóp cụt là một phần của hình chóp nằm giữa đáy (α) và một thiết diện (β) cắt tất cả các cạnh bên.**

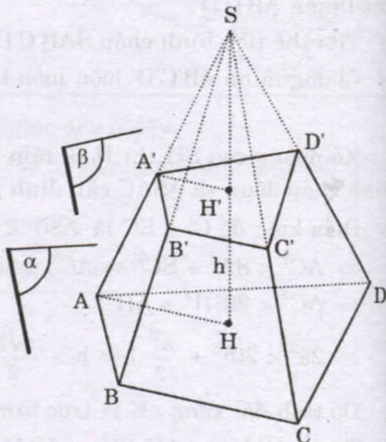
◆ TỪ ĐỊNH NGHĨA TRÊN TA CÓ :

➢ Đáy lớn là đáy của hình chóp (nằm trong mặt (α)). Có diện tích là $\mathcal{B}$.

➢ Đáy nhỏ là thiết diện cắt các cạnh bên (nằm trong mặt (β)) có diện tích là $\mathcal{B}'$.

➢ Đáy lớn và đáy nhỏ là hai đa giác đồng dạng.

➢ Cạnh bên hình chóp cụt là cạnh chung của hai mặt bên kề nhau. Các mặt bên này thì đồng quy tại một điểm (là đỉnh hình chóp sinh ra hình chóp cụt đó).



✪ **Ghi chú:** *Trong chương trình chúng ta chỉ xét một loại hình chóp cụt do một thiết diện song song với đáy tạo nên mà thôi (α // β). Sau đây là các tính chất của hình chóp cụt đó.*

❒ **$ĐN_2$: Đường cao hình chóp cụt h = d[(α); (β)].**

Tùy theo hình dạng đa giác đáy ta có hình chóp cụt tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... ta thường ký hiệu hình chóp là ABCDE.A'B'C'D'E'...

❒ **$ĐN_3$: Hình chóp cụt đều là hình chóp được cắt ra từ hình chóp đều.**

➢ Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đều đồng dạng nhau.

➢ Các mặt bên là những hình thang cân bằng nhau.

➢ Trung đoạn d của hình chóp đều là đoạn nối hai trung điểm hai cạnh đáy ở hình thang cân của mặt bên tùy ý.

➢ Đường cao h của hình chóp cụt đều là đoạn nối tâm của hai đa giác đều ở hai đáy.

• **Tính chất 1 :** Diện tích xung quanh.

➢ Hình chóp cụt : S_{tp} = (tổng diện tích các mặt bên)

➢ Hình chóp cụt đều : $S_{xq} = \frac{1}{2}(\mathscr{C} + \mathscr{C}')d$

$\mathscr{C}, \mathscr{C}$ là chu vi hai đáy, d là trung đoạn.

• **Tính chất 2 :** Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + \mathscr{B} + \mathscr{B}'$

• **Tính chất 3 :** Thể tích hình chóp cụt $V = \frac{h}{3}(\mathscr{B} + \sqrt{\mathscr{B}\mathscr{B}'} + \mathscr{B}')$

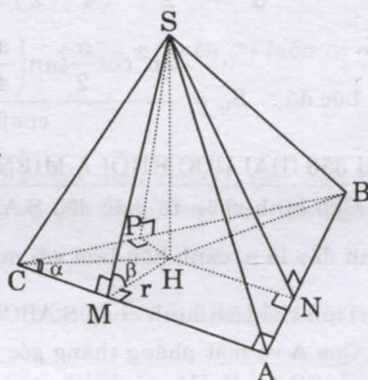
II. GIẢI TOÁN THI

Bài 355 (ĐẠI HỌC MIỀN BẮC – 1970)

Một tam giác ABC vuông góc ở A, có bán kính của đường tròn nội tiếp là r và $\hat{C} = \alpha$. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp mà đáy là tam giác ABC, biết rằng cả ba mặt xung quanh của hình chóp đều tạo với mặt phẳng đáy những góc bằng β.

Giải

Xét hình chóp S.ABC có đáy là ΔABC vuông ở A, các mặt bên tạo với đáy những góc bằng β, SH là đường cao của hình chóp.



Từ H hạ các đường vuông góc HM, HN, HP lần lượt xuống AC, AB và BC.

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} = \beta \\ MH = NH = PH \end{cases}$$

⇒ H trùng với tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC.

⇒ MH = NH = PH = r và SH = rtanβ.

Gọi V là thể tích của hình chóp S.ABC và S_{tp} là diện tích toàn phần của nó, ta có :

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH$$

$$S_{tp} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC}$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S_{\Delta ABC} + \frac{1}{\cos\beta}S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABC}\left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right) = 2\,S_{\Delta ABC}.\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}.$$

Xét riêng $\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} AM = AN = r \\ MC = r.\cot\dfrac{\alpha}{2} \\ NB = r\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = r\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow AC = AM + MC = r + r\cot\dfrac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow AC = r\left(1 + \cot\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{r\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

Tương tự :

$$AB = AN + NB = r + r\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = r\left[1 + \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}\right)\right] = \frac{r\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Vậy : $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AC.AB.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}\dfrac{r\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.\dfrac{r\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}.r\tan\beta$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}r^3\cot\dfrac{\alpha}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\tan\beta$ (ycbt)

Lúc đó : $S_{tp} = \dfrac{2r^2\cot\dfrac{\alpha}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\dfrac{\beta}{2}}{\cos\beta}$ (ycbt).

Bài 356 (ĐẠI HỌC KHỐI A MIỀN BẮC – 1972)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD (tức là SA = SB = SC = SD và ABCD là hình vuông), cạnh đáy là a, cạnh bên làm với mặt đáy góc α ($\alpha > \dfrac{\pi}{4}$).

a/ Tính thể tích hình chóp S.ABCD theo a và α.

b/ Qua A vẽ mặt phẳng thẳng góc với cạnh bên đối diện SC tại M. Mặt phẳng đó cắt SB tại N và cắt SD tại P. Hãy tính diện tích thiết diện ANMP.

Giải

a/ Xét S.ABCD là hình chóp tứ giác đều.

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$ với H là tâm hình vuông ABCD.

$\Rightarrow SH = AH\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\alpha.$

Vậy thể tích V hình chóp S.ABCD bằng :

$$V = \frac{1}{3}S(ABCD).SH$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\alpha = \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}\tan\alpha \text{ (ycbt).}$$

b/ Độc giả tự dựng được thiết diện và chứng minh được thiết diện là tứ giác ANMP có hai đường chéo $AM \perp NP$ tại H', với H' là trung điểm NP và $H' \in SH$.

Diện tích S của thiết diện ANMP bằng :

$$S = \frac{1}{2}AM.NP \qquad (1)$$

Xét ΔAMC có : $\widehat{MAC} = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $AM = AC\sin\alpha = a\sqrt{2}\sin\alpha$

Xét $\Delta AH'H \Rightarrow HH' = AH\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\alpha$

$$\Rightarrow SH' = SH - HH' = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\alpha - \frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\alpha$$

$$\Rightarrow SH' = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\tan\alpha - \cot\alpha) = -\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

Xét $\Delta SH'N \Rightarrow NP = 2NH' = 2SH'\cot\alpha$

$$\Rightarrow NP = 2\left(-\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right)\cot\alpha = -\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

Vậy : $S = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\sin\alpha\left(-\frac{a\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = -\frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$ (*) (ycbt).

✪ Ghi chú : *Do giả thiết : $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \Leftrightarrow -1 < \cos 2\alpha < 0$ nên (*) luôn có dấu "-" là hoàn toàn chính xác.*

Bài 357 (ĐẠI HỌC KHỐI B – MIỀN BẮC – 1974)

Cho một hình chóp S.ABCD có đáy là một hình chữ nhật với diện tích Q. Các mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với đáy, còn các mặt bên (SBC) và (SCD) tạo với đáy lần lượt là góc α, β.

a/ Tính thể tích hình chóp theo Q, α, β.

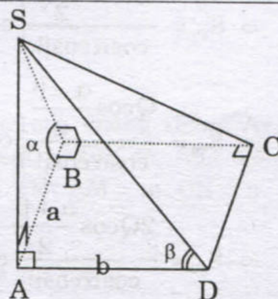
b/ Tính diện tích xung quanh của hình chóp theo Q, α, β và biến đổi kết quả thành biểu thức tính được bằng logarith.

Giải

a/ Ta có : $\begin{cases}(SAB) \text{ và } (SAD) \perp (ABCD)\\(SAB) \cap (SAD) = SA\end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

Từ $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$ (định lý ba đường vuông góc).

$$\Rightarrow \widehat{SDA} = \beta.$$



Gọi các cạnh của hình chữ nhật đáy là

AB = a; AD = b; h = SA

Q = ab

$$\left.\begin{aligned} h &= a\tan\alpha \\ h &= b\tan\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow a\tan\alpha = b\tan\beta \quad \Rightarrow b = a\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

$$\Rightarrow Q = ab = a.a\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = a^2\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{Q.\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}\ ;\ h = a\tan\alpha = \sqrt{Q\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}.\tan\alpha = \sqrt{Q.\tan\alpha.\tan\beta}$$

Như vậy : $V = \frac{1}{3}Q.h = \frac{1}{3}Q\sqrt{Q\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{3}\sqrt{Q^3\tan\alpha\tan\beta}$ (ycbt).

b/ Xét : $S_{xq} = dt(\Delta SAB) + dt(\Delta SAD) + dt(\Delta SBC) + dt(\Delta SDC)$

Trong đó :

$$dt(\Delta SAB) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\sqrt{Q\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}.\sqrt{Q.\tan\alpha.\tan\beta} = \frac{1}{2}Q\tan\beta$$

$$dt(\Delta SAD) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\left(\sqrt{Q\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}.\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right)\sqrt{Q\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{2}Q\tan\alpha$$

$$dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2}b.SB = \frac{1}{2}\left(a.\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right).\frac{h}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{Q\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}.\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right).\frac{\sqrt{Q\tan\alpha\tan\beta}}{\sin\alpha} = \frac{Q}{2\cos\alpha}.$$

$$dt(\Delta SDC) = \frac{1}{2}a.SD = \frac{1}{2}a.\frac{h}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{Q\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}}.\frac{\sqrt{Q\tan\alpha\tan\beta}}{\sin\beta} = \frac{Q}{2\cos\beta}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{1}{2}Q\tan\beta + \frac{1}{2}Q\tan\alpha + \frac{1}{2}\frac{Q}{\cos\alpha} + \frac{1}{2}\frac{Q}{\cos\beta}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{1}{2}Q\left(\tan\beta + \tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}\right) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\right)$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{1}{2}\frac{Q}{\cos\alpha\cos\beta}[\cos\alpha + \cos\beta + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{1}{2}\frac{Q}{\cos\alpha\cos\beta}\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{Q\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{Q\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \frac{2Q\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ (ycbt).}$$

Bài 358 (ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI – 1994)

Cho hình chóp S.ABCD, B và D luôn nhìn AC dưới một góc vuông; SA = a và SA vuông góc với đáy ABCD. Mặt phẳng (Q) qua A, vuông góc với SC và cắt SB, SC, SD tại B'; C'; D'.

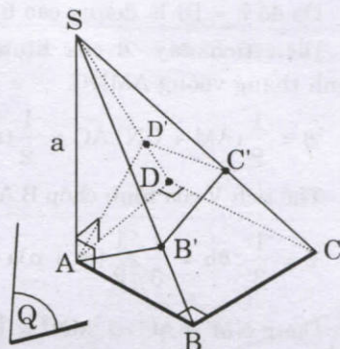
1/ Chứng minh rằng tứ giác AB'C'D' nội tiếp được trong một đường tròn.

2/ Cho AC = b; AB = AD = x (x thay đổi).

a/ Tìm diện tích của tứ giác AB'C'D' theo a; b; x.

b/ Tìm x để tứ giác AB'C'D' là hình vuông.

Giải



1/ Ta có : $(Q) \perp SC \Rightarrow SC \perp AB'$ (1)

Theo giả thiết : $BC \perp AB$, $SA \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $AB' \perp (SBC)$.

Vậy $AB' \perp B'C' \subset (SBC)$

Tương tự ta có : $AD' \perp D'C' \subset (SCD)$

$\Rightarrow$ B' và D' nhìn AC' dưới một góc vuông nên tứ giác AB'C'D' nội tiếp trong một đường tròn (đpcm).

2a/ Khi AB = AD = x thì diện tích S của AB'C'D' là:

$S = AB'.B'C'$

$$\text{Với : } \begin{cases} AB' = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ AC' = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ B'C' = \sqrt{AC'^2 - AB'^2} = \dfrac{a^2\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + x^2)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{a^3x\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}.(a^2 + x^2)} \text{ (ycbt).}$$

b/ Tứ giác AB'C'D' là hình bình vuông khi AB' = B'C', tức là :

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a^2\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{a^2 + x^2}} \Leftrightarrow x\sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{b^2 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow (2a^2 + b^2)x^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow x = \frac{ab}{\sqrt{2a^2 + b^2}} \text{ (ycbt).}$$

Bài 359 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – KHỐI D – 1997)

Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm I (A đối diện với C). Các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và ở cùng một phía đối với mặt phẳng đó. Cho điểm M không trùng với A trên Ax, cho điểm N không trùng với C trên Cy. Đặt AM = m, CN = n.

1/ Tính thể tích của hình chóp B.AMNC (đỉnh B, đáy AMNC).

2/ Tính MN theo a, m, n và tìm điều kiện đối với a, m, n để $\widehat{MIN}$ là góc vuông.

Giải

1/ Xét giả thiết AM ⊥ (ABC)

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{MI : đường xiên} \\ \text{AI : hình chiếu} \end{cases}$$

Mà : AI ⊥ BI (ABCD là hình vuông)

⇒ MI ⊥ BI (định lý ba đường vuông góc)

⇒BI ⊥ (AMNC)

Do đó h = BI là đường cao hình chóp B.AMNC

Diện tích đáy $\mathcal{B}$ của hình chóp B.AMNC là hình thang vuông AMNC.

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}(AM + CN).AC = \frac{1}{2}(m + n)a\sqrt{2}$$

Thể tích V của hình chóp B.AMNC là :

$$V = \frac{1}{3}.\mathcal{B}h = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(m+n)a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{(m+n)a^2}{6} \text{ (ycbt).}$$

2/ Dựng NM' // AC ⇒ $MN^2 = (|m-n|)^2 + (a\sqrt{2})^2$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(m-n)^2 + 2a^2} \text{ (ycbt).}$$

ΔMIN vuông tại I khi và chỉ khi : $MN^2 = MI^2 + IN^2$

$$\Leftrightarrow (m-n)^2 + 2a^2 = m^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + n^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2mn + n^2 + 2a^2 = m^2 + \frac{1}{2}a^2 + n^2 + \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow a^2 = 2mn \text{ (ycbt).}$$

Bài 360 (ĐẠI HỌC DÂN LẬP ĐÔNG ĐÔ - 1999)

Xét hình chóp tam giác đều S.ABC, cạnh của tam giác đều ABC bằng a và gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với đường thẳng BC và vuông góc với mặt phẳng SBC thì góc giữa (P) và mặt phẳng đáy bằng α. Tính thể tích hình chóp theo a và α.

Giải

Gọi : B'C' = (P) ∩ (SBC) ⇒ $\begin{cases} BC \,//\, (P) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$ ⇒ BC // B'C'

Gọi : $\begin{cases} \text{M là trung điểm BC} \\ N = SM \cap B'C' \end{cases}$

Khi đó : BC ⊥ (SAM) ⇒ AN ⊥ BC

Mà : AM ⊥ BC ⇒ $\widehat{NAM}$ = α là góc tạo bởi (P) và đáy.

Gọi O là tâm tam giác đều ABC.

Thì thấy N; O nhìn SA dưới một góc vuông.

⇒ SAON là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính SA.

Do đó: $\widehat{OSN}$ = α

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{OM}{SO} \Rightarrow SO = \frac{1}{3}.AM.\cot g\alpha$$

Khi đó : $V_{SABC} = \frac{1}{6}.SO.AM.BC = \frac{1}{6}.\frac{1}{3}\cot\alpha.AM^2.BC$

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{18}.\cot\alpha.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.a = \frac{1}{24}a^3\cot\alpha \text{ (ycbt)}.$$

Bài 361 (ĐẠI HỌC DÂN LẬP LẠC HỒNG – 1998)

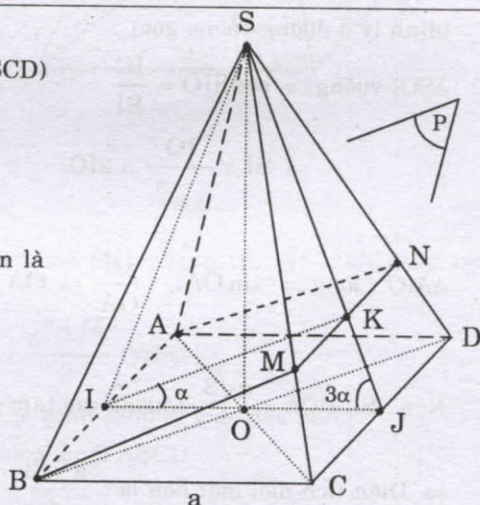
Cho một hình chóp tứ giác đều có các mặt bên hợp với đáy góc 3α và có cạnh đáy bằng a. Dựng mặt phẳng (P) đi qua một cạnh đáy hợp với đáy một góc α.

1/ Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp là hình gì ?

2/ Tính diện tích thiết diện theo α và a.

3/ Tính thể tích hình chóp theo α và a.

Giải



1/ Giả sử mặt phẳng (P) qua AB, cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến MN.

Ta có : AB // CD $\Rightarrow$ AB // MN // CD

Mặt khác : $\Delta SAD = \Delta SBC$

$\Rightarrow$ AN = BM

Vậy mặt phẳng (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang cân ABMN (ycbt).

2/ Áp dụng định lý hàm sin ta có :

- $\frac{IK}{\sin 3\alpha} = \frac{IJ}{\sin(\pi - 4\alpha)}$

$\Rightarrow IK = \frac{a\sin 3\alpha}{\sin 4\alpha}$

- $\frac{SK}{\sin(3\alpha - \alpha)} = \frac{SI}{\sin(3\alpha + \alpha)} \Rightarrow \frac{SK}{SI} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{SK}{SJ}$ (vì SI = SJ)

Mặt khác : MN // CD $\Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{SK}{SJ}$

$\Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{MN}{CD} \Rightarrow MN = \frac{a.\sin 2\alpha}{\sin 4\alpha}$

Lúc đó diện tích thiết diện là :

$$S_{ABMN} = \frac{1}{2}IK(AB + MN) = \frac{a^2\sin^2 3\alpha.\cos\alpha}{\sin^2 4\alpha} \text{ (ycbt)}.$$

3/ ΔSOJ vuông tại O $\Rightarrow \tan 3\alpha = \frac{SO}{OJ} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}\tan 3\alpha$

Vậy thể tích hình chóp là : $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{6}a^3\tan 3\alpha$ (ycbt).

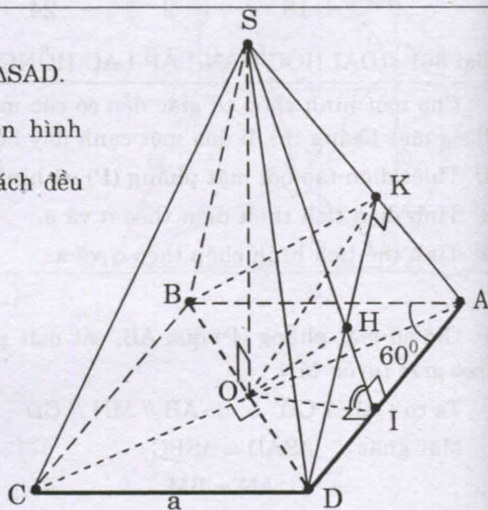
Bài 362 (ĐẠI HỌC VĂN LANG – KHỐI B, D – 1998)

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\widehat{A} = 60^0$. Các mặt bên hợp với đáy góc 60^0.

1/ Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

2/ Gọi O là tâm của đáy ABCD, H là trực tâm của tam giác SAD. Chứng minh rằng OH vuông góc với mặt bên (SAD).

Giải



1/ Gọi I; K là chân đường cao kẻ từ S và D trong ΔSAD.

Ta có : các mặt bên hợp với đáy góc $\frac{\pi}{3}$, nên hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy sẽ cách đều các cạnh đáy.

Suy ra : $SO \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp AD$

(định lý 3 dường vuông góc)

ΔSOI vuông $\Rightarrow \cos\widehat{SIO} = \dfrac{IO}{SI}$

$$\Rightarrow SI = \dfrac{IO}{\cos\dfrac{\pi}{3}} = 2IO.$$

ΔAIO vuông $\Rightarrow \sin\widehat{OAI} = \dfrac{OI}{OA} \Rightarrow OA = \dfrac{OI}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = 2OI.$

Nên : $SI = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều)

$\Rightarrow$ Diện tích mỗi mặt bên là : $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$ Diện tích đáy : $\dfrac{1}{2}BD.AC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy : $S_{tp} = 4.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

2/ Ta có : $AD \perp (SOI) \Rightarrow OH \perp AD$ (1)

Mặt khác : $\begin{cases} BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA \\ DK \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BKD)$

$\Rightarrow OH \perp SA \subset (SAD)$ (2)

Từ (1) và (2) : $OH \perp (SAD)$ (đpcm).

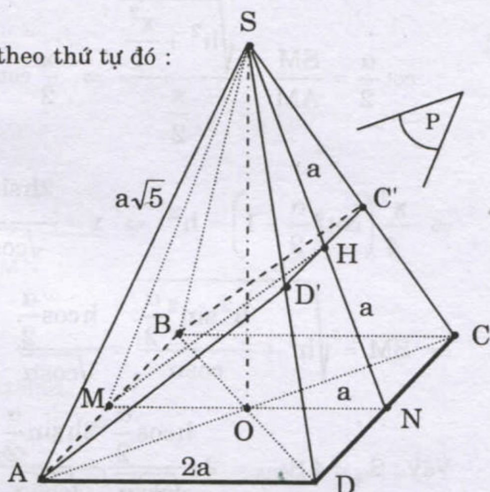
Bài 363 (ĐẠI HỌC NÔNG NGHIỆP KHỐI A, B, E – 2000)

Cho hình chóp đều S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông có cạnh bằng 2a. Cạnh bên SA = $a\sqrt{5}$. Một mặt phẳng (P) đi qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). (P) lần lượt cắt SC và SD tại C' và D'.

1/ Tính diện tích của tứ giác ABC'D'.

2/ Tính thể tích của hình đa diện ABCDD'C'.

Giải



1/ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD, theo thứ tự đó :

$$\Rightarrow \begin{cases} MN = 2a \\ SM = SN \\ MN \perp AB \end{cases}$$

Ta có : $SN = \sqrt{SD^2 - ND^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$

$\Rightarrow \Delta SMN$ đều cạnh 2a.

Do $AB \subset (P) \Rightarrow (P) // CD \subset (SCD)$

$\Rightarrow (P) \cap (SCD) = C'D' // AB$.

Nhưng $(P) \perp (SCD)$

$\Rightarrow MH \perp C'D'$ và $MH \perp AB$;

H là trung điểm C'D'.

Từ ΔSMN đều cạnh 2a $\Rightarrow \begin{cases} MH = 2a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \\ C'D' = \dfrac{1}{2}CD = a \end{cases}$

Diện tích S của hình thang ABC'D' là thiết diện mà mặt phẳng (P) cắt hình chóp tạo thành là :

$$S = \frac{1}{2}(C'D' + AB).MH = \frac{1}{2}(a + 2a).a\sqrt{3} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} \text{ (ycbt).}$$

2/ Tâm O của hình vuông là trung điểm của MN và do hình chóp tứ giác đều nên :

$SO \perp (ABCD) \quad \Rightarrow SO = h$: đường cao hình chóp S.ABCD

Thể tích V_1 hình chóp S.ABCD là :

$$V_1 = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{SN^2 - ON^2}.(2a)^2 = \frac{4}{3}a^2\sqrt{4a^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$$

Lại có thể tích V_2 hình chóp S.ABC'D' là :

$$V_2 = \frac{1}{3}.S.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Phần thể tích V đa diện ABCDD'C' là :

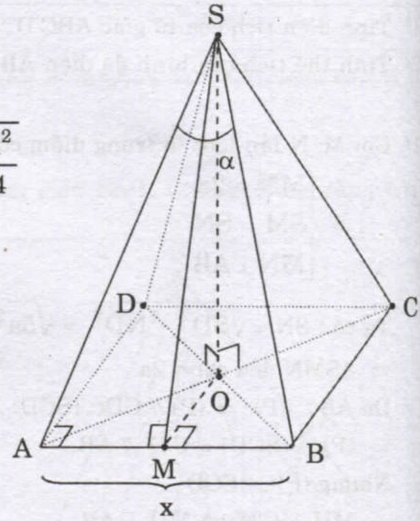
$$V = V_1 - V_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3 - \frac{a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}a^3 \text{ (ycbt).}$$

Bài 364 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – KHỐI B – 1999)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Tính diện tích xung quanh hình chóp theo chiều cao SO = h của hình chóp (O là tâm của hình vuông ABCD) và $\widehat{ASB} = \alpha$.

Giải

Gọi M là trung điểm AB. Đặt : AB = x; ta có :



$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{SM}{AM} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2}\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4}\left(\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = h^2 \Rightarrow x = \frac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$$

$$\Rightarrow SM = \sqrt{h^2 + \frac{h^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}} = \frac{h\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$$

Vậy : $S_{tp} = 4.S_{SBA} = 2.\frac{h\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}.\frac{2h\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}} = 2h^2\tan\alpha$ (ycbt).

Bài 365 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI D – Đợt 1 – 1999)

Cho ΔABC cân tại A có AB = AC = a và $\widehat{BAC} = 2\alpha$. Trên đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm S sao cho SA = 2a. Gọi I là trung điểm của BC. Hạ AH ⊥ SI.

1/ Chứng minh AH ⊥ (SBC). Tính độ dài AH theo a, α.

2/ K là một điểm thay đổi trên đoạn AI, đặt $\frac{AK}{AI} = x$. Mặt phẳng (R) qua K và vuông góc với AI cắt các cạnh AB, AC, SC, SB lần lượt tại M, N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì ? Tính diện tích tứ giác này.

Giải

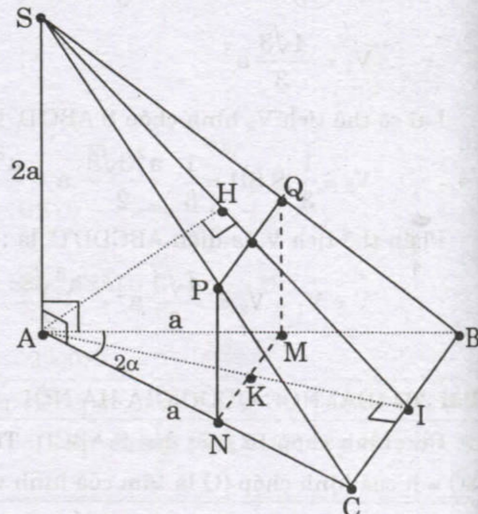
1/ Ta có : AB; AC là hình chiếu của SB; SC lên mặt phẳng (ABC).

Mà AB = AC nên SB = SC hay ΔBSC cân tại S.

Suy ra : SI ⊥ BC ⇒ BC ⊥ (SAI) ⇒ BC ⊥ AH

Mặt khác : AH ⊥ SI

Vậy : AH ⊥ (SBC) (đpcm).



Ta có

- $AI = a.\cos\alpha$
- $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = a\sqrt{4 + \cos^2\alpha}$

Từ : $S_{SAI} = \frac{1}{2}AH.SI = \frac{1}{2}SA.AI$

$$\Rightarrow AH = \frac{2a.a\cos\alpha}{a\sqrt{4 + \cos^2\alpha}}$$

$$= \frac{2a.\cos\alpha}{\sqrt{4 + \cos^2\alpha}} \text{ (ycbt).}$$

2/ Ta có : $\begin{cases} MN = (R) \cap (ABC) \\ \begin{cases} (R) \perp AI \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \,//\, (R) \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, BC$

Tương tự : PQ // BC. Suy ra : MN // PQ

$\begin{cases} PN = (R) \cap (SAC) \\ \begin{cases} (R) \perp AI \\ SA \perp AI \end{cases} \Rightarrow SA \,//\, (R) \end{cases} \Rightarrow PN \,//\, SA$

Tương tự : QM // SA. Suy ra : QM // PN

Mặt khác : $SA \perp (ABC) \Rightarrow PN \perp (ABC) \Rightarrow PN \perp MN$

Vậy MNPQ là hình chữ nhật (ycbt).

Ta có • $BC = 2CI = 2a.\sin\alpha$.

• $MN \,//\, BC \Rightarrow \dfrac{AK}{AI} = \dfrac{MN}{BC} \Rightarrow MN = 2ax\sin\alpha$.

• $QM \,//\, SA \Rightarrow \dfrac{QM}{SA} = \dfrac{MB}{AB} \Rightarrow QM = 2MB$

Mà : $\dfrac{AK}{AI} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow AM = ax \Rightarrow MB = a(1 - x)$

Nên : $QM = 2a(1 - x)$

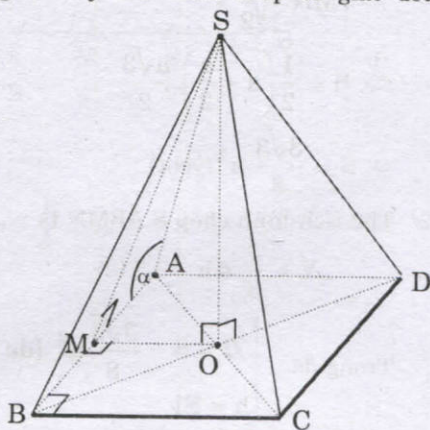
Vậy : $S_{MNPQ} = MN.QM = 4a^2x(1 - x)\sin\alpha$ (ycbt).

Bài 366 (ĐẠI HỌC Y KHOA HÀ NỘI – 2000)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có độ dài cạnh đáy AB = a và $\widehat{SAB} = \alpha$. Tính thể tích hình chóp S.ABCD theo a và α.

Giải

Gọi M là trung điểm AB và O là tâm hình vuông là đáy của hình chóp tứ giác đều S.ABCD.



Ta có : $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \Rightarrow h = SO \\ OM \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow SM \perp AB$ (định lý ba đường vuông góc)

$\Rightarrow SM = AM.\tan\alpha = \dfrac{a}{2}.\tan\alpha$

Định lý Pythagore trong ΔSOM ($\hat{O} = 90^0$), cho ta:

$$SO = \sqrt{SM^2 - MO^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\tan\alpha\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\tan^2\alpha - 1} = \frac{a}{2\cos\alpha}.\sqrt{-\cos 2\alpha}\ ;\ \text{với } \cos 2\alpha < 0;\ -\cos 2\alpha > 0$$

Lúc đó thể tích V của hình chóp S.ABCD là :

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h \text{ với } \mathscr{B} = S_{ABCD} = a^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}a^2.\frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha} = \frac{a^3.\sqrt{-\cos 2\alpha}}{6\cos\alpha} \text{ (ycbt).}$$

Bài 367 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM – KHỐI A – 2000)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với đáy là hình vuông ABCD có cạnh bằng a, mặt bên tạo với mặt đáy hình chóp một góc 60^o. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và cắt SC; SD lần lượt tại M; N. Cho biết góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt đáy hình chóp là 30^o.

1/ Tứ giác ABMN là hình gì ? Tính diện tích tứ giác ABMN theo a.

2/ Tính thể tích hình chóp S.ABMN theo a.

Giải

Gọi O là tâm hình vuông ABCD cạnh a và E; F lần lượt là trung điểm AB; CD.

Ta có : $\begin{cases} AB \subset (\alpha) \\ (\alpha) // CD \text{ (vì : } CD // AB) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = MN // CD // AB$

$\Rightarrow$ Thiết diện nhận được là hình thang ABMN (AB là đáy lớn)

Nhưng do tính đối xứng của hình chóp đều thì ABMN là hình thang cân (ycbt).

Diện tích S của hình thang ABMN lúc đó là :

$S = \frac{1}{2}(AB + MN).IE$ (1) (vì : $AB \perp (SEF) \supset IE \Rightarrow AB \perp IE$)

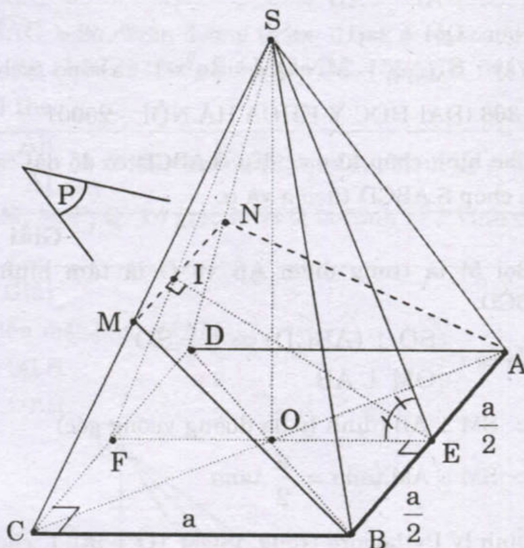
Để ý thấy, ΔSEF đều (do $\widehat{SEF} = \frac{\pi}{3}$)

$\Rightarrow \begin{cases} IE \perp SF \\ MN \text{ là đường trung bình } \Delta SCD \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} IE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ MN = \frac{a}{2} \end{cases}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$ (ycbt).



2/ Thể tích hình chóp S.ABMN là :

$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}.h$ (2)

Trong đó : $\begin{cases} \mathcal{B} = S = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2 \text{ (do câu 1)} \\ h = SI \end{cases}$

Thật vậy : $\begin{cases} SI \perp MN \text{ (vì } MN // AB \perp (SEF) \supset SI) \\ SI \perp IE \end{cases}$

$\Rightarrow SI \perp (ABMN)$ hay $h = SI = d[S; (ABMN)]$

Nên : $\overset{(2)}{\Rightarrow} V = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2.\frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{16}a^3$ (ycbt).

Bài 368 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM – 2000)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và SA = SB = SC = SD = a.

1/ Tính diện tích toàn phần và thể tích hình chóp S.ABCD theo a.

2/ Tính cosin của góc nhị diện (SAB, SAD).

Giải

1/ Gọi M; N theo thứ tự là trung điểm cạnh đáy BC và cạnh bên SA và nhận xét thấy các mặt bên hình chóp tứ giác đều S.ABCD là bốn tam giác đều cạnh a.

Ta có trung đoạn hình chóp là : $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

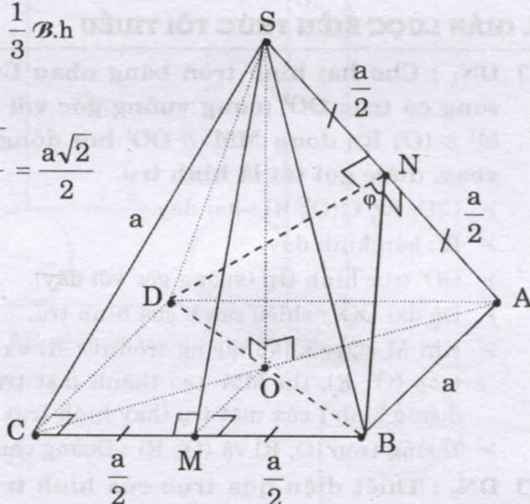
Do đó diện tích toàn phần S_{tp} của hình chóp S.ABCD là : $S_{tp} = \mathscr{B} + S_{xq}$

$\Rightarrow \quad S_{tp} = a^2 + 4.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad \Rightarrow \quad S_{tp} = \left(1+\sqrt{3}\right)a^2$ (ycbt).

Thể tích V của hình chóp S.ABCD là : $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}.h$

với $\begin{cases} \mathscr{B} = S_{ABCD} = a^2 \\ h = SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (ycbt).



2/ Các mặt bên (SAB), (SAC) là các tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow \begin{cases} BN \perp SA \\ DN \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi = \widehat{BND} = [(SAB); (SAD)]$

Áp dụng định lý hàm cosin ta được :

$$\cos\varphi = \frac{NB^2 + ND^2 - BD^2}{2NB.ND} = \frac{2\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3} \text{ (ycbt).}$$

ĐỀ TƯƠNG TỰ

Bài 369 (ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM – 1997)

Cho đường tròn (O, R) đường kính AB thuộc mp(P). Đường thẳng (d) ⊥ (P) tại A. Lấy điểm S ∈ d và SA = h. M là một điểm chạy trên đường tròn (O). mặt phẳng qua A, vuông góc SB tại H, cắt SM tại K.

a/ Chứng minh : AK ⊥ mp(SBM) và K chạy trên một đường tròn cố định khi M chạy trên đường tròn (O).

b/ Tìm thể tích hình chóp SAHK khi M là trung điểm cung AB.

Hướng dẫn

a/ $MB \perp (SAM) \Rightarrow MB \perp AK$ (1)

$SB \perp (KHA)$ (gt) $\Rightarrow SB \perp AK$ (2) $\Rightarrow$ đpcm

b/ $V = \dfrac{R^2h^5}{3(2R^2 + h^2)(h^2 + 4R^2)}$.

Bài 370 (ĐẠI HỌC THĂNG LONG – KHỐI D – 1998)

Cho hình chóp tứ giác đều SABCD, cạnh đáy 2a, tâm I, đường cao hình chóp SI = a.

a/ Tính $\tan\widehat{ASI}$, $\tan\widehat{ASC}$, $\tan\widehat{ASB}$. b/ Tính thể tích và S_{tp} hình chóp.

Hướng dẫn

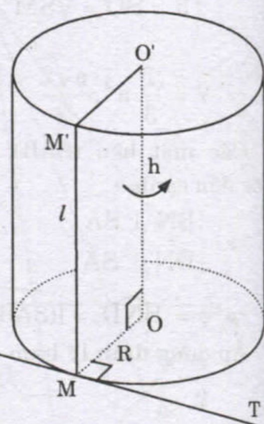
a/ $\tan\widehat{ASI} = \sqrt{2}$, $\tan\widehat{ASC} = -2\sqrt{2}$, $\tan\widehat{ASB} = 2\sqrt{2}$ b/ $V = \dfrac{1}{3}4a^3$.

Chuyên đề 17 : HÌNH TRỤ TRÒN XOAY

I. GIẢN LƯỢC KIẾN THỨC TỐI THIỂU

☐ **ĐN$_1$: Cho hai hình tròn bằng nhau C(O; R); C'(O; R) trong hai mặt phẳng song song có trục OO' (cùng vuông góc với hai đáy). Ứng với mỗi điểm M ∈ (O; R) và M' ∈ (O'; R), đoạn MM' // OO' lưu động tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, được gọi tắt là hình trụ.**

- C(O; R); C'(O'; R) : hai đáy.
- R : bán kính đáy.
- OO' trục hình trụ (vuông góc với đáy).
- Độ dài OO' : chiều cao h của hình trụ.
- Khi M chạy khắp đường tròn (O; R) và M' chạy khắp đường tròn (O'; R), thì MM' tạo thành mặt trụ và MM' được gọi là đường sinh l của mặt trụ (hay hình trụ).
- Đường tròn (O; R) và (O'; R) : Đường chuẩn của đáy hình trụ.



☐ **ĐN$_2$: Thiết diện qua trục của hình trụ là thiết diện tạo bởi một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ đó.**

- **Tính chất 1 :** Các thiết diện qua trục là những hình chữ nhật bằng nhau.

☐ **ĐN$_3$: Thiết diện vuông góc với trục là thiết diện được tạo bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình trụ đó.**

- **Tính chất 2 :** Thiết diện vuông góc với trục là một hình tròn (thiết diện bất kỳ không song song với trục là một hình Ellipe.
- **Tính chất 3 :** (Sự tương giao của mặt trụ và mặt phẳng song song với trục hình trụ)
  - * Một mặt phẳng song song với trục của hình trụ là tiếp diện của mặt trụ khi và chỉ khi mặt phẳng đó chứa tiếp tuyến của đường tròn đáy.
  - * Một mặt phẳng song song với trục của hình trụ sẽ có tương giao hoặc không cắt mặt trụ, hoặc cắt mặt trụ theo hai đường sinh, hoặc có chung với mặt trụ một đường sinh duy nhất (trường hợp này gọi là tiếp diện).

☐ **ĐN$_4$: Một lăng trụ đứng gọi là ngoại tiếp một hình trụ nếu hai đa giác đáy của nó ngoại tiếp hai đáy của hình trụ. Lúc đó ta còn có hình trụ nội tiếp trong lăng trụ đó.**

> Lăng trụ đứng ngoại tiếp một hình trụ thì có các mặt bên nằm trong những tiếp diện của mặt trụ.

- **Tính chất 4 :** Diện tích xung quanh hình trụ : $\boxed{S_{xq} = 2\pi Rl}$
- **Tính chất 5 :** Thể tích hình trụ : $\boxed{V = \pi R^2 h}$

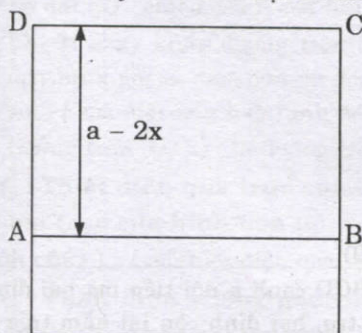
II. GIẢI TOÁN THI

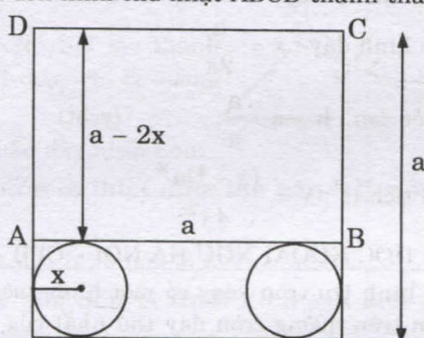
Bài 371 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM – 1977)

Từ một tấm tôn hình vuông cạnh a (cm) người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật và 2 hình tròn cùng đường kính để làm thân và các đáy của một hình trụ. Tính thể tích lớn nhất của hộp trụ được làm ra, biết rằng các cạnh của hình chữ nhật phải song song hoặc trùng với các cạnh ban đầu của tấm tôn.

Giải

Gọi hình chữ nhật đã được cắt từ miếng tôn hình vuông để làm thân hình trụ là ABCD: x là bán kính đáy của hình trụ. Có hai cách uốn hình chữ nhật ABCD thành thân hình trụ



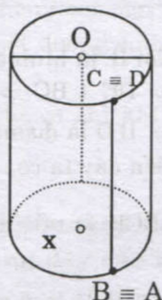


❑ **TH$_1$:** Chọn AD làm chiều cao hình trụ, cạnh AB sẽ được cuốn theo chu vi đáy.

Ta có các điều kiện : $0 < 4x \leqslant a \wedge 0 < 2\pi x \leqslant a$

$$\Leftrightarrow\ 0 < x \leqslant \frac{a}{4} \wedge 0 < x < \frac{a}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow\ 0 < x \leqslant \frac{a}{2\pi} \quad (1)$$



Lúc đó thể tích của hình trụ là :

$$V = \pi x^2(a - 2x) = \pi(-2x^3 + ax^2) \text{ với } \forall x \in \left(0; \frac{a}{2\pi}\right]$$

$$V' = \pi(-6x^2 + 2ax) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3} \notin \left(0; \frac{a}{2\pi}\right]$$

Bảng biến thiên :

$\forall x \in \left(0; \frac{a}{2\pi}\right]$, V tăng

$\max V_1 = \frac{(\pi - 1)a^3}{4\pi^2}$; $x = \frac{a}{2\pi}$

x	0		$a/2\pi$		$a/3$
V'		+		+	0
V		↗	V_{max}	↗	

❑ **TH$_2$:** Chọn AB làm chiều cao của hình trụ, cạnh AD sẽ cuộn theo chu vi đáy của hình trụ.

Ta có điều kiện : $0 < 4x \leqslant a \wedge 0 < 2\pi x \leqslant a - 2x$

$$\Leftrightarrow\ 0 < x \leqslant \frac{a}{4} \wedge 0 < x \leqslant \frac{a-2x}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow\ 0 < x \leqslant \frac{a}{4} \wedge 0 < x \leqslant \frac{a}{2(\pi+1)} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leqslant \frac{a}{2(\pi+1)} \qquad (2)$$

Thể tích hình trụ là :

$$V = \pi x^2 \times a = \pi a x^2;\ \forall x \in \left(0;\ \frac{a}{2(\pi+1)}\right)$$

$$V' = 2\pi a x > 0;\ \forall x \in \left(0;\ \frac{a}{2(\pi+1)}\right)$$

$$\max V_2 = \frac{a^3\pi}{4(\pi+1)^2} \text{ xảy ra} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2(\pi+1)}$$

So sánh $\Rightarrow \max V_1 > \max V_2$.

Vậy ta chọn giải pháp thứ nhất, lúc đó hình trụ có thể lớn nhất với :

$$\begin{cases} \text{Bán kính đáy : } x = \dfrac{a}{2\pi}. \\ \text{Chiều cao : } h = a - \dfrac{a}{\pi}. \quad \text{(ycbt)} \\ \text{Thể tích là : } V = \dfrac{(\pi-1)a^2}{4\pi^2}. \end{cases}$$

Bài 372 (ĐẠI HỌC NGOẠI NGỮ HÀ NỘI – CPB – 1999)

Bên trong hình trụ tròn xoay có một hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông tạo với đáy của hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đó.

Giải

Gọi B' là hình chiếu của B xuống mặt đáy còn lại của hình trụ.

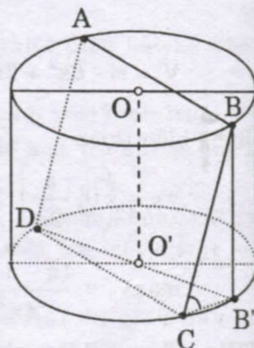
$\Rightarrow$ DC $\perp$ BC $\Rightarrow$ DC $\perp$ B'C

$\Rightarrow$ B'D là đường kính đường tròn đáy và $\widehat{BCB'} = 45^0$.

Đến đây ta có :

- $\Delta BCB'$ là tam giác vuông cân tại B' $\Rightarrow CB' = BB' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$
- $\Delta DCB'$ là tam giác vuông tại C $\Rightarrow B'D^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$$\Rightarrow B'D = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow DO' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



- Diện tích xung quanh của hình trụ :

$$S_{xq} = 2\pi.DO'.BB' = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{(ycbt)}$$

- Thể tích hình trụ :

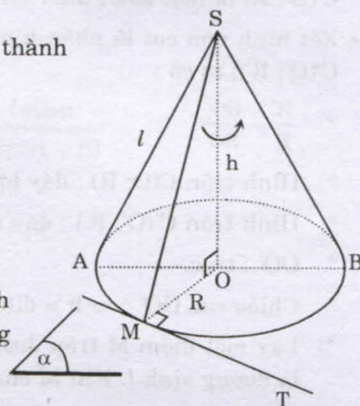
$$V = \pi(DO')^2.BB' = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16} \quad \text{(ycbt)}$$

Chuyên đề 18 : HÌNH NÓN – HÌNH NÓN CỤT

Loại 1 : HÌNH NÓN

I. GIẢN LƯỢC KIẾN THỨC TỐI THIỂU

❑ **$ĐN_1$: Cho hình tròn C(O; R) và một điểm S cố định trên trục hình tròn. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc C(O; R).**



- Khi điểm M chạy khắp hình tròn C(O; R) thì đoạn SM tạo thành một hình gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).
  - S : đỉnh hình nón.
  - Hình tròn C(O; R) : đáy hình nón đường tròn C(O; R) là đường chuẩn.
  - SO : trục hình nón.
  - Độ dài SO : chiều cao h của hình nón.
  - Khi M chạy khắp đường tròn (O; R) thì SM tạo thành một hình gọi là mặt nón và đoạn SM được gọi là đường sinh l của mặt nón hay hình nón.
  - Đường tròn (O; R) : là đường tròn chuẩn đáy hình nón.

❑ **$ĐN_2$: Thiết diện qua trục của hình nón là thiết diện tạo nên bởi một mặt phẳng đi qua trục của hình nón đó.**

- **Tính chất 1 :** Các thiết diện qua trục của một hình nón là những tam giác cân bằng nhau.

❑ **$ĐN_3$: Thiết diện vuông góc với trục của nón là thiết diện tạo nên bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón đó.**

- **Tính chất 2 :** (Sự tương giao của một mặt nón và một mặt phẳng qua đỉnh của hình nón đó)
  - Một mặt phẳng qua đỉnh của hình nón thì, hoặc chỉ có một điểm chung với mặt nón, hoặc cắt mặt nón theo hai đường sinh, hoặc có chung với mặt nón một đường sinh duy nhất (lúc đó gọi là tiếp diện).
  - Một mặt phẳng qua đỉnh của hình nón là tiết diện của mặt nón khi và chỉ khi mặt phẳng đó chứa tiếp tuyến của đường tròn đáy.
  - Ngoài ra sự tương giao mặt nón với một mặt phẳng cho ta các Conic.

❑ **$ĐN_4$: Một hình chóp gọi là nội tiếp trong một hình chóp khi hình chóp đó có đỉnh trùng với đỉnh của hình nón và có đa giác đáy nội tiếp trong đáy của hình nón** (lúc đó ta còn nói hình nón ngoại tiếp hình chóp đó).

- **Tính chất 3 :** Hình chóp nội tiếp trong một hình nón thì có đường cao bằng đường cao của hình nón và có các cạnh bên là những đường sinh của hình nón.

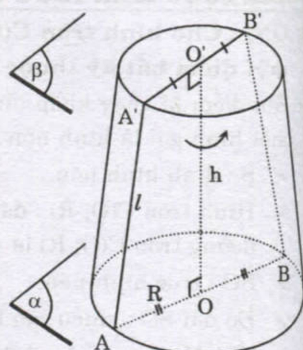
❑ **$ĐN_5$: Một hình chóp gọi là ngoại tiếp một hình nón khi hình chóp có đỉnh trùng với đỉnh của hình nón và có đa giác ngoại tiếp đáy của hình nón** (lúc đó ta còn nói hình nón nội tiếp trong hình chóp đó).

- **Tính chất 4 :** Hình chóp ngoại tiếp một hình nón thì có mặt bên nằm trong những tiếp diện của mặt nón.
- **Tính chất 5 :** Diện tích xung quanh của hình nón : $\boxed{S_{xq} = \pi R l}$
- **Tính chất 6 :** Thể tích của hình nón : $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$.

Loại 2 : HÌNH NÓN CỤT

I. GIẢN LƯỢC KIẾN THỨC TỐI THIỂU

☐ **ĐN$_1$: Hình nón cụt là một phần hình nón được giới hạn bởi mặt đáy và một thiết diện vuông góc với trục** (hay song song với đáy).



- Cho hình nón có đáy là hình tròn C(O; R) và trục SO. Gọi C'(O'; R) là một thiết diện song song với đáy.
- Xét hình nón cụt là phần hình nón giới hạn bởi C(O; R) và C'(O'; R'), ta có :

  * $\frac{R'}{R} = \frac{SO'}{SO}$
  * Hình tròn C(O; R) : đáy lớn.
  * Hình tròn C'(O'; R') : đáy nhỏ.
  * OO' : trục.
  * Chiều cao OO' : $\Rightarrow h = d[(\alpha); (\beta)]$.
  * Lấy một điểm M trên đường tròn (O; R) và SM cắt đường tròn (O'; R') tại M' ta có MM' là đường sinh l. Khi M chạy trên đường tròn (O; R) thì MM' tạo thành mặt nón cụt.

☐ **ĐN$_2$: Tương tự hình nón. Thiết diện qua trục của hình nón cụt là những hình thang cân bằng nhau.**

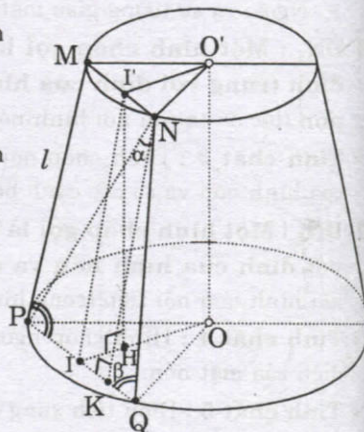
- **Tính chất 1 :** Diện tích xung quanh hình nón cụt : $S_{xq} = \pi(R + R')l$
- **Tính chất 2 :** Thể tích hình chóp cụt : $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR')$.

II. GIẢI TOÁN THI

Bài 373 (ĐẠI HỌC MIỀN BẮC – 1970)

Một mặt phẳng đi qua hai đường sinh MP, NQ của một hình nón cụt cắt các đường tròn đáy thành những cung 60^0, các điểm M, N nằm trên đường tròn đáy nhỏ. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt biết chiều dài đường sinh là l, $\widehat{MPQ} = \beta$, $\widehat{PNQ} = \alpha$.

Giải



Mặt phẳng đi qua hai đường sinh MP, NQ cắt hình nón cụt theo tiết diện là hình thang cân MNPQ.

$\Rightarrow \widehat{MPQ} = \widehat{NQP} = \beta$, $PM = NQ = l$

Gọi OO', R, r' là tâm và bán kính tương ứng của đáy lớn và đáy nhỏ của hình nón cụt.

Theo giả thiết ta có :

$\widehat{MO'N} = 60^0$ và $\widehat{POQ} = 60^0$

$\Rightarrow \begin{cases} MM = NO' \\ PQ = QO = R \end{cases}$

Gọi I', I là trung điểm theo thứ tự của MN và PQ, ta có :

$I'O' = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, $IO = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Từ I' hạ đường $I'H \perp OI$, thế thì :

$$h = O'O = I'H \text{ và } IH = IO - HO = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(R - r)$$

Vậy diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của hình nón cụt là:

$$\begin{cases} S_{xq} = \pi(R + r)l & (1) \\ V = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) & (2) \end{cases}$$

Định lý hàm số sin trong ΔPNQ, ta có :

$$\frac{PQ}{\sin\alpha} = \frac{PN}{\sin\beta} = \frac{NQ}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} \Rightarrow \begin{cases} R = PQ = \dfrac{l\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ PN = \dfrac{l\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \end{cases}$$

Hạ đường cao NK ta có : $I'I = NK = NQ\sin\beta = l\sin\beta$

$$\Rightarrow KQ = l\cos\beta = \frac{1}{2}(PQ - MN) = \frac{1}{2}(R - r)$$

$$\Rightarrow PK = PN\cos[\pi - (\alpha + \beta)] = -\frac{l\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}\cos(\alpha + \beta)$$

$$= -l\sin\beta\cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(PQ + MN) = \frac{1}{2}(R + r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - r = 2l\cos\beta \\ R + r = -2l\sin\beta.\text{cotg}(\alpha + \beta) & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Rr = l^2\sin^2\beta.\cot^2(\alpha + \beta) - l^2\cos^2\beta$$

Mà $R^2 + r^2 + Rr = (R + r)^2 - Rr$

$$\Rightarrow R^2 + r^2 = 4l^2\sin^2\beta\cot^2(\alpha + \beta) - l^2\sin^2\beta\cot^2(\alpha + \beta) + l^2\cos^2\beta$$

$$\Rightarrow R^2 + r^2 = l^2[3\sin^2\beta\cot^2(\alpha + \beta) + \cos^2\beta] \qquad (4)$$

Xét tam giác vuông I' IH, ta có :

$$h = \sqrt{I'I^2 - IH^2} = \sqrt{l^2\sin^2\beta - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}2l\cos\beta\right)^2}$$

$$\Rightarrow h = l\sqrt{\sin^2\beta - 3\cos^2\beta} = l\sqrt{(\sin\beta + \sqrt{3}\cos\beta)(\sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta)}$$

$$\Rightarrow h = l\sqrt{\left(\sin\beta + \tan\frac{\pi}{3}\cos\beta\right)\left(\sin\beta - \tan\frac{\pi}{3}\cos\beta\right)}$$

$$\Rightarrow h = \frac{l}{\cos\frac{\pi}{3}}\sqrt{\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)} = 2l\sqrt{\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)} \qquad (5)$$

Thế (3) vào (1) ta có : $S_{xq} = -2\pi l^2\sin\beta\cot(\alpha + \beta)$.

Vì $S_{xq} > 0$ nên $\cot(\alpha + \beta) < 0$, tức là $\frac{\pi}{2} < x + \beta < \pi$

Thế (4) và (5) vào (2) và với điều kiện : $\frac{\pi}{2} < x + \beta < \pi$, thì :

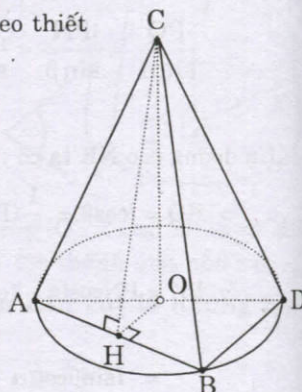
$$V = \frac{2\pi l^3}{3}\sqrt{\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)} \times [3\sin^2\beta\cot^2(\alpha + \beta) + \cos^2\beta] \quad \text{(ycbt).}$$

Bài 374 (ĐẠI HỌC KHỐI A MIỀN BẮC – 1974)

Một hình nón tròn xoay có bán kính đáy R và đường cao h. Trong tất cả các mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón, hãy xác định mặt phẳng cắt hình nón theo tiết diện có diện tích lớn nhất và hãy tính diện tích ấy.

Giải

Giả sử mặt phẳng đi qua đỉnh C của hình nón cắt hình nón theo thiết diện CAB. Thế thì CAB là một tam giác cân với CA = CB.



Gọi O là tâm hình tròn đáy và H là trung điểm của AB.

$$CO \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} CH : \text{đường xiên} \\ OH : \text{là hình chiếu} \end{cases}$$

Mà $AB \perp OH \Rightarrow AB \perp CH$

Đặt : $x = AH = \frac{1}{2}AB$ thì diện tích S của ΔCAB là :

$$S = \frac{1}{2}AB.CH = x.CH$$

Nhưng : $CH^2 = CO^2 + OH^2 = CO^2 + OA^2 - AH^2 = h^2 + R^2 - x^2$

$$\Rightarrow S = S(x) = x\sqrt{h^2 + R^2 - x^2}$$

ĐK xác định AB : $2x \leqslant 2R \Leftrightarrow x \leqslant R$. Đặt : $t = x^2$; $\forall x \in [0; R] \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant R^2$

$$\Rightarrow S^2 = x^2(h^2 + R^2 - x^2) \Leftrightarrow g(t) = t(h^2 + R^2 - t)$$

Ta viết : $g(t) = -t^2 + (h^2 + R^2)t$; với $0 \leqslant t \leqslant R^2$

Nhận thấy đồ thị của g(x) có dạng như sau, tuỳ theo $h > R$ hay $h \leqslant R$.

❒ **TH_1 :** Nếu $h \geqslant R$, thì $S^2 = g(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant R^2)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = R^2$, Vậy S đạt giá trị lớn nhất khi x = R (AB là một đường kính đáy), và ta có : maxS = Rh.

❒ **TH_2 :** Nếu $h \leqslant R$, thì $S^2 = g(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant R^2)$ đạt giá trị lớn nhất khi :

$$t = \frac{1}{2}(h^2 + R^2)$$

$$\Rightarrow \max S = \frac{1}{2}(h^2 + R^2) \text{ tương ứng } x = \sqrt{\frac{h^2 + R^2}{2}} \quad \text{(ycbt)}$$

Bài 375 (ĐẠI HỌC KỸ THUẬT PHÚ THỌ VÀ ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC – 1977)

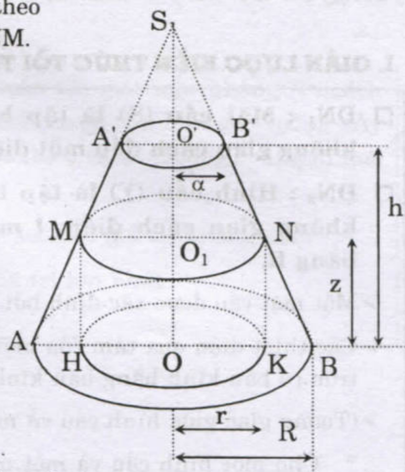
Cho một hình nón cụt tròn xoay có chiều cao h, các bán kính đáy là r và R (r < R). Tìm kích thước của hình trụ tròn xoay có cùng trục đối xứng, nội tiếp trong hình nón cụt đó và có thể tích lớn nhất.

Giải

Gọi x là bán kính, z là chiều cao của hình trụ. Ta có:

$$\begin{cases} r \leqslant x \leqslant R \\ 0 \leqslant z \leqslant h \end{cases}$$

Giả sử rằng hình trụ nội tiếp trong hình nón cụt như thiết diện qua trục như hình bên. Thiết diện này cắt hình nón theo hình thang cân ABB'A, cắt hình trụ theo hình chữ nhật: HKNM.



$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{SO'}{SO - SO'} = \frac{r}{R - r} = \frac{SO'}{OO'}$$

$$\Rightarrow SO' = \frac{rh}{R - r}, \quad SO = \frac{rh}{R - r} + h = \frac{Rh}{R - r}$$

$$\frac{O_1M}{OA} = \frac{SO_1}{SO} \Leftrightarrow \frac{x}{OA} = \frac{SO_2}{SO} \Rightarrow x = \frac{OA + SO_1}{SO}$$

Mà : $SO_1 = SO - z \Rightarrow x = \dfrac{R(SO - z)}{SO}$

Thể tích V hình trụ là :

$$V = V(x) = \pi x^2 z = \frac{\pi R^2}{SO^2}.(SO - z)^2 z = \frac{\pi R^2}{SO^2}(SO^2 + z^2 - SOz)z$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{\pi R^2}{SO^2}(z^3 - 2SOz^2 + SO^2 z) \ (0 < z \leqslant h)$$

$$\Rightarrow V'(x) = \frac{\pi R^2}{SO^2}(3z^2 - 4SOz + SO^2) = 3\frac{\pi R^2}{SO^2}\left(z - \frac{SO}{3}\right)(z - SO)$$

$$\Rightarrow V'(x) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{SO}{3} \vee z = SO \quad \Leftrightarrow z = \frac{Rh}{3(R - r)} \vee z = \frac{Rh}{(R - r)}$$

Bảng biến thiên :

x	0		$\frac{Rh}{3(R-r)}$		$\frac{Rh}{(R-r)}$		h
V'(x)		+	0	−	0	+	0
V(x)		↗	CĐ	↘	CT	↗	CĐ

$$\exists \max y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z = \dfrac{Rh}{3(R - r)} & \Rightarrow x = \dfrac{2R}{3} \\ z = h & \Rightarrow x = r \end{array}\right.$$

Để ý rằng : $0 < z < h$, ta có : $z = \dfrac{Rh}{3(R - r)} < h \Leftrightarrow \dfrac{r}{R} < \dfrac{2}{3}$

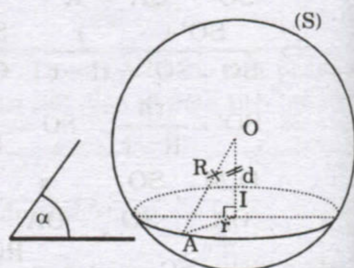
Kết luận :

- $\dfrac{r}{R} < \dfrac{2}{3}$: thể tích của hình trụ lớn nhất khi hình trụ có kích thước bán kính đáy: $x = \dfrac{2R}{3}$, chiều cao $z = \dfrac{Rh}{3(R - r)}$.
- $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{r}{R} < 1$, hình trụ có thể tích lớn nhất khi hình trụ có kích thước bán kính đáy : $x = r$ và chiều cao $z = h$.

Chuyên đề 19 : **HÌNH CẦU – CHỎM CẦU – QUẠT CẦU**

I. GIẢN LƯỢC KIẾN THỨC TỐI THIỂU

❒ **$ĐN_1$: Mặt cầu (S) là tập hợp các điểm M trong không gian cách đều một điểm I một đoạn bằng R.**



❒ **$ĐN_2$: Hình cầu (Σ) là tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm I một đoạn nhỏ hơn hay bằng R.**

➢ Một mặt cầu được xác định bởi một đường kính của nó.

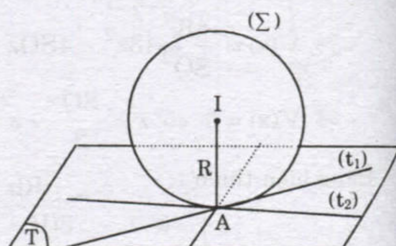
➢ Các thiết diện qua tâm của một hình cầu là những hình tròn có bán kính bằng bán kính của hình cầu.

➢ (Tương giao giữa hình cầu và mặt phẳng)

* Cho một hình cầu và một mặt phẳng bất kỳ. Mặt phẳng này hoặc không cắt hình cầu, hoặc có chung với hình cầu một điểm duy nhất, hoặc cắt hình cầu theo một hình tròn tùy theo $h = d[O; (\alpha)] > r$, $h = D[O; (\alpha)] = r$, $h = d[O; (\alpha)] < r$ theo thứ tự đó.

* Đường tròn C(O; R) là đường tròn lớn (nhất) của hình cầu.

❒ **$ĐN_3$: Mặt phẳng tiếp xúc hay tiếp diện của một mặt cầu là mặt phẳng chỉ có một điểm chung với mặt cầu đó. Điểm chung này gọi là tiếp điểm.**



➢ Điều kiện cần và đủ để một mặt phẳng tiếp xúc với một mặt cầu là mặt phẳng đó vuông góc với bán kính của hình cầu tại đầu mút của bán kính đó.

➢ Tất cả các tiếp tuyến ở một điểm cho trước của một mặt cầu đều nằm trong tiếp diện của mặt cầu tại điểm đó.

❒ **$ĐN_5$: Một hình chóp gọi là nội tiếp trong một hình cầu khi các đỉnh của hình chóp đều nằm trên mặt cầu.**

❒ **$ĐN_6$: Một hình cầu gọi là nội tiếp trong một hình nón khi mặt cầu của hình cầu đó tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và tiếp xúc với đáy của hình nón.**

❒ **$ĐN_7$: Một hình cầu gọi là ngoại tiếp một hình nón khi mặt cầu chứa đỉnh và đường tròn đáy của hình nón.**

➢ Diện tích mặt cầu : $\boxed{S = 4\pi R^2}$

➢ Diện tích chỏm cầu : $\boxed{S_{ch} = 2\pi Rh}$

➢ Thể tích hình cầu : $\boxed{V = \dfrac{4\pi R^3}{3}}$

➢ Thể tích chỏm cầu : $\boxed{V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)}$

➢ Thể tích quạt cầu : $\boxed{V_q = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h}$

II. GIẢI TOÁN THI

Bài 376 (ĐẠI HỌC KHỐI A MIỀN BẮC – 1971)

Cho một mặt cầu bán kính R. (L) là giao tuyến của mặt cầu với một mặt phẳng (P) cách tâm mặt cầu một khoảng cách bằng h ($0 < h < R$). A là một điểm trên (L). Một góc vuông xAy trong mặt phẳng (P) quay quanh điểm A; các cạnh Ax; Ay cắt (L) ở C, D. Đường thẳng đi qua A vuông góc với mặt phẳng P cắt mặt cầu ở B.

a/ Chứng minh rằng các tổng : $BC^2 + AD^2$ và $BD^2 + AC^2$ luôn luôn có giá trị không đổi.

b/ Với vị trí nào của CD thì diện tích của tam giác BCD có giá trị lớn nhất.

c/ Tìm quỹ tích của hình chiếu H của B lên đường thẳng CD.

Giải

a/ Do AB vuông góc với mặt phẳng (P) nên ta có :

$$\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC^2 = AB^2 + AC^2 & (1) \\ BD^2 = AB^2 + AD^2 & (2) \\ DC^2 = AC^2 + AD^2 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) & (3) $\Rightarrow BC^2 + AD^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2 = AB^2 + DC^2$

Từ (2) & (3) $\Rightarrow BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + AC^2 = AB^2 + DC^2$

Vì $\begin{cases} AB = 2OO' = 2h \\ DC = 2O'C = 2\sqrt{OC^2 - OO'^2} = 2\sqrt{R^2 - h^2} \end{cases}$

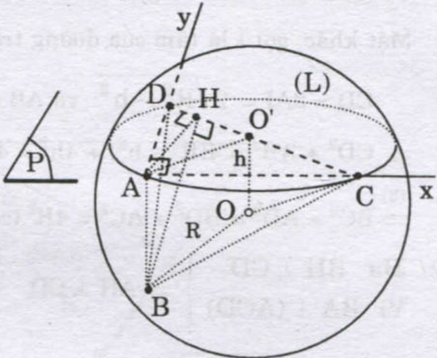
(với O là tâm hình cầu bán kính R, O' là tâm đường tròn (L)).

$\Rightarrow BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2 = AB^2 + DC^2$

$\Rightarrow BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2 = 4h^2 + 4(R^2 - h^2) = 4R^2 = \text{const}$ (đpcm)

b/ Gọi S là diện tích ΔBCD và H là chân đường cao của ΔBCD hạ từ B xuống CD.

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}CD.BH \leqslant \frac{1}{2}CD.BO'$ (4)



Dấu đẳng thức trong (4) xảy ra

$\Leftrightarrow BH = BO' \Leftrightarrow H \equiv O'$

$\Rightarrow \max S = \frac{1}{2}CD.BO'$

Tương ứng : $CD \perp AC'$ (ycbt).

c/ Do $AB \perp (ACD)$ và $BH \perp CD$ nên $CD \perp AH$ (định lý ba đường vuông góc)

$\Rightarrow$ H nằm trên đường tròn đường kính AO'.

Đảo lại, lấy H' là một điểm tuỳ ý trên đường tròn đường kính AO', nối H' với A, B và O; kéo dài H'O' cắt (L) tại C' và D' là đường kính của (L) nên tam giác C'AD' vuông tại A.

$\Rightarrow \widehat{C'AD'}$ là một vị trí của góc xAy cắt (L) ở C' và D', vì AB vuông góc với (AC'D') và AH' ⊥ C'D' nên theo định lý ba đường vuông góc ta có BH' ⊥ C'D', tức là H' là hình chiếu của B lên đường thẳng C'D'.

Vậy quỹ tích của hình chiếu H của B lên đường thẳng CD khi góc xAy quay quanh điểm A là đường tròn đường kính AO' cố định (do A và O' cố định). (ycbt)

Bài 377 (ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC TP.HCM – 1991)

Cho một hình cầu bán kính R, (L) là giao tuyến của một mặt phẳng (P) cách tâm mặt cầu một khoảng cách bằng h (0 < h < R). A là một điểm cố định trên (L). Một góc vuông xAy trong mặt phẳng (P) quay quanh A : Các cạnh AX, AY cắt (L) ở C, D. Đường thẳng đi qua A vuông góc với mặt phẳng (P) cắt mặt cầu ở B.

1/ Chứng minh rằng các tổng $BC^2 + AD^2$ và $BD^2 + AC^2$ luôn có giá trị không đổi.

2/ Với vị trí nào của CD thì diện tích của tam giác BCD có giá trị lớn nhất ?

3/ Tìm quỹ tích của hình chiếu H của B lên đường thẳng CD.

Giải

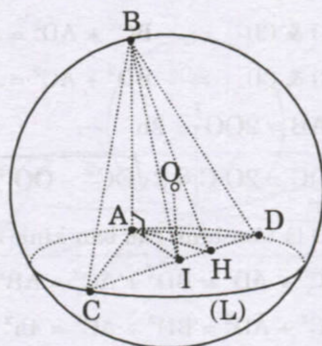
1/ Ta có : $\begin{cases} \Delta ABC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ \Delta ABD \Rightarrow AD^2 = BD^2 - AB^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 \quad (1)$$

và $\begin{cases} \Delta ABC \Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 \\ \Delta ADC \Rightarrow CD^2 = AD^2 + AC^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 \quad (2)$$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2$ (3)



Mặt khác, gọi I là tâm của đường tròn (L) thì :

$CD = 2AI = 2\sqrt{R^2 - h^2}$ và $AB = 2OI = 2h$

$\Rightarrow CD^2 + AB^2 = 4(R^2 - h^2) + 4h^2 = 4R^2$ (const)

$\overset{(3)}{\Rightarrow} BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2 = 4R^2$ (const) khi góc xAy quay quanh A. (ycbt)

2/ $\left.\begin{matrix} \text{Hạ } BH \perp CD \\ \text{Vì } BA \perp (ACD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp CD$

Do $CD = 2\sqrt{R^2 - h^2}$ (const)

$\exists$maxdt(BCD) $\Leftrightarrow \exists$maxBH = BI $\Leftrightarrow AH \equiv AI \Leftrightarrow AI \perp DC$

Vậy : CD ⊥ AI thì dt(BCD) lớn nhất.

Vì $BI = \sqrt{AB^2 + AI^2} = \sqrt{4h^2 + R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 + 3h^2}$

Nên ∃maxdt(BCD) = $\frac{1}{2}$CD.BI = $\sqrt{(R^2 - h^2)(R^2 + 3h^2)}$ (ycbt).

3/ H nhìn đoạn AI cố định dưới 1 một góc vuông nên H thuộc đường tròn đường kính AI trong mặt phẳng (P) cố định.

Đảo lại, lấy H' tùy ý trên đường tròn đường kính AI.

Đường thẳng H'I gặp (L) tại C'D' và C'D' là một đường kính của (L).

Lại có : $\begin{cases} AB \perp (AC'D') \\ AH' \perp C'D' \end{cases} \Rightarrow BH' \perp C'D' \Rightarrow$ H là hình chiếu của B trên C'D'

Vì góc xAy lấy tất cả các vị trí trong mp(P) khi quay quanh A, nên H vẽ cả đường tròn đường kính AI.

Vậy quỹ tích của H hình chiếu của B lên CD, là đường tròn đường kính AI (với I là tâm của (L) nằm trong mặt phẳng cố định (P)). (ycbt)

Bài 378 (ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC – 1993)

Cho một mặt cầu (S) tâm O tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm di động trên (S). Hai tiếp tuyến của (S) tại M cắt (P) ở A và B.

1/ Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.

2/ I' là điểm đối xứng của I qua AB. Chứng minh rằng bốn điểm I, I', M, O cùng nằm trên mặt phẳng và I'M đi qua một điểm cố định J thuộc (S).

3/ Cho M di động trên (S) sao cho $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$, các điểm A; B lần lượt chạy trên hai đường thẳng d, d' nằm trong (P) và d, d' vuông góc với nhau tại K. Hãy chứng tỏ rằng khi đó mặt cầu đường kính AB luôn chứa một đường tròn cố định, I' chạy trên một đường thẳng cố định, và M di động trên một đường tròn cố định.

Giải

1/ Ta có : $\begin{cases} AI \text{ tiếp xúc (S) tại I} \Rightarrow OI \perp IA : \Delta OIA \text{ vuông} \\ AM \text{ tiếp xúc (S) tại M} \Rightarrow OM \perp AM : \Delta OMA \text{ vuông} \end{cases}$

Nhưng do : OI = OM = R ⇒ ΔOIA = ΔOMA ⇒ AI = AM

Tương tự $\Rightarrow$ BM = BI

Vậy : $\Delta MAB = \Delta IAB \Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{AMB}$ (đpcm).

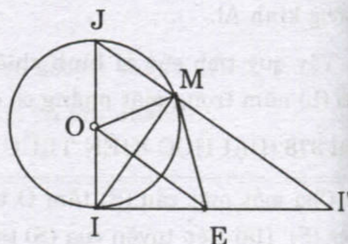
2/ Xét : (S) tiếp xúc (P) tại I $\Rightarrow OI \perp (P) \Rightarrow OI \perp AB$ (1)

Khi : $\begin{cases} \text{MB tiếp xúc (S)} \\ \text{MA tiếp xúc (S)} \end{cases} \Rightarrow$ (MAB) tiếp xúc (S)

$\Rightarrow OM \perp (MAB) \Rightarrow MO \perp AB$ (2)

Mặt khác : $\begin{cases} OI \perp AB \\ AB \perp II' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OII') \Rightarrow OI' \perp AB$ (3)

Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow$ Bốn điểm I; I'; M; O cùng nằm trên một mặt phẳng qua O vuông góc với AB (ycbt).



Với J là giao điểm của (S) và MI'; gọi E là trung điểm của II'.

Ta có : (MAB) tiếp xúc (S) $\Rightarrow$ ME tiếp xúc (S)

$\Rightarrow ME \perp OM$, hay ΔOME vuông tại M

$\Rightarrow \Delta OME = \Delta OIE \Rightarrow ME = IE$

Hay $ME = \dfrac{II'}{2} \Rightarrow \Delta I'MI$ vuông tại M

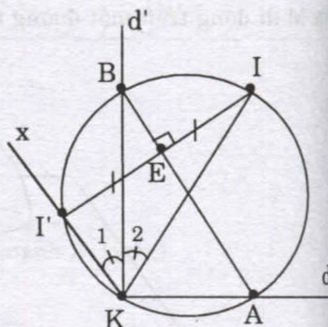
$\Rightarrow \widehat{IMI'} = \dfrac{\pi}{2}$

Vậy J đối xứng với I qua O, hay MI' qua điểm J cố định thuộc (S). (đpcm)

3/ Để ý đến mặt cầu đường kính AB luôn chứa đường tròn cố định đường kính KI nằm trong mặt phẳng vuông góc với (P).

Khi I' lưu động trên đường thẳng Kx sao cho d' là phân giác của $\widehat{IKx}$.

$\Rightarrow$ M di động trên đường tròn cố định là giao điểm của (S) và mặt phẳng (JKI'). (đpcm)



Chuyên đề 20 : PHỐI HỢP CÁC KHỐI HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp là sử dụng các định nghĩa về sự nội tiếp, ngoại tiếp giữa hai khối hình học khác nhau và sự tương giao giữa các khối với nhau. Chẳng hạn hình cầu nội tiếp hình nón, hình trụ nội tiếp hình cầu, phần chung của hai hình chóp, ... qua hai bước cơ bản :

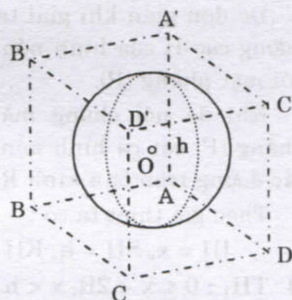
- **B_1 :** Phối hợp định nghĩa và quản lý giả thiết.
- **B_2 :** Phối hợp các công thức thể tích, diện tích... của các hình khối, sau đó kết hợp với các định lý hình học sơ cấp để tìm các quan hệ liên thuộc : giữa diện tích, thể tích, đường cao, bán kính, đường sinh, cạnh bên, cạnh đáy, các loại góc, ...

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 379

Tìm thể tích của một hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi mà góc nhọn là α, ngoại tiếp mặt cầu có thể tích bằng V.

Giải



Để ý thấy hình chiếu của mặt cầu trên đáy hình lăng trụ là một đường tròn nội tiếp hình thoi ở đáy hình lăng trụ. Đường tròn này có tâm là hình chiếu của tâm hình cầu trên đáy trùng với tâm hình thoi và có bán kính bằng bán kính mặt cầu.

Gọi bán kính mặt cầu là r, ta có :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

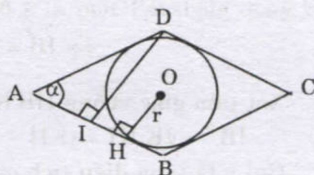
Dựng $DI \perp AB \Rightarrow DI = 2OH = 2r$

$\Delta DAI\ (\hat{I} = 90^0) \Rightarrow DA = \dfrac{DI}{\sin\alpha} = \dfrac{2r}{\sin\alpha}$

Đường cao lăng trụ cũng bằng đường kính hình cầu : $h = 2r$

$\Rightarrow V_{lt} = dt(ABCD).A'A = DA^2\sin\alpha.2r$

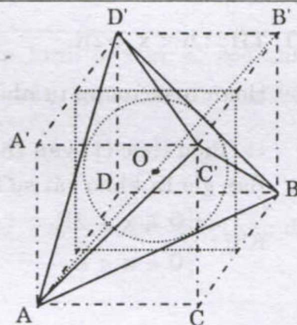
$\Rightarrow V_{lt} = \dfrac{8r^3}{\sin\alpha} = \dfrac{6V}{\pi\sin\alpha}$ (ycbt)



Bài 380

Tìm bán kính hình cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đều cạnh a.

Giải



Để ý thấy hình cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều này sẽ nội tiếp hình lập phương, tức là tiếp xúc với các mặt của hình lập phương tại tâm của mặt (tâm hình vuông).

⇒ Các tiếp điểm đó là trung điểm các cạnh tứ diện đều.

⇒ Đường kính hình cầu bằng cạnh hình lập phương có đường chéo bằng a (cạnh tứ diện đều).

$\Rightarrow$ Mỗi cạnh hình lập phương bằng : $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó bán kính hình cầu bằng : $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ (ycbt)

III. GIẢI TOÁN THI

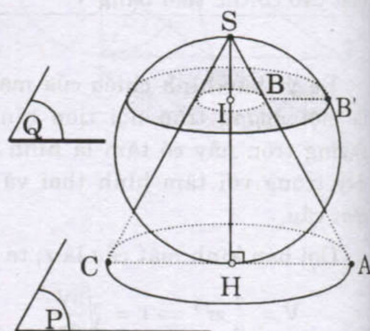
Bài 381 (ĐẠI HỌC KHỐI B – 1971)

Một hình cầu bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng (P). Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P), có chiều cao h và bán kính đáy cũng là R. Người ta cắt hai hình đó bằng mặt phẳng (Q) song song với (P) được hai thiết diện và gọi x là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ($x < 2R$, $x < h$).

a/ Hãy tính tổng các diện tích của hai thiết diện đó theo h, R và x. Biểu thức ấy còn thích hợp cho trường hợp $h < x < 2R$ nữa không nếu ta kéo dài các đường sinh của hình nón để cho chúng cắt mặt phẳng (Q).

b/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của tổng các diện tích ấy khi x biến thiên. Biện luận đủ các trường hợp.

Giải



a/ Để đơn giản khi giải ta tịnh tiến hình nón sao cho chân đường cao H của hình nón trùng với tiếp điểm của hình cầu với mặt phẳng (P).

Khi đó nói chung mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) cắt cả hình nón và hình cầu theo các tiết diện là các đường tròn bán kính $R_n = IB$ và $R_c = IB'$.

Theo giả thiết ta có :

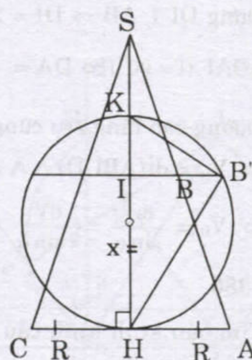
$IH = x$, $SH = h$, $KH = 2HA = 2R$

❒ **TH_1 : $0 \leqslant x < 2R$, $x < h$**

Từ $\Delta SIB \backsim \Delta SHA$, ta có :

$$\frac{IB}{HA} = \frac{SI}{SH} \Leftrightarrow \frac{IB}{R} = \frac{SH - IH}{h} = \frac{h - x}{h}$$

$$\Leftrightarrow IB = \frac{R}{h}(h - x)$$



Xét tam giác vuông HB'K, ta có :

$IB'^2 = IK.IH = (KH - IH).IH = (2R - x)x.$

Gọi y là tổng diện tích của các thiết diện tạo được :

$$y = \pi IB^2 + \pi IB'^2 = \pi\left[\frac{R^2}{h^2}(h - x)^2 + (2R - x)x\right] \quad (1)$$

❒ **TH_2 : $h < x < 2R$**

Hoàn toàn tương tự như trên ta được : $IB = \dfrac{R}{h}(x - h)$, $IB'^2 = (2R - x)x$

$\Rightarrow$ Biểu thức (1) vẫn thích hợp cho cả hai khả năng trên. (ycbt)

b/ Bây giờ ta khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của tổng các diện tích.

Khi : $\begin{cases} 0 \leqslant x < 2R \\ 0 < x < h \end{cases}$

Biến đổi sơ cấp hàm số :

$$y = \pi\left[\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 + (2R-x)x\right]$$

$$\Rightarrow y = \pi\left[\left(\frac{R^2}{h^2}-1\right)x^2 - 2R\left(\frac{R}{h}-1\right)x + R^2\right] \quad (1)$$

Đây là hàm số bậc hai đối với x, đường biểu diễn của y là một Parabola. (Độc giả tự vẽ hình)

Tọa độ đỉnh :
$$\begin{cases} x_P = \dfrac{b}{2a} = \dfrac{2\pi R\left(\dfrac{R}{h}-1\right)}{2\pi\left(\dfrac{R^2}{h^2}-1\right)} = \dfrac{R}{\dfrac{R}{h}+1} = \dfrac{Rh}{R+h} \\ y_P = -\dfrac{\Delta'}{a} = \dfrac{2\pi^2R^2\left(\dfrac{R}{h}-1\right)}{\pi\left(\dfrac{R^2}{h^2}-1\right)} = \dfrac{2\pi R^2}{\dfrac{R}{h}+1} = \dfrac{2\pi R^2 h}{R+h} \end{cases}$$

• $\dfrac{R^2}{h^2}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{R}{h}>1 \Leftrightarrow R>h$: đường biểu diễn của hàm số y là một Parabola quay bề lõm về phía y dương, tung độ đỉnh là giá trị nhỏ nhất :

$$\min y = y_P = \frac{2\pi R^2 h}{R+h} \quad \left(x_P = \frac{Rh}{R+h}\right) \text{ (ycbt)}$$

• $\dfrac{R^2}{h^2}-1<0 \Leftrightarrow \dfrac{R}{h}<1 \Leftrightarrow R<h$: đường biểu diễn của hàm số y là một Parabola quay bề lõm về phía y âm, tung độ đỉnh là giá trị lớn nhất

$$\min y = y_P = \frac{2\pi R^2 h}{R+h} \quad \left(x_P = \frac{Rh}{R+h}\right) \text{ (ycbt)}$$

• Đặc biệt R = h ta có $y = \pi R^2$; đồ thị là đoạn thẳng song song với trục hoành (ycbt).

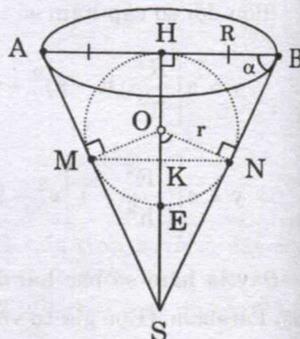
Bài 382 (ĐẠI HỌC KHỐI B MIỀN BẮC – 1972)

Một bình hình nón tròn xoay (đỉnh ở dưới, đáy ở trên) có bán kính đáy là R, góc giữa đường sinh và mặt đáy là α. Bình chứa đầy nước và chứa một quả cầu, mặt cầu tiếp xúc với mặt nước và mặt xung quanh của bình.

a/ Tính thể tích của khối nước nằm dưới quả cầu.

b/ Nếu vớt quả cầu ra thì chiều sâu của khối nước sẽ là bao nhiêu ? Tính cụ thể chiều sâu đó khi : $R = \sqrt{3}$ cm, $\alpha = 60^0$.

Giải

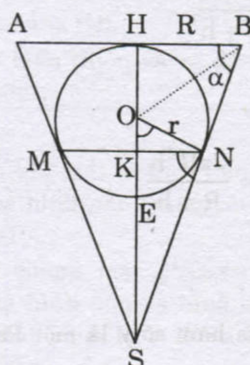


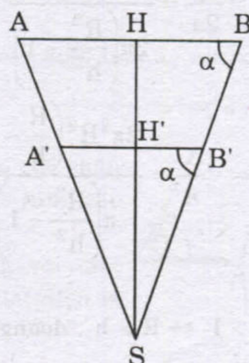
a/ Nhận thấy tâm O của quả cầu nội tiếp trong hình nón nằm trên đường cao SH của hình nón hạ từ đỉnh S xuống đáy. Xét thiết diện (ASB) đi qua SH, gọi r là bán kính quả cầu nội tiếp, V_1 là thể tích khối nước nằm dưới quả cầu và V là thể tích của toàn bộ khối nước ta có :

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi KN^2.SK - \pi KE^2.\left(OE - \frac{KE}{3}\right)$$

Ta có : $V = \frac{1}{3}\pi R^2.SH - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi H'B'^2.SH'$

Trong đó SH' là chiều cao của khối nước hình nón sau khi đã vớt quả cầu.





Ta có : $\begin{cases} HB = R,\ r = OE = ON = OH = HB\tan\frac{\alpha}{2} = R\tan\frac{\alpha}{2} \\ SH = HB\tan\alpha = R\tan\alpha,\ KN = ON\sin\alpha = r\sin\alpha \\ KE = OE - OK = r - ON\cos\alpha = r(1-\cos\alpha) \\ SK = KN\tan\alpha = r\sin\alpha\tan\alpha,\ H'B' = SH'\cot\alpha = \dfrac{SH'}{\tan\alpha} \end{cases}$

Thay các kết quả tính được vào biểu thức của V_1 và V thì :

$$V_1 = \frac{\pi}{3}r^2\sin^2\alpha.r\sin\alpha\tan\alpha - \pi r^2(1-\cos\alpha)^2\left[r - \frac{r(1-\cos\alpha)}{3}\right]$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{\pi}{3}r^3\left[\frac{\sin^4\alpha}{\cos\alpha} - (1-\cos\alpha)^2(2+\cos\alpha)\right]$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{\pi}{3}r^3\frac{(1-\cos^2\alpha)^2 - \cos\alpha(1-\cos\alpha)^2(2+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{\pi}{3}r^3(1-\cos\alpha)^2\frac{(1+\cos\alpha)^2 - \cos\alpha(2+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{\pi}{3}r^3\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\cos\alpha} = \frac{\pi}{3}R^3\left(tg^3\frac{\alpha}{2}\right)\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\cos\alpha} \text{ (ycbt).}$$

b/ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 R\tan\alpha - \frac{4}{3}\pi R^3\tan^3\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\pi R^3\left(\tan\alpha - 4\tan^3\frac{\alpha}{2}\right)$

Mà $V = \frac{1}{3}\pi\frac{SH'^2}{\tan^2\alpha}.SH' = \frac{1}{3}\pi\frac{SH'^3}{\tan^2\alpha}$

Từ đó suy ra : $SH'^3 = R^3\tan^2\alpha(\tan\alpha - 4\tan^3\frac{\alpha}{2})$

$$\Rightarrow SH' = R\sqrt[3]{\tan^2\alpha\left(\tan\alpha - 4\tan^3\frac{\alpha}{2}\right)} = R\sqrt[3]{\tan^3\alpha - 4\tan^2\alpha\tan^3\frac{\alpha}{2}}$$

Khi $R = \sqrt{3}$ (cm), $\alpha = 60^0$ ta có :

$$SH' = \sqrt{3}\sqrt[3]{3\sqrt{3} - 4.3.\frac{3\sqrt{3}}{3^3}} = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{3}} = \sqrt[3]{15} \text{ (cm) (ycbt)}$$

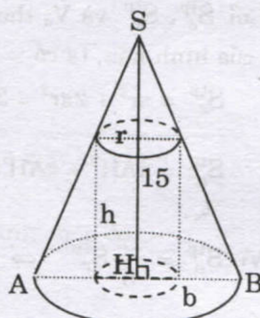
Bài 383 (ĐẠI HỌC KHỐI B MIỀN BẮC – 1972)

Cho một hình nón tròn xoay cao 15cm, bán kính đáy bằng 6cm.

a/ Tìm chiều cao và bán kính đáy của hình trụ có diện tích toàn phần lớn nhất nội tiếp trong hình nón đó.

b/ Hãy cho biết diện tích toàn phần của hình trụ đó bằng bao nhiêu ?

Giải



a/ Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ có diện tích toàn phần S lớn nhất nội tiếp trong hình nón, ta có điều kiện :

$$\begin{cases} 6 > r > 0 \\ 15 > h > 0 \end{cases} \Rightarrow S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (1)$$

Gọi (SAB) là thiết diện qua đỉnh S của hình nón có tâm O, đáy là H.

$\Rightarrow SH = 15$ (cm), $AH = 6$ (cm)

và $\frac{r}{AH} = \frac{SH - h}{SH} \Leftrightarrow \frac{r}{6} = \frac{15 - h}{15} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{2(15-h)}{5} & (2) \\ h = \frac{30 - 5r}{2} & (3) \end{cases}$

Thế (3) vào (1) ta có : $S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{30 - 5r}{2}\right) = -3\pi r^2 + 30\pi r$ (4)

$\Rightarrow S'(r) = -6\pi r + 30\pi = -6\pi(r - 5) = 0 \Leftrightarrow r = 5 \Rightarrow S(5) = 75\pi$

Bảng biến thiên :

r	0		5		6
S'	+	+	0	–	–
S		↗	75π	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ⇒ maxS = 75π tương ứng r = 5.

Thay r = 5 (cm) vào (3) và (4) ta được : h = 2,5 (cm)

b/ Độc giả tự giải.

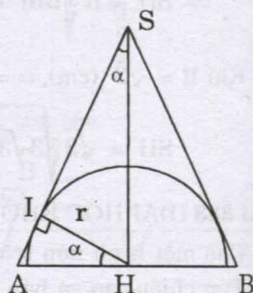
Bài 384 (ĐẠI HỌC KHỐI B MIỀN BẮC – 1972)

Cho nửa hình cầu bán kính r và một nửa hình nón xoay ngoại tiếp với nửa hình cầu (mặt đáy của hai hình nằm trong cùng một mặt phẳng). Gọi góc đỉnh của nón là 2α.

a/ Với góc α nào thì diện tích toàn phần của hình nón bằng $\frac{12}{5}$ diện tích toàn phần của nửa hình cầu.

b/ Với góc α nào thì hình nón có thể tích nhỏ nhất.

Giải



Gọi (SAB) là một tiết diện qua đỉnh S và tâm H của hình nón ngoại tiếp với nửa hình cầu bán kính r, ta có:

$$HI = r;\ \widehat{AHI} = \widehat{ASH} = \frac{1}{2}\widehat{ASB} = \alpha$$

$(SH \perp AH,\ HI \perp SA \Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{ASH})$

$$\Rightarrow AH = \frac{HI}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{AH}{\sin\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha\sin\alpha};\ SH = \frac{HI}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha}$$

Gọi S_c^{tp}, S_n^{tp} và V_n theo thứ tự là diện tích toàn phần của nửa hình cầu, hình nón và thể tích của hình nón, ta có :

$$S_c^{tp} = \pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2$$

$$S_n^{tp} = \pi AH^2 + \pi AH.SA = \pi\frac{r^2}{\cos^2\alpha} + \pi\frac{r}{\cos\alpha}.\frac{r}{\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$\text{Vì } S_n^{tp} = \frac{12}{5}S_c^{tp} \Leftrightarrow \frac{\pi r^2(\sin\alpha + 1)}{\sin\alpha - \sin^3\alpha} = \frac{12}{5}.3\pi r^2$$

$$\Leftrightarrow 36\sin^3\alpha - 31\sin\alpha + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 36(\sin\alpha + 1)\left(\sin\alpha - \frac{5}{6}\right)\left(\sin\alpha - \frac{1}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{5}{6} \vee \sin\alpha = \frac{1}{6}$$

(Vì α là một nửa góc ở đỉnh của hình nón $\Rightarrow \frac{\pi}{2} > \alpha > 0$)

Tương ứng diện tích toàn phần của hình nón bằng $\frac{12}{5}$ diện tích toàn phần của nửa mặt cầu. (ycbt)

b/ Ta có : $V_n = V_n(\alpha) = \frac{1}{3}\pi AH^2.SH = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{\cos^2\alpha}.\frac{r}{\sin\alpha}$

$$\Rightarrow V_n = \frac{1}{3}\pi r^3\frac{1}{\cos^2\alpha\sin\alpha} = \frac{1}{3}\pi r^3\frac{1}{\sin\alpha - \sin^3\alpha}$$

Do đó : $V'_n = V'_n(\alpha) = \dfrac{1}{3}\pi r^3 \dfrac{3\sin^2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha}{(\sin\alpha - \sin^3\alpha)^2}$

$$\Rightarrow V'_n(\alpha) = \pi r^3 \frac{\cos\alpha\left(\sin\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\sin\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}{(\sin\alpha - \sin^3\alpha)^2}$$

Khi α biến thiên trong khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì :

$$V'_n = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1, \text{ trong đó } \sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên :

α	0		α_1		$\pi/2$
V'_n		$-$	0	$+$	
V_n		↘	$\dfrac{\pi r^3\sqrt{3}}{2}$	↗	

Do đó hàm $V_n(\alpha)$ đạt cực tiểu tại $\alpha = \alpha_1$.

Vậy với α xác định bởi $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ thì hình nón có thể tích nhỏ nhất :

$$V_n = \pi r^3 . \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (ycbt)}$$

Bài 385 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM – 1977)

Cho hình chóp tam giác đều SABC, cạnh đáy là a. Góc ở đỉnh của mặt bên là α.

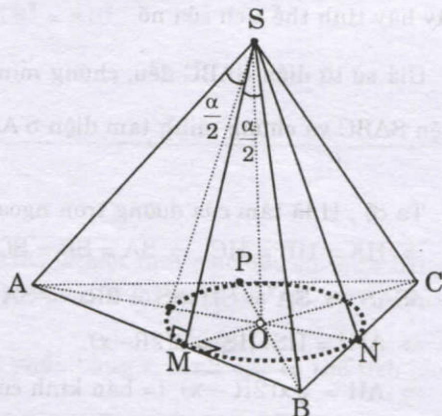
a/ Tính thể tích của hình chóp đã cho.

b/ Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S nội tiếp trong hình chóp đó.

Giải

a/ Thể tích của hình chóp đều S.ABC

$$V = \frac{1}{3}dt(ABC) \times SO \qquad (1)$$



Trong đó, O tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi M là trung của AB

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{3}CM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Trong ΔSAM ta có : $SM = \dfrac{MA}{\tan\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}$

Trong ΔSOM ta có :

$$SO^2 = SM^2 - OM^2 = \frac{a^2}{4\tan^2\dfrac{\alpha}{2}} - \frac{3a^2}{36} = \frac{9a^2 - 3a^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{36\tan^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{3a^2\left(3 - \tan^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}{36\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{3 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}}{6\tan\frac{\alpha}{2}}$$

Để ý thấy : $dt(\Delta ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Nên : $\overset{(1)}{\Rightarrow} V = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{3}\sqrt{3 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}}{6\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^3\sqrt{3 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}}{24\tan\frac{\alpha}{2}}$ (ycbt)

b/ Ta có đáy của hình nón là hình tròn tâm O, bán kính $R = OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và đường sinh $l = SM = \frac{a}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là :

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi \times OM \times SM = \pi\frac{a\sqrt{3}}{6} \times \frac{a}{2\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{12\tan\frac{\alpha}{2}} \text{ (ycbt)}$$

Bài 386 (ĐẠI HỌCTỔNG HỢP KHỐI A – 1977)

Cho một hình cầu tâm O bán kính R đường kính SS'. Một mặt phẳng vuông góc với SS' cắt hình cầu theo một đường tròn tâm H sao cho ABC là một tam giác đều nội tiếp trong đường tròn này. Đặt SH = x.

a/ Tính những cạnh của tứ diện SABC. Định x để SABC là một tứ diện đều, trong trường hợp này hãy tính thể tích của nó.

b/ Giả sử tứ diện SABC đều, chứng minh thể tích của tứ diện S'ABC bằng $\frac{1}{2}$ thể tích của tứ diện SABC và chứng minh tam diện S'ABC có đỉnh là S' có 3 góc vuông.

Giải

a/ Ta có : H là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC đều.

$\Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow SA = SB = SC$

$\Delta SAS' \Rightarrow SA^2 = SH \times SS' = 2Rx \Rightarrow SA = SB = SC = \sqrt{2Rx}$

$\Rightarrow AH^2 = HS \times HS' = x(2R - x)$

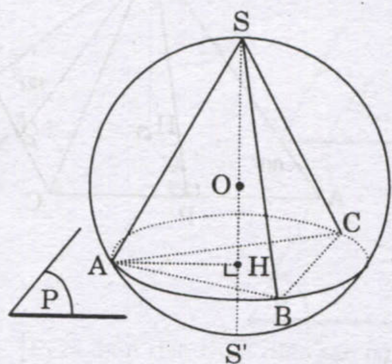
$\Rightarrow AH = \sqrt{x(2R - x)}$ (= bán kính của đường tròn ngoại tiếp) ΔABC đều.

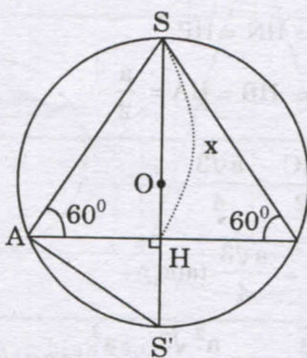
$\Rightarrow AB = AC = BC = \sqrt{3}\, AH = \sqrt{3x(2R - x)}$

Lúc đó : S.ABC là tứ diện đều $\Leftrightarrow SA = AB \Leftrightarrow \sqrt{2Rx} = \sqrt{3x(2R - x)}$

$\Leftrightarrow 2Rx = 3x(2R - x)\ (0 < x < 2R) \Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}$ (ycbt)

Thể tích của tứ diện đều S.ABC : $V = \frac{1}{3}dt(\Delta ABC) \times SH = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$ (ycbt)





b) Xét : $S'H = 2R - SH = 2R - x = 2R - \frac{4}{3}R = \frac{2R}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{S'.ABC} = \frac{1}{3}dt(\Delta ABC) \times S'H \\ V_{S.ABC} = \frac{1}{3}dt(\Delta ABC) \times SH \end{cases}$$

Do đó : $\frac{V_{S'.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH'}{SH} = \frac{\frac{2R}{3}}{\frac{4R}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S'.ABC} = \frac{1}{2}.V_{S.ABC}$

Lại có : $S'A^2 = S'H \times SS' = \frac{2R}{3} \times 2R = \frac{4R^2}{3} = S'B^2 = S'C^2$

$\Rightarrow S'A^2 + S'B^2 = \frac{8R^2}{3}$; $AB^2 = \frac{8R^2}{3} \Rightarrow S'A^2 + S'B^2 = AB^2$

Vậy : $\widehat{AS'B} = 90^0$

Hoàn toàn tương tự : $\widehat{AS'C} = \widehat{BS'C} = 90^0$

Vậy tam diện S'ABC là một tam diện vuông. (ycbt)

Bài 387 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI – 1994)

1/ Tính thể tích của hình chóp S.ABC, biết rằng đáy ABC là một tam giác đều có cạnh bằng a, mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, hai mặt bên còn lại cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng α.

2/ Trong các hình nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π, hình nào có thể tích lớn nhất ?

Giải

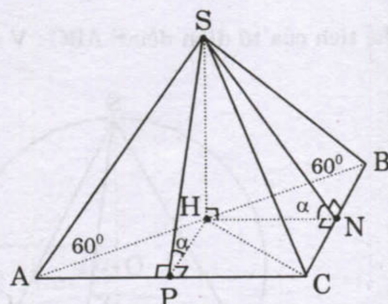
1/ Từ S kẻ $SH \perp AB$. Giả thiết đã có :

$(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Từ H kẻ $HN \perp BC$, $HP \perp AC$

Theo định lý ba đường vuông góc, ta có :

$$\begin{cases} SN \perp BC \\ SP \perp AC \end{cases} \Rightarrow \alpha = \widehat{SNH} = \widehat{SPH}$$



$\Delta SHN = \Delta SHP \Rightarrow HN = HP$

$\Delta HNB = \Delta HPA \Rightarrow HB = HA = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow HN = HP = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow SH = HN\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\tan\alpha$

và $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\tan\alpha.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{16}\tan\alpha$ (ycbt)

2/ Xét : $S_{tp} = \pi = \pi R^2 + \pi Rl$ (l chiều dài đường sinh)

$\Rightarrow 1 = R^2 + Rl \Rightarrow l = \dfrac{1 - R^2}{R} = \dfrac{1}{R} - R$

Lúc đó : $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.h = \dfrac{\pi}{3}R^2\sqrt{l^2 - R^2} = \dfrac{\pi}{3}R^2\sqrt{\left(\dfrac{1}{R} - R\right)^2 - R^2}$

$\Rightarrow V = \dfrac{\pi}{3}R^2\sqrt{\dfrac{1}{R^2} - 2} = \dfrac{\pi}{3}R\sqrt{1 - 2R^2}$

$\Rightarrow V^2 = \dfrac{\pi^2}{9}R^2(1 - 2R^2) = \dfrac{\pi^2}{18}.2R^2(1 - 2R^2) \leqslant \dfrac{\pi^2}{18}.\left(\dfrac{2R^2 + 1 - 2R^2}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{72}$ (1)

$V \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{72}} = \dfrac{\pi.\sqrt{2}}{12}$ (2)

Đẳng thức trong (1) hoặc (2) xảy ra $\Leftrightarrow 2R^2 = 1 - 2R^2$

$\Leftrightarrow R^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow R = \dfrac{1}{2}.$

Vậy : $\max V = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{12}$ tương ứng $R = \dfrac{1}{2}$; $l = \dfrac{3}{2}$ (ycbt)

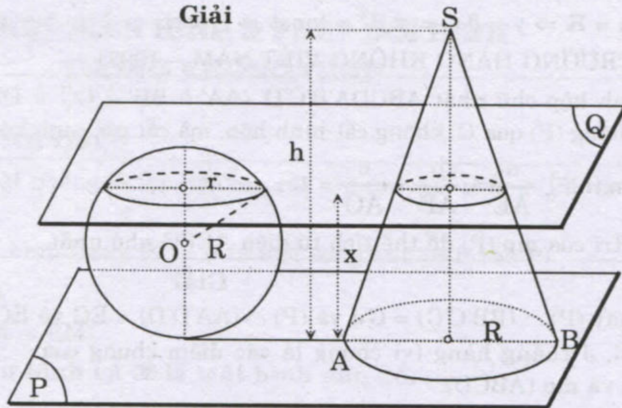
Bài 388 (ĐẠI HỌC TÀI CHÁNH KẾ TOÁN – 1995)

Cho hình cầu tâm O bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng (P). Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P), có chiều cao h, có bán kính đáy bằng R. Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P). Người ta cắt hai hình đó bằng một mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện. Gọi x là khoảng cách giữa (P) và (Q).

1/ Tính tổng diện tích hai thiết diện với giả thiết $x < 2R$ và $x < h$.

2/ Khảo sát theo x sự biến thiên của tổng diện tích hai thiết diện này.

Giải



1/ Gọi : $\begin{cases} S_1 \text{ là diện tích thiết diện tạo bởi (Q) và hình cầu.} \\ S_2 \text{ là diện tích thiết diện tạo bởi (Q) và hình nón.} \end{cases}$

Ta có : $\begin{cases} S_1 = \pi r^2 = \pi\left[R^2 - (x - R)^2\right] = \pi(2Rx - x^2) \\ \dfrac{S_2}{\pi R^2} = \dfrac{(h - x)^2}{h^2} \Rightarrow S_2 = \dfrac{\pi R^2 (h - x)^2}{h^2} \end{cases}$

Lúc đó : $f(x) = S_1 + S_2 = \pi(2Rx - x^2) + \dfrac{\pi R^2 (h - x)^2}{h^2}$ 1

2/ Ta viết : $f(x) = \dfrac{\pi(R^2 - h^2)x^2 - 2\pi Rh(R - h)x + \pi R^2 h^2}{h^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2\pi(R - h)\left[(R + h)x - Rh\right]}{h^2}$

Ta chia nhỏ các khả năng sau để lập bảng biến nhiên :

❒ **TH_1 : R > h** $\Rightarrow R - h > 0$

Ta có bảng biến thiên :

$\Rightarrow$ (ycbt)

x	0		$\dfrac{Rh}{R+h}$		h
f'(x)		−	0	+	
f(x)		↘		↗	

❒ **TH_2 : R < h < 2R** $\Rightarrow R - h < 0$

Ta có bảng biến thiên :

$\Rightarrow$ (ycbt)

x	0		$\dfrac{Rh}{R+h}$		h
f'(x)		+	0	−	
f(x)		↗		↘	

❒ **TH_3 : R < 2R ⩽ h** $\Rightarrow R - h < 0$

Ta có bảng biến thiên :

$\Rightarrow$ (ycbt)

x	0		$\dfrac{Rh}{R+h}$		h
f'(x)		+	0	−	
f(x)		↗		↘	

❐ **TH_4 : h = R** $\Rightarrow y = f(x) = \pi R^2 = const \Rightarrow$ (ycbt).

Bài 389 (TRƯỜNG HÀNG KHÔNG VIỆT NAM – 1997)

Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' (AA' // BB' // CC' // DD'), AA' = a; AB = b; AD = c. Một mặt phẳng (P) qua C' không cắt hình hộp, mà cắt các cạnh kéo dài AA'; AB; AD tại E; F; G.

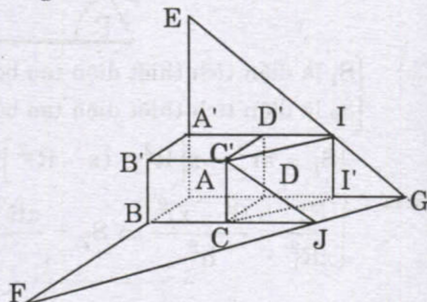
a/ Chứng minh : $\frac{a}{AE} + \frac{b}{AF} + \frac{c}{AG} = 1$.

b/ Tìm vị trí của mp (P) để thể tích tứ diện AEFG nhỏ nhất.

Giải

a/ Để ý thấy (P) $\cap$ (BB'C'C) = C'J và (P) $\cap$ (AA'D'D) = EG và EG // C'J

$\Rightarrow$ F, G, J thẳng hàng (vì chúng là các điểm chung của hai mp (P) và mp (ABCD).



Gọi I = EG $\cap$ A'B'C'D'.

Kẻ II' $\perp$ mp (ABCD)

$\Rightarrow$ C'I = CI', IG = C'J và C'I // FG

$\Rightarrow$ C'I // CI' // FG

Định lý Thalès cho :

$$\frac{II'}{AE} = \frac{GI'}{GA} = \frac{GI}{GE} \Leftrightarrow \frac{a}{AE} = \frac{CJ}{GA}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{AE} = \frac{BJ - BC}{GA} \Leftrightarrow \frac{a}{AE} = \frac{BJ - c}{GA}$$

Do đó : $\frac{a}{AE} + \frac{b}{AF} + \frac{c}{AG} = \frac{BJ - c}{GA} + \frac{AB}{AF} + \frac{c}{AG} = \frac{BJ}{GA} + \frac{AB}{AF}$ (1)

Tương tự : $\frac{BJ}{AG} = \frac{BF}{AF}$, thay vào (1), ta được :

$$\frac{a}{AE} + \frac{b}{AF} + \frac{c}{AG} = \frac{BF}{AF} + \frac{AB}{AF} = \frac{AF}{AF} = 1 \text{ (đpcm).}$$

b/ Gọi V là thể tích tứ diện AEFG ta có :

$$V = \frac{1}{6}AF.AG.AE = \frac{1}{6}abc.\frac{AE}{a}.\frac{AF}{b}.\frac{AG}{c} = \frac{abc}{6}.\frac{1}{\frac{a}{AE}.\frac{b}{AF}.\frac{c}{AG}}$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có :

$$V \geqslant \frac{abc}{6}.\frac{1}{\left(\frac{\frac{a}{AE} + \frac{b}{AF} + \frac{c}{AG}}{3}\right)^3} = \frac{9abc}{2} \quad (2)$$

Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{AE}{a} = \frac{AF}{b} = \frac{AG}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} AE = 3a \\ AF = 3b \\ AG = 3c \end{cases}$

Tương ứng : $\min V = \frac{9abc}{2}$ (ycbt).

Chuyên đề 21: PHÉP BIẾN HÌNH & PHÉP DỜI HÌNH TRONG KHÔNG GIAN

I. GIẢN LƯỢC KIẾN THỨC TỐI THIỂU

- Mỗi hình $\mathcal{H}$ bất kỳ của mặt phẳng là tập hợp con của tập các mặt phẳng (P) : ta viết $\mathcal{H} \subset P$ hay (P).
- **ĐN$_1$:** (f là một phép biến hình trong P) $\Leftrightarrow$ (f là một song ánh từ P vào P)

  Ta viết : $f: \quad P \longrightarrow P$

  $M \longmapsto M' = f(M)$
- **ĐN$_2$: f là một phép biến hình và $\mathcal{H}$ là một hình nào đó.**

  $\overset{(dn)}{\Leftrightarrow}$ **$\mathcal{H}' = f(\mathcal{H}) = \{M' = f(M) \mid M \in \mathcal{H}\}$: $\mathcal{H}'$ là hình biến của $\mathcal{H}$ qua f.**
- **Điểm bất động.**

  M là điểm bất động của f nếu f(M) = M.
- **Phép biến hình đồng nhất.**

  f được gọi là phép biến đổi đồng nhất, nếu qua f mọi điểm của mặt phẳng đều bất động.

  Ký hiệu : I hay e và ta có : $\forall M \in P : I(M) = e(M) = M$.
- **Hình bất động.**

  Qua f : $\mathcal{H}$ được gọi là bất động nếu : $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.
- **Điểm kép : M là điểm kép của phép biến hình $\Leftrightarrow$ f(M) = M.**
- **Phép biến hình ngược.**

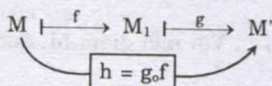
  Vì phép biến hình f là một song ánh trên P, nên tồn tại ánh xạ ngược f^{-1} cũng là song ánh từ P vào P.

  $$M' = f(M) \Leftrightarrow M = f^{-1}(M)$$
- **Tích của hai phép biến hình.**

  Cho $\begin{cases} f \text{ là phép biến hình M thành } M_1 \\ g \text{ là phép biến hình } M_1 \text{ thành } M' \end{cases}$

  Thì phép biến hình h biến trực tiếp M thành M' được gọi là tích của hai phép biến hình f và g theo thứ tự đó.

  Ký hiệu : $h = g_o.f \Leftrightarrow h(M) = g_of(M) = g[f(M)]$



Phép biến hình bảo toàn kích thước của hình gọi là phép dời hình.

1. TA XÉT CÁC PHÉP DỜI HÌNH ĐẶC BIỆT NHƯ SAU :

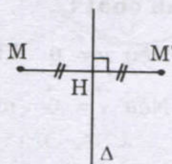
- **Phép đối xứng trục**

  Trong mặt phẳng (P) cho đường thẳng Δ cố định. Với mỗi điểm M, dựng điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của đoạn MM'.

  $\Rightarrow$ Điểm M' là điểm đối xứng của M qua phép đối xứng trục Δ.

  Ký hiệu phép đối xứng trục Δ là : $Đ_\Delta$

  Vậy : $Đ_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \perp MM' \text{ tại } H \\ \overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM} \end{cases}$

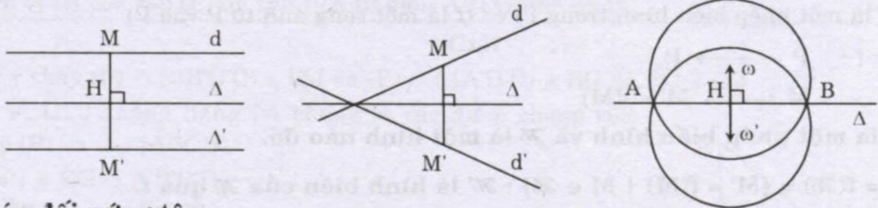


Tính chất :

- Trục Δ là tập hợp các điểm kép.
- Hình biến của một đường thẳng d là một đường thẳng d' có tính chất.

khi d // Δ ⇒ d // d'
khi d cắt Δ ⇒ d' cắt d : lúc đó Δ là phân giác của góc hợp bởi d và d'.

- Hình đối xứng trục của một đường tròn (C) là một đường tròn (C') có cùng bán kính.



❒ **Phép đối xứng tâm**

Trong mặt phẳng (P) cho một điểm I cố định. Với mỗi điểm M dựng điểm M' sao cho I là trung điểm của đoạn MM'.

⇒ Điểm M' là điểm đối xứng của M qua phép đối xứng tâm I.

Ký hiệu phép đối xứng tâm I : $Đ_I$

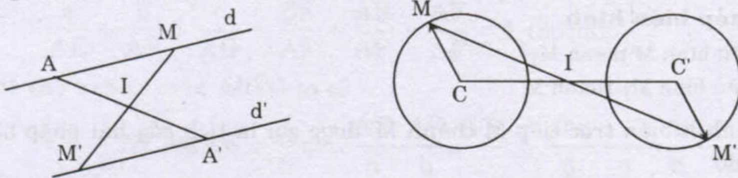
Vậy : $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$

Tính chất :

- Tâm I là điểm kép duy nhất.
- Hình biến của một đường thẳng d là một đường thẳng d ' có tính chất.

d không qua I ⇒ khi d' // d; d qua I ⇒ khi d' ≡ d.

- Hình biến của đường tròn (C) tâm C là đường tròn (C') tâm C' có cùng bán kính và I là trung điểm của CC'.



❒ **Phép tịnh tiến**

Trong mặt phẳng (P) cho vectơ cố định $\vec{v}$. Với mỗi điểm M, dựng điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

⇒ Điểm M' là điểm đối xứng của M trong phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$.

Ký hiệu phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ là : $\mathcal{T}_{\vec{v}}$

Tóm tắt : $\mathcal{T}_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Tính chất :

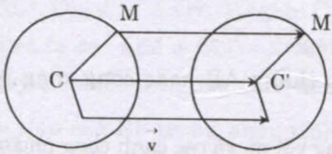
- Nếu $\vec{v} \neq \vec{0}$: không có điểm bất động.
- Nếu $\vec{v} = \vec{0}$: mọi điểm đều bất động : $\mathcal{T}_{\vec{v}} = e$ là phép biến đổi đồng nhất.
- Hình biến của vectơ $\overrightarrow{MN}$ vectơ $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

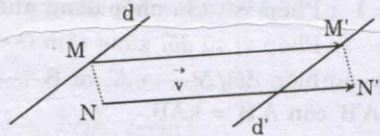
- Hình biến của một đường thẳng d là một đường thẳng d ' với :

  Khi d không cùng phương với $\vec{v} \Rightarrow d' // d$

  Khi d cùng phương với $\vec{v} \Rightarrow d' \equiv d$

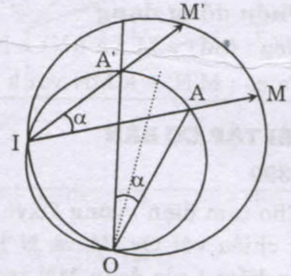
- Hình biến của đường tròn (C) tâm C là đường tròn (C') có cùng bán kính và $\overrightarrow{CC'} = \vec{v}$.





❒ Phép quay

- **ĐN : Cho một điểm O cố định và góc định hướng α. Phép quay tâm O với góc quay φ là một phép dời hình biến điểm O thành chính nó và biến mỗi điểm M thành M' sao cho** $\begin{cases} OM' = OM \\ (OM; OM') = \varphi \end{cases}$



Ký hiệu phép quay tâm O, góc quay φ là : Q(O; φ).

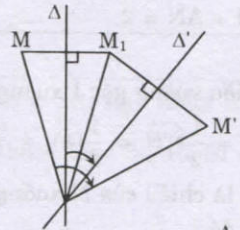
- Tâm O là điểm kép duy nhất.
- Tâm quay O là giao điểm của hai trong ba đường :
  - ➢ Trung trực của AA'.
  - ➢ Cung chứa góc α qua AA'.
  - ➢ Đường tròn (IAA') : I là giao điểm của AM và A'M'.

✪ Định lý :

Tích của hai phép đối xứng trục trong đó hai trục đối xứng cắt nhau tại O là một phép quay tâm O và góc quay bằng hai lần góc định hướng hợp bởi hai trục.

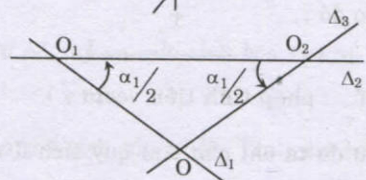
$Đ_{\Delta'} \circ Đ_{\Delta} = Q[O; 2(\widehat{\Delta; \Delta'})]$

$Đ_{\Delta} \circ Đ_{\Delta'} = Q[O; 2(\widehat{\Delta'; \Delta})]$



✪ Định lý đảo :

Mọi phép Q(O; φ) (với φ ≠ 0) có thể xem (bằng nhiều cách) là tích của hai phép đối xứng trục với hai trục cắt nhau tại O.



❒ Phép quay ngược

$Q^{-1}(O; \varphi) = Q(O; -\varphi)$

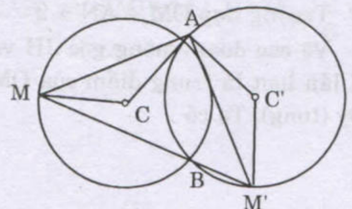
✪ Hình biến của đường thẳng :

$Q(O; \varphi) : d \longmapsto d'$ thỏa $(d; d') = \theta$

✪ Hình biến của đường tròn (C) tâm C bán kính R.

$Q(O; \theta) : (C; R) \longmapsto (C'; R)$

nghiệm đúng $(\widehat{OC; OC'}) = \theta$



✪ Ghi chú :

- ➢ *Nếu hai đường tròn (C) và (C') bằng nhau và cắt nhau tại A và B.*
- ➢ *Ta có thể biến (C) thành (C') bằng phép quy tâm A và góc quay là : (AC; AC').*
- ➢ *Đường nối liền hai điểm tương ứng M và M' phải qua B.*

2. PHÉP BIẾN HÌNH

❒ Phép vị tự

Phép biến hình VT(O; k) : M ⟶ M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ gọi là phép vị tự tâm O tỷ số $k \neq 0$)

- $k > 0$: Ta được phép vị tự thuận
- $k < 0$: Ta được phép vị tự nghịch
- $k = 1$: Phép vị tự là phép đồng nhất
- $k = -1$: Phép vị tự đối xứng tâm O với O là điểm kép

∇ Phép vị tự biến đổi A ⟶ A' và B ⟶ B', thì đường thẳng AB hoặc song song A'B' hoặc trùng A'B' còn A'B' = kAB.

∇ Phép vị tự biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với nó và các cạnh cùng phương nhau.

∇ Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng

∇ Phép vị tự biến một đường tròn thành một đường tròn có bán kính $R' = |k|R$ và O; O' thứ tự là tâm vị trí thuận và nghịch của hai đường tròn tâm I và I' thì $(I'I; O_1O_2) = -1$.

❒ Phép đồng dạng

Nếu : f(M) = M' và f(N) = N'

Ta có : M'N' = k.MN với k là hằng số.

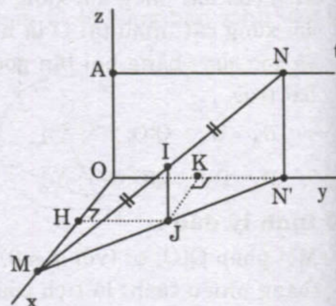
II. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 390

Cho tam diện vuông Oxyz. Gọi A là điểm cố định trên Oz với OA = 1; At là tia song song cùng chiều với Oy; M và N là hai điểm lần lượt chuyển động trên Ox và At. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN trong mỗi trường hợp sau :

1/ OM + AN = 2   2/ OM.AN = 4

Giải



Chiếu vuông góc I xuống mp (Oxy) thành J. Ta có :

$\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{N'N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ (vectơ cố định)

(N' là chiếu của N xuống mp (xOy)

Do đó :

$$J \xrightarrow{T_{\vec{v}}} I$$

($T_{\vec{v}}$: phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$)

Từ đó ta chỉ cần tìm quỹ tích J rồi suy ra quỹ tích điểm I nhờ phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ cho cả hai khả năng trong ycbt.

1/ Trường hợp OM + AN = 2

Vẽ các đoạn vuông góc JH và JK xuống Ox và Oy. Do J là trung điểm của MN' nên H và K lần lượt là trung điểm của OM và ON'. Chọn hệ trục toạ độ cho mp (Oxy) là Ox (hoành) và Oy (tung). Ta có :

$$J\begin{cases} x = \overline{OH} = \frac{1}{2}OM \\ y = \overline{OK} = \frac{1}{2}ON' = \frac{1}{2}AN \end{cases}$$

Suy ra : $x + y = \frac{1}{2}(OM + ON) = 1 \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{2}$

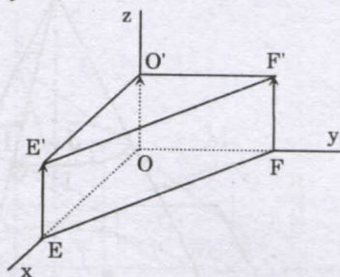
Với $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ và $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$ thì J thuộc đoạn thẳng EF trong mp(Oxy) với $\overline{OE} = \frac{1}{2}$ trên Ox và $\overline{OF} = \frac{1}{2}$ trên Oy.

Đảo lại lấy một điểm J thuộc đoạn EF ta chứng minh J là trung điểm đoạn MN' với M ∈ Ox, N' ∈ Oy và OM + ON' = 2. Kéo dài OJ và lấy JJ' = OJ.

Vẽ J'M ⊥ Ox, J'N' ⊥ Oy. Tứ giác OMJ'N' có tâm J là trung điểm của MN'.

Ngoài ra ta có : OM + ON' = 2OH + 2OK = 2(x + y) = 2

Vậy quỹ tích của J là đoạn EF xác định như đã nói ở trên nên quỹ tích của I là đoạn E'F', hình tịnh tiến của EF trong phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{V} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. (ycbt)



2/ Trường hợp OM.AN = 4

$\Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}OM.\frac{1}{2}AN = \frac{1}{4}OM.AN = 1$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ với $x > 0$

Tương tự J thuộc nhánh dương của hyperbol (H) có phương trình : $y = \frac{1}{x}$

Vậy quỹ tích của J là nhánh dương của hyperbol (H) có phương trình : $y = \frac{1}{x}$ nên quỹ tích của I là hình tịnh tiến của nhánh ấy qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ (ycbt)

III. GIẢI TOÁN THI

Bài 391 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – TP.HCM – 1994)

Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O, đường kính AB = 2R. Lấy điểm S thuộc đường thẳng vuông góc với (P) tại O sao cho $OS = R\sqrt{3}$; và I là điểm thuộc đoạn SO với $SI = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ còn M là điểm thuộc (C).

1/ Tính tỷ số $\frac{SH}{SM}$ với H là hình chiếu của I trên SM. Từ đó suy ra quỹ tích của H khi M di động trên (C).

2/ Xác định vị trí của M trên (C) để hình chóp H.AMB có thể tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này.

3/ Tính góc phẳng của nhị diện cạnh SB tạo bởi mặt phẳng (SAB) và (SMB) khi $\widehat{BAM} = \frac{\pi}{6}$.

Giải

1/ Ta có : $\Delta SHI \backsim \Delta SOM \Rightarrow \frac{SH}{SO} = \frac{SI}{SM} \Leftrightarrow SH.SM = SI.SO$

$$\Leftrightarrow \frac{SH}{SM} = \frac{SI.SO}{SM^2} \quad (1)$$

Mà : $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 4R^2$.

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\dfrac{SH}{SM} = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}.R\sqrt{3}.\dfrac{1}{4R^2} = \dfrac{1}{2}$ (ycbt).

Dựng HJ // OM; J ∈ SO ⇒ $\dfrac{JH}{OM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow JH = \dfrac{R}{2}$

Do đó quỹ tích H là đường tròn tâm J bán kính $\dfrac{R}{2}$ là hình vị tự của đường tròn (C) qua phép vị tự VT(S; $\dfrac{1}{2}$). (ycbt)

2/ Qua H, ta dựng HH' song song SO

$$\Rightarrow \begin{cases} HH' \perp (P) \text{ tại } H' \\ HH' = \dfrac{1}{2}SO \end{cases}$$

Khi đó : d[H; (P)] = HH' = $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V = V_{H.AMB} = \dfrac{1}{2}dt(\Delta AMB).HH' = \dfrac{1}{6}.AB.MK.HH'$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{6}.2R.\dfrac{R\sqrt{3}}{2}.MK$ với MK là đường cao ΔAMB.

$\Rightarrow V \leqslant \dfrac{R^2\sqrt{3}}{6}.M_0O = \dfrac{R^3\sqrt{3}}{6}$ (1); với $k \equiv O \Rightarrow M \equiv M_0$

Vậy : maxV = $\dfrac{R^3\sqrt{3}}{6}$ xảy ra ⇔ M là trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}$.

3/ Độc giả tự giải bằng định lý diện tích hình chiếu :

$$\cos\varphi = \frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (ycbt)}$$

Bài 392 (ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG TP.HCM - 1995)

Cho trên mặt phẳng (α) góc vuông xOy, đoạn SO = a vuông góc với mặt phẳng (α). Các điểm M, N chuyển động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có :

$$OM + ON = a$$

1/ Xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SOMN.

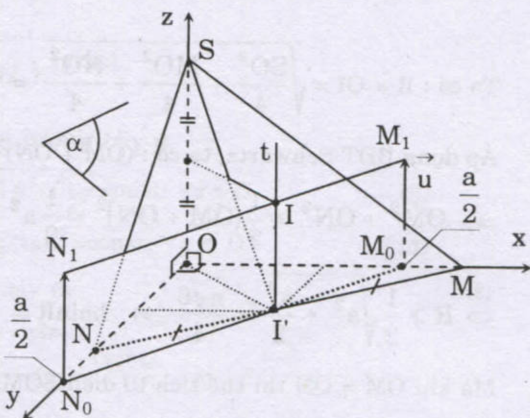
2/ Tìm quỹ tích tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOMN. Chứng minh rằng khi tứ diện có thể tích lớn nhất thì nó lại có bán kính mặt cầu ngoại tiếp nhỏ nhất.

Giải

1/ Thể tích V của tứ diện SOMN là :

$$V = V_{SOMN} = \frac{1}{3}.SO.S_{OMN}$$

$$= \frac{1}{6}a.OM.ON \qquad (1)$$



Áp dụng BĐT Cauchy

$$\Rightarrow V \leqslant \frac{a}{6}\left(\frac{OM + ON}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{24} \qquad (2)$$

Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra khi và chỉ khi:

$$OM = ON = \frac{a}{2}$$

Vậy : $\max V = \dfrac{a^3}{24}$, tương ứng : $OM = ON = \dfrac{a}{2}$ (ycbt)

2/ Gọi I' là trung điểm của MN. Từ I' ta dựng I't // SO

⇒ I't là trục đường tròn (OMN).

Gọi I là giao điểm của I't và mặt trung trực của SO

⇒ IS = IO = IM = IN

⇒ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOMN.

Trong mặt phẳng xOy, ta có :

$$I'\begin{cases} x'_I = \dfrac{OM}{2} \\ y'_I = \dfrac{ON}{2} \end{cases} \Rightarrow x_{I'} + y_{I'} = \frac{a}{2} \Rightarrow y_{I'} = -x_{I'} + \frac{a}{2}$$

Mặt khác, ta có : $OM + ON = a \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{OM}{2} < \dfrac{a}{2} \Rightarrow 0 < x_{I'} < \dfrac{a}{2}$.

Nên quỹ tích I' là khoảng M_0N_0 : $\begin{cases} 0 < x_{I'} < \dfrac{a}{2} \\ y_{I'} = -x_{I'} + \dfrac{a}{2} \end{cases}$

Nhận thấy : $II' = \frac{1}{2}SO; \forall M; N.$

Vậy quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện là khoảng M_1N_1 :

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{a}{2} \\ y = -x + \frac{a}{2} \end{cases} \text{(ycbt)}$$

là hình tịnh tiến của M_0N_0 theo vectơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OS}$.

$$\text{Ta có : } R = OI = \sqrt{\frac{SO^2}{4} + \frac{MO^2}{4} + \frac{NO^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + OM^2 + ON^2} \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Schwartz, ta có : $(OM + ON)^2 \leqslant 2(OM^2 + ON^2)$

$$\Rightarrow \quad OM^2 + ON^2 \geqslant \frac{1}{2}(OM + ON)^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} R \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \exists \min R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \text{ khi } OM = ON$$

Mà khi OM = ON thì thể tích tứ diện SOMN lớn nhất.

Vậy khi V_{SOMN} lớn nhất thì R nhỏ nhất. (đpcm)

Chuyên đề 22: BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Trong quá trình tìm kiếm lời giải nhiều bài toán hình học, sẽ rất có lợi nếu chúng ta xem xét các phần tử biên, phần tử giới hạn nào đó, tức là phần tử mà tại đó mỗi đại lượng hình học có thể nhận giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất, chẳng hạn như cạnh lớn nhất, cạnh nhỏ nhất của một tam giác; góc lớn nhất hoặc góc nhỏ nhất của một đa giác v...v..

Những tính chất của các phân tử biên, phân tử giới hạn nhiều khi giúp chúng ta tìm được lời giải thu gọn của bài toán.

Phương pháp tiếp cận như vậy tới lời giải bài toán được gọi là **nguyên tắc cực hạn**.

Như vậy bài toán cực trị hình học là cần thiết trong không gian.

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp cần kết hợp giữa các quan điểm tìm cực trị như sau :

A. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG DỤNG

❐ **Bất đẳng thức Cauchy cho các biến đại lượng không âm**

$$\left[\begin{array}{ll} f(x) = A(x) + B(x) \geq 2\sqrt{A(x).B(x)} = \text{const}; \forall x \in D & (1) \\ g(x) = A(x).B(x) \leq \left[\dfrac{A(x) + B(x)}{2}\right]^2 = \text{const}; \forall x \in D & (2) \end{array}\right.$$

✪ Nếu $\exists x_0 \in D$, để đẳng thức trong (1) hoặc (2) xảy ra

$$\Leftrightarrow A(x_0) = B(x_0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \min\limits_{x \in D} f(x) = f(x_0) \\ \max\limits_{x \in D} g(x) = g(x_0) \end{array}\right. \text{ (ycbt).}$$

❐ **Bất đẳng thức Schwartz cho các biến đại lượng tùy ý**

✪ $p(x) = a(x).\alpha(x) + b(x).\beta(x) \leq \sqrt{[a^2(x) + b^2(x)][\alpha^2(x) + \beta^2(x)]} = \text{const}; \forall x \in D$ (3)

$q(x) = [a^2(x) + b^2(x)][\alpha^2(x) + \beta^2(x)] \geq [a(x)\alpha(x) + b(x)\beta(x)]^2 = \text{const}; \forall x \in D$ (4)

✪ Nếu $\exists x_0 \in D$; để đẳng thức trong (3) hoặc (4) xảy ra

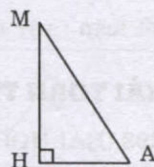
$$\Leftrightarrow \frac{a(x_0)}{\alpha(x_0)} = \frac{b(x_0)}{\beta(x_0)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \max\limits_{x \in D} p(x) = p(x_0) \\ \min\limits_{x \in D} q(x) = q(x_0) \end{array}\right. \text{ (ycbt).}$$

B. SỬ DỤNG TÍNH BỊ CHẶN CỦA HÀM LƯỢNG GIÁC

$$h(x) = \sin u(x), \cos u(x) \leq 1; \text{ nếu } \exists x_0 \in D : \left[\begin{array}{l} \sin u(x_0) = 1 \\ \cos u(x_0) = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \exists \max\limits_{x \in D} h(x) = h(x_0) = 1$$

C. SỬ DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ LẬP BẢNG BIẾN THIÊN

D. SỬ DỤNG CÁC NGUYÊN LÝ HÌNH HỌC CỰC HẠN

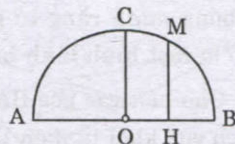


❐ $\left\{\begin{array}{l} \text{MH là đường vuông góc} \\ \text{MA là đường xiên} \\ \text{HA là hình chiếu} \end{array}\right. \Rightarrow \exists \min MA = MH \Leftrightarrow A \equiv H$

❐ Từ ý nghĩa đường kính là dây cung dài nhất của đường tròn, ta có :

HỆ QUẢ : M ở trên đường tròn (AB) đường kính AB; với O là tâm thì :

$\exists \max d[M; AB] = CO \Leftrightarrow MH \equiv CO; CO \perp AB$

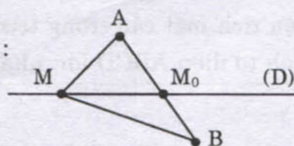


❐ Khoảng cách ngắn nhất giữa hai đường thẳng là độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

❐ **Xác định điểm M trên đường thẳng (d) để $(MA + MB)_{min}$**

Đây là bài toán Bất đẳng thức Δ, cần phân biệt các trường hợp :

∇ ***A; B ở khác bên so với (D)***

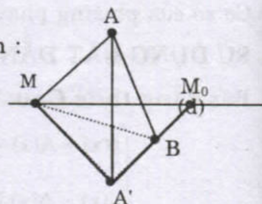


$MA + MB \geq AB \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \min(MA + MB) = AB \\ \text{tương ứng} : M \equiv M_0 = (AB) \cap (D) \end{array}\right.$

∇ ***A, B ở cùng bên so với (D)***

Dựng A' đối xứng với A qua (D).

Lúc đó : A' và B ở khác bên so với (D), nên trở về trường hợp trên :



$MA + MB \geqslant AB \quad \Leftrightarrow MA' + MA \geqslant AB.$

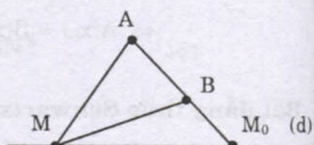
$\Rightarrow$ $\min(MA + MB) = \min(MA' + MB) = AB$; tương ứng : $M \equiv M_0 \equiv (A'B) \cap (D)$

✪ Kết luận : vậy trong mọi trường hợp ta xác định được M thỏa ycbt.

❐ **Xác định điểm m trên đường thẳng (d) để $|MA - MB|_{max}$**

Tương tự cần phân biệt hai trường hợp :

∇ ***A, B ở cùng bên so với (D)***

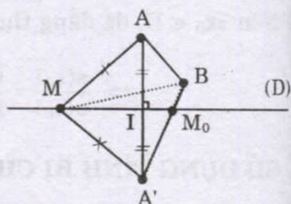


$\Rightarrow$ $|MA - MB| \leqslant AB$; $\max|MA - MB| = AB$

tương ứng $M \equiv M_0 = (AB) \cap (D)$

∇ ***A, B ở khác bên so với (D)***

$|MA - MB| \leqslant |MA' - MB| \leqslant AB$



Với A' là hình đối xứng của điểm A qua (d), thì A' và B ở cùng phía (D).

$\Rightarrow$ $\max|MA - MB| = \max|MA' - MB| = AB$; tương ứng $M \equiv M_0 = (A'B) \cap (D)$

✪ Kết luận : vậy trong mọi trường hợp ta đã xác định điểm M thỏa ycbt.

II. GIẢI TOÁN THI

Bài 393 (ĐẠI HỌC KHỐI A MIỀN BẮC – 1972)

Cho một khối tứ diện ABCD.

a/ Một mặt phẳng song song với cạnh BC cắt các cạnh AB, AC, DC, DB ở các điểm M, N, P, Q. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là một hình thang phải thỏa mãn điều kiện nào để tứ giác đó là một hình bình hành ? là một hình chữ nhật ?

b/ Cho biết các góc BAC, CAD, DAB là vuông, còn BCD là một tam giác đều cạnh a. Tính thể tích của khối tứ diện theo a.

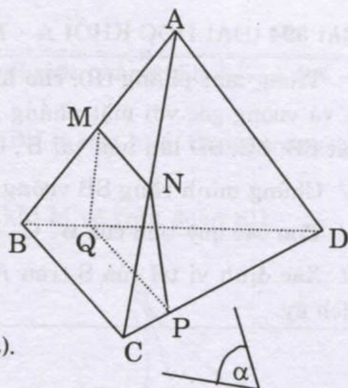
c/ Cho biết BCD là một tam giác đều cạnh a và có tâm là điểm O. Tính đoạn OA theo a sao cho mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nhận đường tròn (BCD) làm một đường tròn lớn. Tính diện tích mặt cầu trong trường hợp ấy. Xác định vị trí của đỉnh A trên mặt cầu ấy để thể tích hình tứ diện ABCD lớn nhất.

Giải

a/ Ta có : mp(P) // BC = (ABC) ∩ (BCD) $\quad \Rightarrow$ MN // PQ

Vậy thiết diện MNPQ là một hình thang (ycbt).

Muốn cho MNPQ là hình bình hành; tương tự trên ta phải có thêm điều kiện NP // MQ, (P) // AD.



Vậy điều kiện để MNPQ là hình bình hành là mặt phẳng (P) phải song song đồng thời với : BC và AD (ycbt).

Hơn nữa để MNPQ là hình chữ nhật thì ta phải có MN ⊥ NP.

Vì BC // MN và AD // NP ⇒ BC ⊥ AD

Vậy điều kiện để MNPQ là hình chữ nhật là BC ⊥ AD (ycbt).

b/ Tứ diện ABCD là tứ diện vuông ở A.

$$\begin{cases} BC = CD = DB = a \\ \Rightarrow \\ AB = AC = AD = \dfrac{CD\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Vậy thể tích khối tứ diện ABCD là :

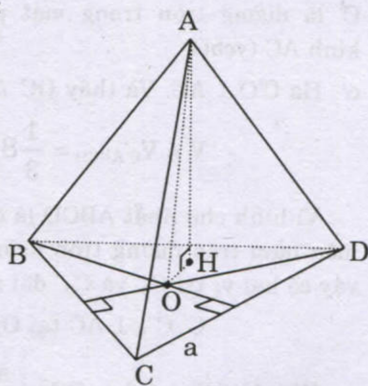
$$V = \frac{1}{3}AB.\left(\frac{1}{2}AC.AD\right) = \frac{1}{6}(AB)^3 = \frac{1}{6}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{a^3.\sqrt{2}}{24} \text{ (ycbt).}$$

c) Để ý đường tròn (BCD) là một đường tròn lớn của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và có O là tâm của tam giác BCD cạnh a, nên tâm O của tam giác đều BCD cũng chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

$$\Rightarrow OA = OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Từ đó diện tích S_c của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là :

$$S_c = 4\pi\ OA^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi a^2$$



Gọi AH là đường cao của tứ diện ABCD hạ từ đỉnh A xuống mặt đáy (BCD).

$$\Delta HOC\ (\hat{H} = 90^0) \Rightarrow AH \leqslant OA$$

Và tính được thể tích của khối tứ diện ABCD bằng :

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta BCD}.AH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\right).AH$$

$$= \frac{\sqrt{3}.a^2}{12}.AH \leqslant \frac{\sqrt{3}.a^2}{12}.OA \qquad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra ⇔ H ≡ A (hình chóp A.BCD đều)

$$\Rightarrow \quad \exists \max V = \frac{\sqrt{3}.a^2}{12}.OA \text{ (ycbt).}$$

Bài 394 (ĐẠI HỌC KHỐI A – MIỀN BẮC – 1974)

Trong mặt phẳng (P), cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Ax đi qua A và vuông góc với mặt phẳng P, người ta lấy một điểm S tùy ý, rồi dựng mặt phẳng Q qua A cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết (Q) $\perp$ SC.

a/ Chứng minh rằng SB vuông góc AB' và SD vuông góc với AD'.

b/ Tìm các quỹ tích của B', C', D' khi S chạy trên Ax.

c/ Xác định vị trí của S trên Ax sao cho hình chóp C'ABCD có thể tích lớn nhất và tính thể tích ấy.

Giải

a/ Ta có : $\left.\begin{matrix} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CB \perp (SAB) \supset AB' \Rightarrow CB \perp AB'$

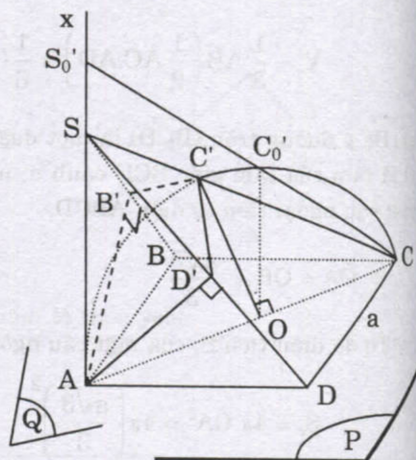
Mặt khác ta có : SC $\perp$ AB' (vì AB' nằm trong mp(Q) mà SC $\perp$ Q).

Do đó AB' $\perp$ (SBC) $\supset$ SB $\Rightarrow$ AB' $\perp$ SB (đpcm).

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có AD' $\perp$ SD (đpcm).

b/ Để ý : $\begin{cases} B' \in (SAB) \\ \widehat{AB'B} = 90^0; \text{ A, B cố định} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vậy quỹ tích của những điểm B' là đường tròn (trong mặt phẳng (SAB) đường kính AB. (Độc giả tự làm phần đảo)



• Tương tự ta có quỹ tích của những điểm D' trong mặt phẳng (SAD) đường kính AD (ycbt).

• Tương tự ta cũng có quỹ tích của những điểm C' là đường tròn trong mặt phẳng (SAC) đường kính AC (ycbt).

c/ Hạ C'O $\perp$ AC. Và thấy OC' // SA; SA $\perp$ P nên :

$$V = V_{C'ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.OC'$$

Vì hình chữ nhật ABCD là cố định, nên thể tích V sẽ lớn nhất khi OC' là lớn nhất. C' luôn luôn nằm trên đường tròn đường kính AC. Vì vậy OC' sẽ lớn nhất khi nó là bán kính. (Như vậy có hai vị trí C_0' và C_0'' đối xứng với nhau qua AC cùng thỏa mãn tính chất đó :

$C'_0C''_0 \perp AC$ tại O; $C'_0C''_0 \subset (SAC)$.

Khi đó $OC' = OA = OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ hay này tam giác vuông SAC có OC' là đường trung bình, tương ứng do đó : $AS = 2OC' = a\sqrt{2}$.

Vậy khi S (nằm trên Ax) cách A một đoạn $a\sqrt{2}$ (có hai vị trí S_0 và S_0' đối xứng với nhau qua A) thì hình chóp C'ABCD có thể tích lớn nhất, và thể tích đó là :

$$V = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \text{ (ycbt).}$$

Bài 395 (ĐẠI HỌC Y – NHA – DƯỢC – 1976)

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi SA là đoạn thẳng góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a và M là một điểm di động trên đoạn SD. Đặt SM = x.

a/ Mặt phẳng (ABM) cắt đoạn SC tại N. Chứng minh tứ giác MABN là một hình thang vuông.

b/ Đặt $y = AM^2$. Tính y theo a và x.

c/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đường biểu diễn của $y = AM^2$ khi M vẽ trên đoạn SD.

Giải

a/ Ta có : $AB \,//\, CD \Rightarrow AB \,//\, (SCD)$; $AB \subset (ABMN)$

$\Rightarrow (ABMN) \cap (SDC) = MN \,//\, AB \,//\, CD$

Lại có : $\left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SAD)$

$\Rightarrow AB \perp AM \Rightarrow MN \perp (SAD)$

$\Rightarrow MN \perp AM$

Vậy AMNB là một hình thang vuông hai đáy là AB và MN (ycbt).

b/ Gọi H là hình chiếu của M xuống cạnh CD.

$$\Delta DMH \backsim \Delta DAS \Rightarrow \frac{MH}{SA} = \frac{MD}{DS} = \frac{a\sqrt{2} - x}{a\sqrt{2}} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta AHM \Rightarrow AM^2 = AH^2 + HM^2$$

HMD vuông cân $\Rightarrow HD = HM = \dfrac{a\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow AH = AD - HD = a - \left(a - \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Do đó: $AM^2 = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(a\sqrt{2} - x)^2}{2} = \dfrac{x^2 + 2a^2 + x^2 - 2a\sqrt{2}.x}{2}$

$$\Rightarrow AM^2 = x^2 - a\sqrt{2}x + a^2$$

Vậy $y = x^2 - a\sqrt{2}x + a^2$; $\forall x \in [0; a\sqrt{2}]$ (ycbt).

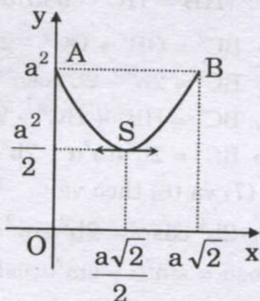
c/ Miền xác định của y : $D_f = [0; a\sqrt{2}]$

$$\Rightarrow y' = 2x - a\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

Bảng biến thiên :

x	0		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		$a\sqrt{2}$
y		–	0	+	
y'	a^2	↘	$\frac{a^2}{2}$	↗	a^2

Đồ thị :

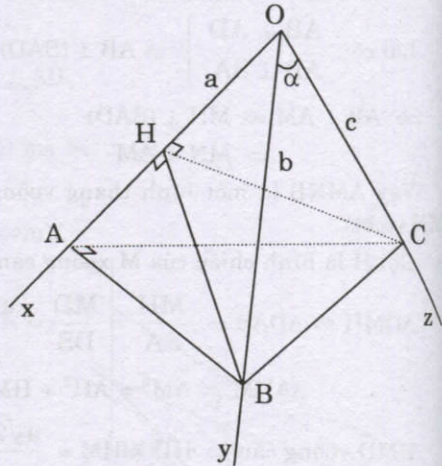


Đường biểu diễn là cung Parabola $\overset{\frown}{ASB}$.

Bài 396 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – TỔNG HỢP – 1980)

> Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz từng đôi một tạo với nhau một góc α $(0 < \alpha < 90^0)$ trên Ox, Oy, Oz lấy lần lượt các điểm A, B, C sao cho : OA = a, OB = b, OC = c.
>
> 1/ a, b, c phải thỏa mãn hệ thức gì để tam giác ABC có góc A vuông ? Hãy tìm điều kiện cần và đủ ràng buộc b, c, a để tìm được a thỏa mãn hệ thức ấy.
>
> 2/ Giả sử α cố định $(0 < \alpha < 90^0)$ và b = c cố định. Xác định a để tam giác ABC có góc A lớn nhất. Giá trị lớn nhất ấy của góc A bằng bao nhiêu.
>
> 3/ Với các giả thiết của 2. Hãy tính thể tích của tứ diện OABC ứng với giá trị lớn nhất của góc A.

Giải



1) ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ (1)

Định lý hàm cosin trong các tam giác :

$\Delta OAB, \Delta OBC, \Delta OAC$ cho :

$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ (1)

$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (2)

$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$ (3)

Thay (2), (3) và (4) vào (1).

(1)

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c)\cos\alpha$

$\Leftrightarrow a^2 - a(b + c)\cos\alpha + bc\cos\alpha = 0$

$\Leftrightarrow g(a) = a^2 - [(b + c)\cos\alpha]a + bc\cos\alpha = 0$ (5)

Để tìm được a thỏa mãn (5).

$\Leftrightarrow \Delta = (b + c)^2\cos^2\alpha - 4bc\cos\alpha \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \Delta = \cos\alpha[(b + c)^2\cos\alpha - 4bc] \geqslant 0$ $(0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow \cos\alpha > 0)$

$\Leftrightarrow (b + c)^2\cos\alpha - 4bc \geqslant 0$ (6) (ycbt)

(6) điều kiện cần và đủ ràng buộc b, c và a để tìm được a thỏa mãn (5).

2/ Xét giả thiết : b = c $\Leftrightarrow \Delta OAB = \Delta OAC$

Gọi $HB \perp OA \Leftrightarrow CH \perp OA \Rightarrow BH = CH$

Xét hai tam giác cân ABC và HBC; chúng có cạnh chung BC.

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \geqslant HB \\ AC \geqslant HC \end{cases} \Rightarrow \widehat{BAC} \leqslant \widehat{BHC} \Rightarrow \max\widehat{BAC} = \widehat{BHC}$$ tương ứng $A \equiv H$.

$$\Delta OBH \Rightarrow \begin{cases} OH = b\cos\alpha \\ HB = HC = b\sin\alpha \end{cases}$$

$\Delta OBC \Rightarrow BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB.OC\cos\alpha$

$\Leftrightarrow BC^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\alpha$ (7)

$\Delta HBC \Rightarrow BC^2 = HB^2 + HC^2 - 2HB.HC\cos H$

$\Leftrightarrow BC^2 = 2b^2\sin^2\alpha - 2b^2\sin^2\alpha\cos H$ (8)

So sánh (7) và (8) theo vế :

$\Rightarrow 2b^2 - 2b^2\cos\alpha = 2b^2\sin^2\alpha - 2b^2\sin^2\alpha\cos H$

$\Rightarrow 1 - \cos\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos H$

$\Rightarrow \sin^2\alpha\cos H = \sin^2\alpha + \cos\alpha - 1 = \cos\alpha - \cos^2\alpha$

$$\Rightarrow \cos H = \frac{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha.2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow H = \arccos\left(\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là : $\min A = H = \arccos\left(\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)$ (ycbt).

3/ Thể tích V của tứ diện OABC là :

$$V = \frac{1}{3}dt(\Delta HBC).OH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.HB.HC\sin H.OH$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{6}.b^2\sin^2\alpha.\sin H.b\cos\alpha = \frac{1}{12}b^2\sin\alpha.\sin2\alpha.\sin H \quad \text{(ycbt)}.$$

Bài 397 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – TỔNG HỢP – Y-NHA-DƯỢC – 1982)

Trên cạnh AD của hình vuông ABCD cạnh a, người ta lấy điểm M với AM = x ($0 \leqslant x \leqslant a$), và trên nửa đường thẳng Ax vuông góc tại A với mặt phẳng của hình vuông, người ta lấy điểm S với SA = y (y > 0).

a/ Chứng minh rằng nhị diện cạnh SB tạo bởi các mặt phẳng (SBA) và (SBC) là một nhị diện vuông.

b/ Gọi I là trung điểm của SC, H là hình chiếu vuông góc của I lên CM. Tìm quỹ tích của H khi M chạy trên cạnh AD và S chạy trên Ax.

c/ Tính thể tích hình chóp S.ABCM.

d/ Với giả thiết $x^2 + y^2 = a^2$, tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp S.ABCM.

Giải

a/ Ta có : $\begin{cases} AD \perp (SAB) \\ BC \,//\, AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

Vậy nhị diện (SB) là một nhi diện vuông (đpcm).

b/ Ta có : $OI \,//\, SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Mặt khác $IH \perp CM \Rightarrow OH \perp CM$ (định lý 3 đường vuông góc).

Vì $M \in (AD)$ và $S \in Ax$ nên H ở trong $\widehat{ACD}$. Vậy H ở trên cung tròn $\widehat{OH_0}$ của đường tròn đường kính OC với H_0 là trung điểm của CD, khi $M \in AD$ và $S \in Ax$.

• Đảo lại, lấy một điểm H bất kỳ trên cung OH_0, ta có : $OH \perp HC$; $CH \cap AD = M$, trên nửa đường thẳng Ox' // Ax lấy một điểm I sao cho CI cắt Ax tại S. Rõ ràng :

* I là trung điểm của SC.

* $IH \perp CM$ (định lý 3 đường vuông góc).

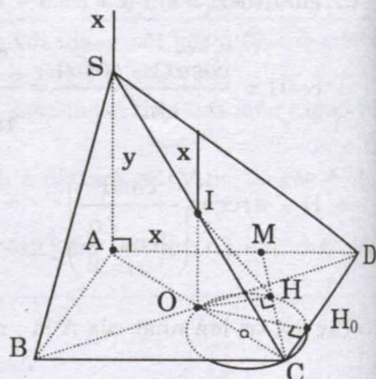
Kết luận : Quỹ tích H là cung tròn $\widehat{OH_0}$ của đường tròn đường kính OC trong mặt phẳng (ABCD) (xem hình) (ycbt).

c/ Thể tích hình chóp.

$$V(SABCM) = \frac{1}{3}dt(ABCM).SA$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.(AM + BC)AB.SA$$

$$= \frac{1}{6}(x + a).a.y \text{ (ycbt)}$$



d/ Xét : $x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$V = V(SABCM) = \frac{a}{6}(x + a)\sqrt{a^2 - x^2}$$

Ta có : maxV xảy ra $\Leftrightarrow$ $\max(3V)^2$ xảy ra

mà $3V^2 = \frac{a^2}{36}(x + a)(x + a)(x + a)(3a - 3x)$ (1)

Áp dụng BĐT Cauchy cho 4 số không âm, ta có :

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 3V^2 \leqslant \frac{a^2}{36}\left[\frac{(x+a)+(x+a)+(x+a)+(3a-3x)}{4}\right]^4$$

$$\Leftrightarrow V^2 \leqslant \frac{a^2}{36.3}\left(\frac{3}{2}a\right)^4 = \frac{81a^6}{36.3.16} = \frac{3a^6}{64} \Leftrightarrow V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 \quad (2)$$

Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ $a + x = 3a - 3x$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{a}{2}$

Do đó khi M là trung điểm AD thì thể tích V_{SABCM} cực đại và

$$\max V = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 \text{ (ycbt).}$$

Bài 398 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – TỔNG HỢP –Y–NHA–DƯỢC – 1983)

Trong không gian, cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = b; cạnh SA của hình chóp vuông góc với đáy, AS = 2a.

a/ M là một điểm trên cạnh AS, với AM = x ($0 \leqslant x \leqslant 2a$). Mặt phẳng MBC cắt hình chóp theo thiết diện gì ? Tính diện tích thiết diện ấy theo a, b, x.

b/ Xác định x sao cho thiết diện trên có diện tích lớn nhất.

c/ Xác định x sao cho mặt phẳng (MBC) chia hình chóp ra hai phần có thể tích bằng nhau.

Giải

a/ Gọi N là giao điểm của mặt phẳng (MBC) với SD. Lúc đó :

Mặt phẳng (MBC) chứa BC // AD.

Mà AD = (SAD) $\cap$ (ABCD)

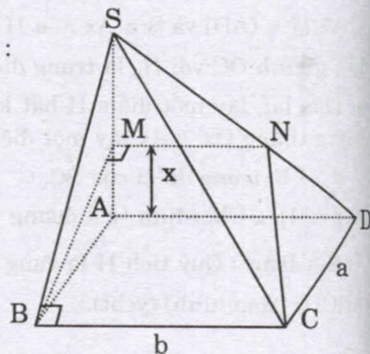
$\Rightarrow$ (MBC) $\cap$ (SAD) = MN // AD // BC

Hơn nữa vì BC $\perp$ AB và BC $\perp$ SA

$\Rightarrow$ BC $\perp$ (SAB) $\Rightarrow$ BC $\perp$ MB

Thành thử thiết diện MBCN là một hình thang vuông

($\hat{B} = \hat{M} = 90^0$)



$\Delta SMN \backsim \Delta SAD \Rightarrow \dfrac{MN}{AD} = \dfrac{SM}{SA}$

$\Rightarrow MN = AD.\dfrac{SM}{SA} = b.\dfrac{2a - x}{2a} = b\left(1 - \dfrac{x}{2a}\right)$

Vì vậy hình thang vuông MBCN có diện tích :

$$S = \frac{MN + BC}{2}.MB = \frac{b + b\left(1 - \dfrac{x}{2a}\right)}{2}.\sqrt{x^2 + a^2} = b\left(1 - \frac{x}{4a}\right)\sqrt{x^2 + a^2} \text{ (ycbt).}$$

b/ Vì S > 0, S đạt giá trị lớn nhất khi S^2 đạt giá trị lớn nhất.

Ta có : $S^2 = \dfrac{b^2}{16a^2}(4a - x)^2(x^2 + a^2) = \dfrac{b^2}{16a^2}f(x);\ \forall x \in [0;\ 2a]$

$\Rightarrow f'(x) = 2(x - 4a)(x^2 + a^2) + 2x(4a - x)^2$

$\Rightarrow f'(x) = 2(x - 4a)(2x^2 - 4ax + a^2)$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4a \vee x = \dfrac{a(2 \pm \sqrt{2})}{2}$

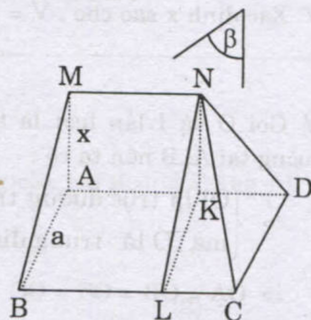
Lập được.bảng biến thiên của hàm số f(x) trên đoạn [0; 2a].

x	0		$\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$		$\frac{a(2+\sqrt{2})}{2}$		2a
f '(x)		–	0	+	0	–	
f(x)	$16a^4$	↘	$\frac{a^4(71-8\sqrt{2})}{4}$	↗	$\frac{a^4(71+8\sqrt{2})}{4}$	↘	$20a^4$

Dựa vào bảng biến thiên này ta thấy :

Vậy $\exists \max S^2 \Leftrightarrow \exists \max S = \dfrac{ab}{8}\sqrt{71 + 8\sqrt{2}}$ khi và chỉ

khi: $x = AM = \dfrac{a(2 + \sqrt{2})}{2}$ (ycbt).



c/ Hiển nhiên hình chóp S.ABCD có thể tích :

$$V = \frac{1}{3}AS.AB.AD = \frac{2a^2b}{3}$$

Để tính thể tích V của hình lăng trụ tam giác cụt MAB.NCD, ta dựng mặt phẳng (β) qua N và vuông góc với BC; thì mặt phẳng (P) cắt AD và BC lần lượt tại K và L, (P) chia lăng trụ cụt thành hai phần : lăng trụ tam giác đứng MAB.NKL có thể tích :

$$V_1 = MN.dt(MAB) = \frac{1}{2}abx\left(1 - \frac{x}{2a}\right)$$

và hình chóp đỉnh N, đáy KLCD, có thể tích :

$$V_2 = \frac{1}{3}NK.dt(KLCD) = \frac{1}{6}bx^2$$

thành thử lăng trụ cụt MAB.NCD có thể tích :

$$V' = V_1 + V_2 = \frac{1}{6}abx\left(3 - \frac{x}{2a}\right)$$

Yêu cầu bài toán cần xác định x (hiển nhiên $0 \leqslant x \leqslant 2a$) sao cho $V = 2V'$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2a^2b}{3} = \frac{1}{3}abx\left(3 - \frac{x}{2a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6ax + 4a^2 = 0$$

Phương trình này có nghiệm : $\left[\begin{array}{l} x = a(3+\sqrt{5}) \\ x = a(3-\sqrt{5}) \end{array}\right.$

Vì $0 \leqslant x \leqslant 2a$ nên chỉ có thể chọn : $x = a(3 + \sqrt{5})$ (ycbt).

Bài 399 (ĐẠI HỌC KT – TH – SP – NN – 1983)

Cho tứ diện SABC, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = 2a, AC = 3a, cạnh SB vuông góc với đáy $SB = a\sqrt{3}$.

a/ Chỉ rõ tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

b/ M là một điểm di động trên cạnh SC, đặt MC = x. Gọi H và K lần lượt là các hình chiếu vuông góc của M lên các mặt phẳng (ABC) và (SAB). Mặt phẳng KMH, cắt AB tại L. Chứng minh rằng : KMHL là một hình chữ nhật. Với giá trị nào của x thì KMHL là một hình vuông.

c/ Tính theo a và x độ dài đường chéo ML của hình chữ nhật KMHL. Với giá trị nào của x thì ML có độ dài nhỏ nhất ? Ứng với giá trị đã tìm được của x, hãy nêu lên đặc tính hình học của đoạn ML.

d/ Hãy tính theo a và x thể tích V của hình chóp đỉnh A, đáy KMHL. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm V khi M di động trên cạnh SC.

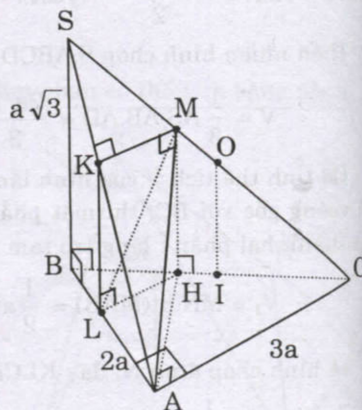
e/ Xác định x sao cho : $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.

Giải

a/ Gọi O và I lần lượt là trung điểm của SC và BC. Các tam giác SAC, SBC theo thứ tự vuông tại A, B nên ta có :

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{OI là trục đường tròn (ABC)} \\ \text{mà O là trung điểm SC} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow OA = OB = OS = OC$



Vậy O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC và bán kính mặt cầu là :

$$R = OA = \frac{SC}{2} = 2a$$

Thật vậy :

$$SC^2 = SB^2 + BC^2 = SB^2 + AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow SC^2 = 3a^2 + 4a^2 + 9a^2 = 16a^2$$

$\Rightarrow SC = 4a \Rightarrow R = 2a$ (ycbt).

b/ KMHL là hình chữ nhật.

$$\left.\begin{array}{l} MK \perp (SAB) \\ AC \perp (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow MK // AC \Rightarrow MK // HL // AC$$

$$\left.\begin{array}{l} MH \perp (ABC) \\ SB \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow MH // SB \Rightarrow MH // KL // SB$$

Vậy tứ giác KMHL là một hình bình hành.

Để ý đến $SB \perp AC \Rightarrow HL \perp LK$: như vậy tứ giác KMHL là một hình chữ nhật (đpcm).

Định x để KMHL là một hình vuông. Ta có :

$$\frac{MH}{SB} = \frac{CM}{SC} \Rightarrow MH = \frac{SB.MC}{SC} = \frac{a\sqrt{3}.x}{4a} = \frac{\sqrt{3}x}{4}$$

$$\frac{MK}{AC} = \frac{SM}{SC} \Rightarrow MK = \frac{AC.SM}{SC} = \frac{3a(4a - x)}{4a} = \frac{3(4a - x)}{4}$$

Vậy : KMHL là một hình vuông

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}x}{4} = \frac{3(4a - x)}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3}\,x = 3(4a - x) \Rightarrow x = 2a\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1) \text{ (ycbt).}$$

c/ Ta có : $ML^2 = MH^2 + HL^2 = \dfrac{3x^2}{16} + \dfrac{9(4a - x)^2}{16} = \dfrac{3(x^2 - 6ax + 12a^2)}{4}$

$$\Rightarrow ML = \frac{\sqrt{3(x^2 - 6ax + 12a^2)}}{2} = \frac{\sqrt{3(x - 3a)^2 + 9a^2}}{2}; \forall x \in [0; 4a]$$

$$\Rightarrow ML \geqslant \frac{\sqrt{9a^2}}{2} = \frac{3a}{2}; \forall x \in [0; 4a] \qquad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = 3a$

$\Rightarrow \min ML = \dfrac{3a}{2}$, xảy ra khi và chỉ khi $x = 3a$.

Ta có : $AB \perp (MKLH) \Rightarrow AB \perp ML$

$$\Rightarrow \min ML = \frac{3a}{2} = d[(AB); SC]$$

Vậy khi ML nhỏ nhất thì đoạn ML là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SC (ycbt).

d/ Thể tích V hình chóp A.MHKL.

$$V = \frac{1}{3}dt(MHKL).AL = \frac{1}{3}MK.MH.AL \qquad (2)$$

Ta có : $\left.\begin{array}{l} AB \perp BS \\ AB \perp ML \\ AB \perp AC \end{array}\right\} \Leftrightarrow$ BS, ML, AC cùng vuông góc với AB.

$\Leftrightarrow$ BS, ML, AC cùng nằm trong 3 mặt phẳng song song.

Áp dụng định lý Thalès $\Rightarrow \dfrac{AL}{AB} = \dfrac{CM}{CS} = \dfrac{x}{4a} \Rightarrow AL = \dfrac{x}{2}$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} V = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}(4a - x)\frac{x\sqrt{3}}{4}.\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{32}x^2(4a - x) \text{ (ycbt).}$$

Sau đây ta khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của V trong hệ trục (OxV).

- Miền xác định : $D_V = [0; 4]$.

- Đạo hàm: $V' = \frac{\sqrt{3}}{32}(-3x^2 + 8ax) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow V = 0 \\ x = \frac{8a}{3} \Rightarrow V = \frac{8\sqrt{3}}{27}a^3 \end{array}\right.$

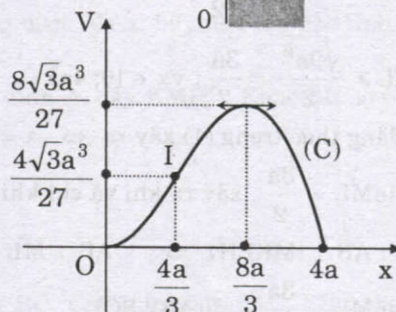
$$V'' \frac{\sqrt{3}}{2}(-6x + 8a) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{27}$$

Bảng biến thiên :

x	0		4a/3		8a/3		4a
V'	0	+	0	+		−	
V''		+		+	0	−	
V	0	↗	$\frac{4a^2\sqrt{3}}{27}$	↗	$\frac{8a^3\sqrt{3}}{27}$	↘	0

Vậy (C) là đồ thị của V trong ycbt.



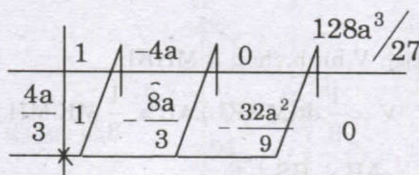
e/ Định x để : $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$

Xét : $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{32}x^2(4a - x) = \frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^3 - 4ax^2 + \frac{128}{27}a^3 = 0 \quad (3)$$

Để ý thấy : $f\left(\frac{4}{3}a\right) = 0$ nên ta có :



$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \frac{4a}{3} \\ x^2 - \frac{8}{3}ax - \frac{32}{9}a^2 = 0 \end{array}\right. \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{4a}{3} \\ x = \frac{4}{3}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)a \end{array}\right.$$

Vì $x \in [0; 4a]$ nên các nghiệm của (3) là : $x = \frac{4a}{3} \vee x = \frac{4}{3}(1 + \sqrt{3})a$

Vậy : $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}a^3 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{3} \vee x = \frac{4}{3}(1 + \sqrt{3}a)$ (ycbt).

Bài 400 (ĐẠI HỌC KINH TẾ TP.HCM – 1991)

Trong không gian cho đoạn OO' = h và hai nửa đường thẳng Od, O'd' cùng vuông góc với OO' và vuông góc với nhau. Điểm M chạy trên Od, điểm N chạy trên O'd' sao cho ta luôn có: $OM^2 + O'N^2 = k^2$ (với k là một độ dài cho trước).

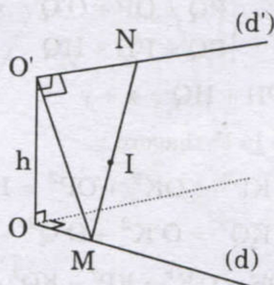
1/ Chứng minh rằng độ dài đoạn MN không đổi.

2/ Với vị trí nào của M trên Od và N trên O'd' thì tứ diện OO'MN có thể tích lớn nhất. Tính giá trị đó theo h và k.

3/ Muốn MN tiếp xúc với mặt cầu đường kính OO' thì h và k phải thỏa mãn điều kiện gì ? Nếu cách dựng MN trong trường hợp đó.

Gọi P và Q tương ứng là hai điểm nằm trên Od đoạn O'd'. Gọi H là hình chiếu của điểm giữa K của đoạn OO' lên PQ. Hãy chứng minh rằng khi PQ thay đổi sao cho OP + O'Q = PQ thì H nằm trên một đường cố định. Hãy chỉ ra đường cố định đó.

Giải



1/ Chứng minh đoạn MN không đổi :

$$\left.\begin{matrix} O'N \perp OO' \\ O'N \perp OM \end{matrix}\right\} \Rightarrow O'N \perp OO'M \Rightarrow O'N \perp O'M$$

Ta có : từ định lý Pythagore

$$MN^2 = O'N^2 + O'M^2 \quad (1)$$

$$O'M^2 = O'O^2 + OM^2 \quad (2)$$

$$\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} MN^2 = O'O^2 + O'N^2 + OM^2 \Rightarrow MN^2 = h^2 + k^2$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{h^2 + k^2} = \text{const (đpcm)}.$$

2/ Ta có : $O'N \perp (O'OM)$

$$\Rightarrow V = V_{(OO'MN)} = \frac{1}{3}dt(\Delta OO'M).O'N = \frac{1}{6}OO'.OM.O'N = \frac{h}{6}OM.O'N$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{h^2}{36}.OM^2.O'N^2 \leqslant \frac{h^2}{36}\left(\frac{OM^2 + O'N^2}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{36}\left(\frac{k^2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow V^2 \leqslant \frac{h^2k^4}{144} \quad (3)$$

Dấu đẳng thức trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow OM^2 = O'N^2$

$$\Leftrightarrow OM^2 + O'N^2 = 2OM^2 = k^2 \Rightarrow OM = O'N = \frac{k\sqrt{2}}{2}$$

Vậy khi chọn $M \in d$ và $N \in d'$ sao cho : $OM = O'N = \frac{k\sqrt{2}}{2}$ thì tứ diện OO'NM có thể tích lớn nhất : $\max V = \frac{h}{6}OM^2 = \frac{hk^2}{12}$ (ycbt).

3/ Điều kiện để MN tiếp xúc với mặt cầu đường kính OO'. Gọi I là tiếp điểm của đường thẳng MN với mặt cầu đường kính O'O. Theo tính chất tiếp tuyến từ 1 điểm ở ngoài mặt cầu, ta có :

$$\left.\begin{matrix} O'N = IN \\ OM = IM \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow MN = O'N + OM$$

$\Leftrightarrow MN^2 = O'N^2 + OM^2 + 2O'N.OM$

$\Rightarrow h^2 + k^2 = k^2 + 2O'N.OM \quad \Leftrightarrow \quad 2OM.O'N = h^2$ (4)

Để ý : $(OM - O'N)^2 = OM^2 + O'N^2 - 2OM.O'N \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2OM.O'N \leqslant OM^2 + O'N^2$ (Áp dụng (4))

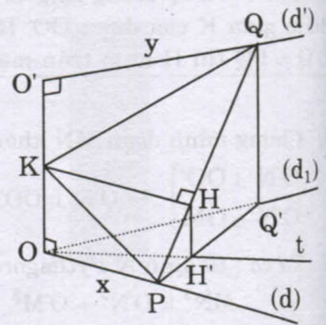
$\Leftrightarrow h^2 \leqslant k^2 \Leftrightarrow 0 < h \leqslant k$ (5) (ycbt).

- Cách dựng đoạn MN : Cho $M \in d$ mà OM = a. Từ (4) ta có : $O'N = \dfrac{h^2}{2a}$

$\Rightarrow$ Ta tìm được $N \in d'$ được xác định bởi $O'N = \dfrac{h^2}{2a}$ với điều kiện (5).

- Chứng minh H nằm trên một đường cố định :

Đặt OP = x, O'Q = y.



Ta có : $\begin{cases} PQ = OP + O'Q = x + y \\ PQ = PH + HQ \end{cases}$

$\Rightarrow PH + HQ = x + y$ (6)

Định lý Pythagore :

$$\begin{cases} KP^2 = OK^2 + OP^2 = HK^2 + HP^2 \\ KQ^2 = O'K^2 + O'Q^2 = HK^2 + HQ^2 \end{cases}$$

Do $OK = O'K \Rightarrow KP^2 - KQ^2 = OP^2 - OQ^2 = HP^2 - HQ^2 = x^2 - y^2$

$\Rightarrow (HP - HQ)(HP + HQ) = (x - y)(x + y)$

Từ (6) $\Rightarrow HP - HQ = x - y$ (7)

Kết hợp (6) và (7) $\Rightarrow HP = x$ và $HQ = y$ (8)

Qua O dựng $d_1 \,//\, d' \Rightarrow d' \,//\, (d'; d_1)$ và $(d'; d_1) \perp (d; d_1)$, nên gọi Q' là hình chiếu của Q trên $(d; d_1)$ thì $Q' \in d_1$ và do $(QQ'P) \perp (d; d_1)$ nên gọi H' là hình chiếu của H trên $(d; d_1)$ thì $H' \in PQ'$.

Tứ giác OO'QQ' là hình chữ nhật $\Rightarrow OQ' = O'Q = y$

Do HH' // QQ' : $\left.\begin{matrix} \dfrac{H'P}{H'Q'} = \dfrac{HP}{HQ} = \dfrac{x}{y} \\ \text{Mà} \quad \dfrac{OP}{OQ'} = \dfrac{x}{y} \end{matrix}\right\} \overset{(8)}{\Rightarrow} \dfrac{H'P}{H'Q'} = \dfrac{OP}{OQ'}$

$\Rightarrow$ OH' là phân giác $\widehat{POQ'} = (\widehat{d_1; d_2})$

Điều này chứng tỏ H nằm trong mặt phẳng cố định (α) tạo bởi OO' và phân giác Ot của góc hợp bởi d và $d_1 \,//\, d'$.

Do : $\Delta OPK = \Delta HPK \Rightarrow HK = OK = \dfrac{h}{2}$.

Vậy H nằm trên đường tròn cố định tâm K, bán kính $\frac{h}{2}$ chứa trong mặt phẳng cố định (α), xác định như trên (ycbt).

Bài 401 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM – 1991)

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD, có ABD và CBD là hai tam giác đều cạnh a. Cạnh SA = h và vuông góc với đáy. Gọi O là giao điểm của AC và BD, M là điểm di động trên AC, khác A và C; (Q) là mặt phẳng qua M và vuông góc AC.

1/ Tùy theo M thuộc OC hay thuộc OA hãy chỉ rõ cách dựng thiết diện mà (Q) cắt hình chóp.

2/ Đặt x = MC. Tính diện tích thiết diện nói trên theo x, a, h. Khi nào diện tích ấy lớn nhất.

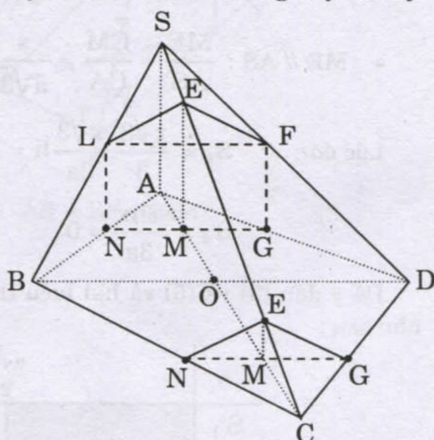
Giải

1/ Độc giả tự phân tích và chứng minh và biện luận, ở đây ta xét hai khả năng xảy ra tùy theo vị trí của M trên AC = AO ∪ OC.

❐ Cách dựng thiết diện khi M ∈ AO

• Trong (ABCD), qua M dựng đường thẳng song song với chéo BD lần lượt gặp AB, AD tại N và G.

• Qua N, M, G dựng các đường thẳng vuông góc với (ABCD) lần lượt gặp SB, SC, SD tại L,E,F ta được thiết diện muốn tìm là ngũ giác NLEFG gồm hai hình thang vuông bằng nhau có chung đáy lớn ME (ycbt).



❐ Cách dựng thiết diện khi M ∈ OC

• Trong (ABCD) qua M dựng đường thẳng song song với BD lần lượt cắt CB, CD tại N, G.

• Trong (SAC), qua M dựng đường thẳng song song với SA cắt SC tại E. Tam giác ENG cân tại E là thiết diện muốn dựng (ycbt).

2/ Để xác định x = CM để diện tích S của thiết diện lớn nhất ta xét hai khả năng sau :

❐ TH_1 : $M \in OA : 0 < AM < AO \Leftrightarrow 0 < a\sqrt{3} - x < \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} < x < a\sqrt{3}$ (1)

• NG // BD $\Rightarrow \frac{NM}{BO} = \frac{AM}{AO} = \frac{2(a\sqrt{3} - x)}{a\sqrt{3}} \Rightarrow NM = \frac{3a - x\sqrt{3}}{3}$

• ME // AS $\Rightarrow \frac{ME}{AS} = \frac{CM}{CA} = \frac{x}{a\sqrt{3}} \Rightarrow ME = \frac{xh\sqrt{3}}{3a}$

• NL // AS $\Rightarrow \frac{NL}{AS} = \frac{BN}{BA} = \frac{OM}{OA} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

$$\Rightarrow NL = \frac{2x - a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}}.h \Rightarrow NL = \left(\frac{2x\sqrt{3} - 3a}{3a}\right)h$$

Do đó : $S_1 = \left(\frac{2x\sqrt{3}h}{3a} - h + \frac{xh\sqrt{3}}{3a}\right)\left(\frac{3a - x\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{h}{3a}(x\sqrt{3} - a)(3a - x\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{h}{3a}(-3x^2 + 4a\sqrt{3}x - 3a^2)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} < x < a\sqrt{3}\right) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow S'_1 = \frac{h}{3a}(-6x + 4a\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2a\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

☐ **TH_2** : $M \in CO : AO \leqslant AM < AC \;\Leftrightarrow\; \frac{a\sqrt{3}}{2} \leqslant a\sqrt{3} - x < a\sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; 0 < x \leqslant \frac{a\sqrt{3}}{2}$

- $NG \,//\, BD : \frac{NM}{BO} = \frac{CM}{CO} = \frac{2x}{a\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; NM = \frac{2x\sqrt{3}}{3a}\cdot\frac{a}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$
- $ME \,//\, AS : \frac{ME}{AS} = \frac{CM}{CA} = \frac{x}{a\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; ME = \frac{x\sqrt{3}}{3a}h$

Lúc đó : $S_2 = \frac{x\sqrt{3}}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{3a}h = \frac{x^2h}{3a} \quad \left(0 < x \leqslant \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (4)$

$S'_2 = \frac{2hx}{3a} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \qquad (5)$

Để ý đến (3) và (5) và hai biểu thức S_1, S_2 ở (2) và (4), ta sẽ lập được bảng biến thiên kép như sau :

x	0		$\frac{a\sqrt{3}}{2}$		$\frac{2a\sqrt{3}}{3}$		$a\sqrt{3}$
S'_1				+	0	−	
S'_2		+					
S_1 / S_2	0	↗	$\frac{ah}{4}$	↗	$\frac{ah}{3}$	↘	0
	S_2				S_1		

Từ đó, ta có : $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant a\sqrt{3}} S = \frac{ah}{3}$, tương ứng với $x = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ (ycbt).

Bài 402 (TT ĐÀO TẠO và BỒI DƯỠNG CÁN BỘ Y TẾ TP.HCM 1993)

Cho hai điểm A, B đối xứng nhau qua mặt phẳng (P), I là giao điểm cuả AB với (P), O là một điểm nằm ngoài (P), có hình chiếu vuông góc xuống (P) là H, còn M là một điểm chạy trên đường tròn đường kính IH vẽ trong (P).

1/ Chứng minh rằng IM là đường vuông góc chung của AB và OM.

2/ Chứng minh rằng hai điểm A, B luôn cách đều đường OM.

3/ Cho AB = 2a, MH = x, MI = y. Tính thể tích tứ diện OMAB. Xác định vị trí M để thể tích đó lớn nhất.

Giải

1/ Ta có : $AB \perp (P) \quad \Rightarrow AB \perp IM$ (1)

M thuộc đường tròn đường kính IH

$\Rightarrow IM \perp MH$ (2)

Mặt khác : OH ⊥ (P)

⇒ IM ⊥ OH (3)

Từ (2) và (3) ⇒ IM ⊥ (OMH)

⇒ IM ⊥ OM (4)

Từ (1) và (4) ⇒ IM là đường vuông góc chung của AB và OM (đpcm).

2/ Dựng AE ⊥ OM; BF ⊥ OM

$$\Rightarrow \begin{cases} AE = d[A; (OM)] \\ BF = d[B; (OM)] \end{cases}$$

Trong mặt phẳng (OMH) ta dựng:

Ex ⊥ OF; Fy ⊥ OF

$$\Rightarrow \begin{cases} (AEx) \perp OF \\ (BFy) \perp OF \end{cases}.$$

⇒ AE; IM; BF nằm trên ba mặt phẳng song song

Theo định lý Thalès : $\frac{ME}{MF} = \frac{IA}{IB} = 1 \Rightarrow ME = MF$

Nhưng : ΔAMB cân ⇒ AM = MB ⇒ ΔAEM = ΔBFM ⇒ AE = BF (đpcm).

3/ Để ý thấy : OH // (ABM) ⇒ $V_{O.ABM} = V_{H.ABM}$

$$\text{Mà : } \begin{cases} MH \perp MI \\ MH \perp AB \end{cases} \Rightarrow MH \perp (ABM)$$

$$\Rightarrow V = V_{OABM} = V_{H.AMB} = \frac{1}{3}.MH.S_{\Delta AMB}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}MH.AB.IM = \frac{1}{3}axy \text{ (ycbt)} \quad (5)$$

Xét : ΔIMH vuông ⇒ $x^2 + y^2 = IH^2 = const$ (6)

BĐT Cauchy $\overset{(1)}{\Rightarrow} V^2 = \frac{a^2}{9}.x^2.y^2 \leqslant \frac{a^2}{9}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = \frac{a^2.IH^2}{36}$ (6)

Dấu đẳng thức trong (6) xảy ra ⇔ $x^2 = y^2$ ⇔ x = y

⇔ ΔIMH vuông cân tại H.

Lúc đó : $\max V^2 = \frac{a^2.IH^2}{36} \Leftrightarrow \max V = \frac{a}{6}.IH$

Vậy V_{OABM} lớn nhất khi $\overset{\frown}{MI} = \overset{\frown}{MH}$ (ycbt).

Bài 403 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM– 1993)

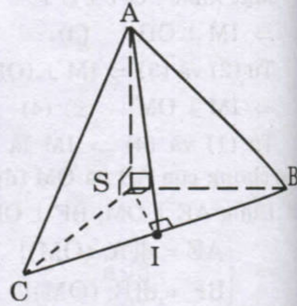
Cho tứ diện SABC có góc phẳng ở đỉnh S vuông.

1/ Chứng minh rằng : $\sqrt{3}\, S_{ABC} \geqslant S_{SBC} + S_{SBA} + S_{SAC}$.

2/ Biết rằng SA = a; SB + SC = k không đổi. Đặt SB = x. Tính thể tích tứ diện SABC theo a, k, x và xác định SB, SC để thể tích tứ diện SABC lớn nhất.

3/ Cho A cố định B và C thay đổi sao cho SB + SC = k (không đổi). Tìm quỹ tích giao điểm O của các đường chéo hình hộp có ba cạnh là SA, SB, SC.

Giải



1/ Dựng : SI ⊥ BC và nối AI, ta có :

$$S^2_{SBC} + S^2_{SBA} + S^2_{SAC} =$$

$$= \frac{1}{4}(BC^2.SI^2 + SA^2.SB^2 + SA^2.SC^2)$$

$$= \frac{1}{4}[BC^2.SI^2 + SA^2.(SB^2 + SC^2)]$$

$$= \frac{1}{4}\left(BC^2.SI^2 + SA^2.BC^2\right)$$

$$\Rightarrow \sum S = \frac{1}{4}[BC^2.(SI^2 + SA^2)] = \frac{1}{4}(BC^2.AI^2) = S^2_{ABC} \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Schwartz :

$$(S_{SBC} + S_{SBA} + S_{SAC})^2 \leqslant \sqrt{3(S^2_{SBC} + S^2_{SBA} + S^2_{SAC})}$$

$$\Leftrightarrow (S_{SBC} + S_{SBA} + S_{SAC})^2 \leqslant \sqrt{3.S^2_{ABC}} \text{ ; do (1)}$$

$$\Leftrightarrow S_{SBC} + S_{SBA} + S_{SAC} \leqslant \sqrt{3}.S_{ABC} \text{ (đpcm).}$$

2/ Gọi thể tích tứ diện SABC là V :

$$V = \frac{1}{3}AS.S_{SBC} = \frac{1}{6}SA.SB.SC = \frac{1}{6}ax(k - x) \leqslant \frac{a}{6}\left(\frac{x + k - x}{2}\right)^2$$

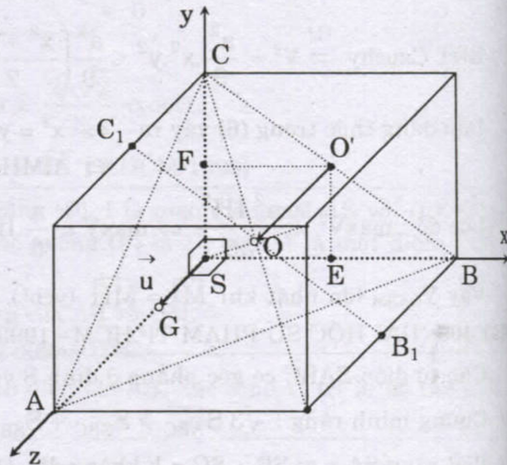
$$\Rightarrow V \leqslant \frac{ak^2}{24} \quad (2)$$

Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ $x = k - x$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{k}{2}$.

Vậy $\max V = \frac{ak^2}{24}$; tương ứng :

$$SB = SC = \frac{k}{2} \text{ (ycbt).}$$

3/ Gọi O' là hình chiếu của O xuống (SBC).



Trong mặt phẳng toạ độ (Sxy) ≡ (SBC), ta có :

$$O' : \begin{cases} x = \dfrac{\overline{SB}}{2} \\ y = \dfrac{\overline{SC}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{\overline{SB} + \overline{SC}}{2} = \frac{k}{2} \Rightarrow y = -x + \frac{k}{2}$$

Vì $SB + SC = k \Rightarrow 0 < SC < k$

$\Rightarrow$ Quỹ tích O' là khoảng (BC) : $\begin{cases} 0 < x < k \\ y = -x + \dfrac{k}{2} \end{cases}$

Để ý thấy : $\overrightarrow{OO'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SG}$; ∀B; C

Vậy quỹ tích điểm O là khoảng (B_1C_1) : $\begin{cases} 0 < x < k \\ y = -x + \dfrac{k}{2} \end{cases}$ là hình tịnh tiến của (BC) theo vectơ : $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA}$ (ycbt).

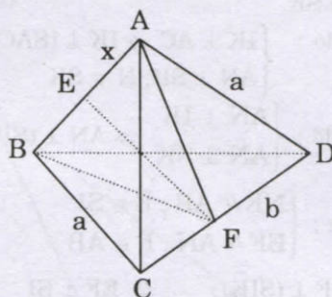
Bài 404 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ NỘI – KHỐI A – 1993)

Cho tứ diện ABCD có AB = x và CD = b, các cạnh còn lại bằng nhau và bằng a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1/ Chứng minh rằng : AB ⊥ CD và EF là đường vuông góc chung của AB và CD. Tính EF theo x, a, b.

2/ Tìm x để hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Chứng minh rằng khi đó tứ diện ABCD có thể tích lớn nhất.

Giải



1/ Từ giả thiết : AC ⊥ AD ⇒ AF ⊥ CD

mà BC = BD ⇒ BF ⊥ CD

Vậy CD ⊥ (ABF) ⇒ $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp EF \end{cases}$

Do BC = AC ⇒ CE ⊥ AB mà AB ⊥ CD

⇒ AB ⊥ (CDE) ⇒ AB ⊥ EF

Vậy EF vuông góc chung của AB và CD (đpcm).

Ta có : $\begin{cases} AF^2 = AC^2 - CF^2 \\ AF^2 = a^2 - \dfrac{b^2}{4} \\ AE^2 = \dfrac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow EF^2 = a^2 - \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{x^2}{4}$ $(= AF^2 - AE^2)$

$\Rightarrow \quad EF = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2 - x^2}$ $(0 < x < \sqrt{4a^2 - b^2}\,)$ (ycbt).

2/ Theo trên CD ⊥ (ABF) ⇒ $\widehat{AFB} = \widehat{(CD)}$. Góc nhị diện đó vuông khi và chỉ khi :

$EF = \dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2 - x^2} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{4a^2 - b^2}{2}}$

Khi đó : $V_{ABCD} = V_{CABF} + V_{DABF} = \dfrac{1}{3}CF.S_{ABF} + \dfrac{1}{3}DF.S_{ABF}$

$\Leftrightarrow V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABF}(CF + DF) = \dfrac{1}{3}S_{ABF}.CD = \dfrac{b}{3}S_{ABF}$

$\Rightarrow V_{ABCD}$ lớn nhất khi S_{ABF} lớn nhất.

Do $FA = FB = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$ nên V_{ABCD} lớn nhất

$$\Leftrightarrow S_{ABF} = \frac{1}{2}FA.FB\sin\widehat{AFB} = \frac{1}{8}(4a^2 - b^2)\sin\widehat{AFB} \quad (1)$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \exists\max\frac{1}{8}(4a^2 - b^2)\sin\widehat{AFB} = \frac{4a^2 - b^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin\widehat{AFB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AFB} = 90^0 \text{ (ycbt).}$$

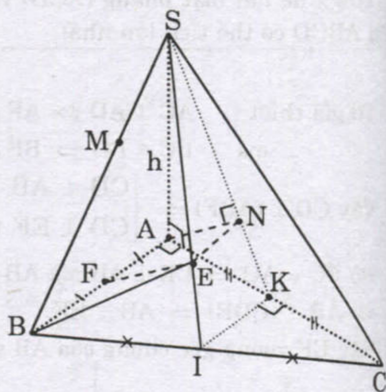
Bài 405 (ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM – 1994)

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông góc tại A, AB = c; AC = b. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A, lấy một điểm S sao cho SA = h (h > 0). M là một điểm di động trên cạnh SB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và AB.

1/ Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường SI và AB.

2/ Tính tỷ số giữa thể tích các hình chóp BMIJ và BSCA khi độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường AC và MJ đạt giá trị lớn nhất.

Giải



1/ Để ý thấy AB ⊥ (SAC) và SI có hình chiếu xuống (SAC) là SK.

Lúc đó : $\begin{cases} IK \perp AC \Rightarrow IK \perp (SAC) \\ AN \perp SK;\ N \in SK \end{cases}$

Khi đó : $\begin{cases} AN \perp IK \\ AN \perp SK \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SIK)$

Dựng : $\begin{cases} NE \,//\, AB,\ E \in SI \\ EF \,//\, AN,\ F \in AB \end{cases}$

$\Rightarrow EF \perp (SIK) \qquad \Rightarrow EF \perp SI$

Do : $AB \perp (SAC) \Rightarrow AB \perp AN \Rightarrow AB \perp EF$

⇒ EF là đoạn vuông góc chung của AB và SI.

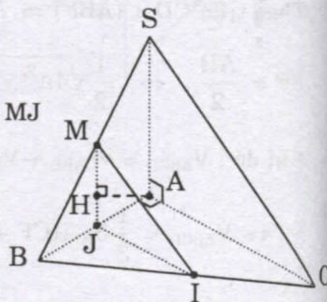
Nhưng : EF = AN, nên ta tính độ dài AN.

$$\Delta SAK \text{ vuông} \Rightarrow \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{4}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AN^2} = \frac{b^2 + 4h^2}{b^2h^2} \quad \Leftrightarrow AN = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + 4h^2}}$$

Độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SI là:

$$EF = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + 4h^2}} \text{ (ycbt).}$$



2/ Để ý $AC \perp (SAB) \supset MJ$, trong mặt phẳng (SAB), dựng $AH \perp MJ$

⇒ AH là đoạn vuông góc chung của AC và MJ.

Ta có : $AH \leqslant AJ = \frac{c}{2}$

$\Rightarrow$ max$AH = \dfrac{c}{2}$ khi và chỉ khi $H \equiv J$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của SB.

Lúc đó tương ứng : $\dfrac{V_{BMIJ}}{V_{BSCA}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$ (ycbt).

Bài 406 (ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC TP.HCM - 1995)

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB với OA = OB, AB = 2a và đường cao OH = h. Trên đường thẳng (d) vuông góc với (P) tại O, lấy điểm M với OM = x. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB; N là giao điểm của EF và (d).

1/ Chứng minh $MB \perp NA$ và $MA \perp NB$.

2/ Tính BE, BF, EF, AF và thể tích tứ diện ABEF theo a,h và x.

3/ Tìm vị trí của M trên (d) sao cho tứ diện MNAB có thể tích nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất này.

Giải

1/ Để ý : $\begin{cases} MO \perp AF \\ BO \perp AF \end{cases} \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB$

Mà : $AE \perp MB \Rightarrow MB \perp (AEF) \Rightarrow MB \perp AN$ (đpcm).

Ta có : $AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp NB$

Mặt khác, F là trực tâm của $\Delta MNB \Rightarrow MF \perp NB$

Vậy : $NB \perp (AFM) \Rightarrow NB \perp AM$ (đpcm).

2/ Ta có : $\Delta HKB \backsim \Delta HAO$

$\Rightarrow \dfrac{HK}{HA} = \dfrac{HB}{HO}$

$\Rightarrow HK.h = a^2 \quad \Rightarrow HK = \dfrac{a^2}{h}$

$\Rightarrow OK = h - \dfrac{a^2}{h} = \dfrac{h^2 - a^2}{h}$

Trong tứ giác nội tiếp BFKH ta có :

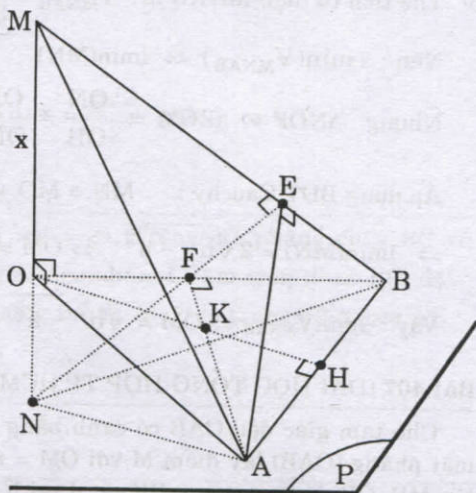
$\widehat{KBF} = \widehat{KHF}$

$\Rightarrow \Delta OFH \backsim \Delta OKB \Rightarrow \dfrac{OF}{OK} = \dfrac{OH}{OB}$

$\Rightarrow OF.OB = OH.OK$

$\Rightarrow OF.OB = h^2 - a^2$

$\Rightarrow OF = \dfrac{h^2 - a^2}{\sqrt{h^2 + a^2}}$ (với : $BO = \sqrt{h^2 + a^2}$)



Khi đó : $BF = OB - OF = \sqrt{h^2 + a^2} - \dfrac{h^2 - a^2}{\sqrt{h^2 + a^2}}$

Vậy : $BF = \dfrac{2a^2}{\sqrt{h^2 + a^2}}$ (ycbt).

Tương tự, trong tứ giác nội tiếp MOFE ta có : $\widehat{EMF} = \widehat{EOF}$

$\Rightarrow \Delta BEO \backsim \Delta BFM \Rightarrow \dfrac{BE}{BF} = \dfrac{BO}{BM} \Rightarrow BE.BM = BO.BF$

$$\Rightarrow BE = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + h^2 + x^2}} \text{ (ycbt).}$$

Ta có : $\Delta EFB \backsim \Delta OMB \Rightarrow \dfrac{EF}{OM} = \dfrac{BF}{BM}$

$$\Rightarrow EF = \frac{2a^2x}{\sqrt{(a^2 + h^2)(a^2 + h^2 + x^2)}} \text{ (ycbt).}$$

Tương tự, ta có : $AF.OB = OH.AB \Rightarrow AF = \dfrac{2ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$ (ycbt).

Thể tích tứ diện ABEF:

$$V_{ABEF} = \frac{1}{3}AF.S_{BEF} = \frac{1}{6}AF.EF.BE = \frac{4a^5.h.x}{3(a^2 + h^2)(a^2 + h^2 + x^2)} \text{ (ycbt).}$$

3/ Thể tích tứ diện MNAB là : $V_{MNAB} = \dfrac{1}{3}.AF.S_{MNB} = \dfrac{1}{6}AF.MN.OB$

Nên : $\exists \min(V_{MNAB}) \Leftrightarrow \exists \min(MN)$

Nhưng : $\Delta NOF \backsim \Delta BOM \Rightarrow \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{OF}{OM} \Rightarrow OM.ON = OF.OB = h^2 - a^2$

Áp dụng BĐT Cauchy : $MN = MO + ON \geqslant 2\sqrt{h^2 - a^2}$

$\Rightarrow \exists \min(MN) = 2\sqrt{h^2 - a^2} \Leftrightarrow OM = ON$

Vậy : $\exists \min V_{MNAB} \Leftrightarrow OM = \sqrt{h^2 - a^2}$ và $\min V_{MNAB} = \dfrac{2ah\sqrt{h^2 - a^2}}{3}$ (ycbt).

Bài 407 (ĐẠI HỌC TỔNG HỢP TP.HCM – 1995)

Cho tam giác đều OAB có cạnh bằng a > 0. Trên đường thẳng (d) đi qua O vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M với OM = x. Gọi E,F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên MB, OB. Đường thẳng EF cắt d tại N.

1/ Chứng minh rằng AN ⊥ BM.

2/ Xác định x để thể tích tứ diện ABMN là nhỏ nhất.

Giải

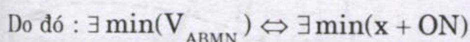
1/ Ta có : $\begin{cases} AF \perp BO \\ AF \perp d \end{cases} \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB$

Mà : $AE \perp MB \Rightarrow MB \perp (ANE) \Rightarrow MB \perp NA$ (ycbt).

2/ Để ý : $AF \perp (MBO) \equiv (MNB) \Rightarrow$ AF là chiều cao hình chóp A.BMN

$\Rightarrow\ V_{ABMN} = \dfrac{1}{3}AF.S_{MNB} = \dfrac{1}{6}AF.BO.MN$

Trong đó : $\begin{cases} AF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ BO = a \\ MN = MO + ON = x + ON \end{cases}$



Do đó : $\exists \min(V_{ABMN}) \Leftrightarrow \exists \min(x + ON)$

Mặt khác, ta có : $\Delta NOF \backsim \Delta BOM \Rightarrow \dfrac{NO}{BO} = \dfrac{OF}{OM}$

$$\Leftrightarrow OM.ON = BO.OF \Leftrightarrow x.ON = \frac{a^2}{2} = const$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có : $x + ON \geqslant 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$ (*)

Dấu đẳng thức trong (*) xảy ra $\Leftrightarrow$ $x = ON = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \quad \exists \min(x + ON) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow x = ON = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy thể tích tứ diện ABMN nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (ycbt).

Bài 408 (ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI – 1995)

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD với AB = 2a. Trên mặt phẳng chứa BC và vuông góc với (P) lấy điểm E sao cho ΔEBC là tam giác đều; điểm I nằm trên đoạn BC, đặt : BI = x. K là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AI; O là trung điểm của AE.

1/ Tìm quỹ tích của điểm K khi I chạy trên đoạn BC.

2/ Tính độ dài OI theo a và x.

3/ Tìm x để độ dài OI lớn nhất, bé nhất.

Giải

1/ ΔEBC đều nên trung tuyến của nó $EF \perp BC$ mà $[(P); (EBC)] = 90^0$

$\Rightarrow EF \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} EK : \text{đường xiên} \\ FK : \text{hình chiếu} \end{cases}$

mà $EK \perp AK \Rightarrow FK \perp AI$ (định lý 3 đường vuông góc)

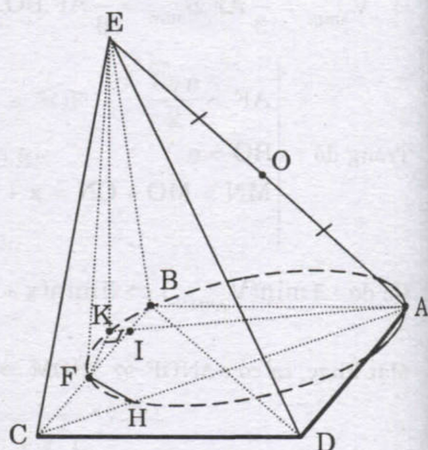
$\widehat{AKF}$ luôn vuông, AF cố định nên K di chuyển trên tròn (C) đường kính AF.

Giới hạn khoảng chạy:

$$\begin{cases} I \equiv B \Rightarrow K \equiv B \\ I \equiv C \Rightarrow K \equiv H;\ H \in AC;\ FH \parallel BD \end{cases}$$

Đảo lại $K \in \widehat{BH} \subset (C) \quad \Rightarrow EK \perp AI$

Vậy quỹ tích K là cung $\widehat{BH} \subset (C)$ (ycbt).



2/ Định lý đường trung tuyến cho :

$$OI^2 = \frac{2AI^2 + 2EI^2 - AE^2}{4}$$

$$\begin{cases} EF^2 = 3a^2 \\ AF^2 = 5a^2 \\ AE^2 = AF^2 + EF^2 = 8a^2,\ AI^2 = 4a^2 + x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow OI = \sqrt{x^2 - ax + 2a^2}$ (ycbt).

3/ Ta viết : $OI^2 = f(x) = x^2 - ax + 2a^2;\ \forall a \in [0; 2a]$

$\Rightarrow f'(x) = (2x - a) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$$\begin{cases} \max\limits_{0 \le x \le 2a} f(x) = f(2a) = (2a)^2 \\ \min\limits_{0 \le x \le 2a} f(x) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \left(\dfrac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0		$a/2$		2a	$+\infty$
f'(x)			−	0	+		
f(x)		$(a\sqrt{2})^2$	↘	$\left(\dfrac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2$	↗	$(2a)^2$	

$$\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{0 \le x \le 2a} OI = S(2a) = 2a \\ \min\limits_{0 \le x \le 2a} OI = S\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{2} \end{cases} \quad \text{(ycbt).}$$

Bài 409 (ĐẠI HỌC ĐẠI CƯƠNG – 1996)

Cho tứ diện ABCD có AB = CD = 2x và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1.

1/ Tính diện tích toàn phần (tổng diện tích của 4 mặt) của tứ diện theo x.

2/ Xác định x để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

Giải

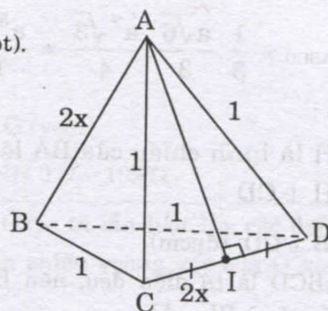
1/ Nhận thấy, các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau.

Suy ra, diện tích toàn phần của tứ diện là : $S_{tp} = 4.S_{ACD} = 2.AI.CD$ (1)

Với AI là đường cao của ΔCAD cân tại A; ta có :

$$AI = \sqrt{1 - x^2}\ ; \quad (0 < x < 1)$$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} S_{tp} = 2.2x.\sqrt{1-x^2} = 4x\sqrt{1-x^2}$; $(0 < x < 1)$ (ycbt).



2/ Nhận thấy : $\exists \max(S_{tp})$

$$\Leftrightarrow \quad \exists \max\left(x\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists \max(16x^2[1-x^2)]$$

Áp dụng BĐT Cauchy :

$$S_{tp}^2 = 16x^2(1-x^2) \leqslant 16\left(\frac{x^2+1-x^2}{2}\right)^2 = 4 \qquad (2)$$

Dấu đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy với $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì diện tích toàn phần của tứ diện đạt giá trị lớn nhất là

$\max S_{tp} = 2$ (ycbt).

Bài 410 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – 1996)

Cho tứ diện SABC có góc phẳng ở đỉnh S vuông.

1/ Chứng minh rằng $\sqrt{3}.S_{ABC} \geqslant S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SAC}$

2/ Biết rằng SA = a; SB + BC = k. Đặt SB = x. Tính thể tích tứ diện SABC theo a; k; x và xác định SB; SC để thể tích tứ diện SABC lớn nhất.

Giải

(Xem ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM – 1993)

Bài 411 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI D – 1997)

Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD) và O là trung điểm của AH.

1/ Tính thể tích V của tứ diện theo a.

2/ Chứng minh rằng AB ⊥ CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD theo a.

3/ Chứng minh rằng các đường thẳng OB, OC, OD từng đôi một vuông góc nhau.

4/ Xác định điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

1/ Do ABCD là tứ diện đều cạnh a và H là hình chiếu vuông góc của A xuống (BCD)

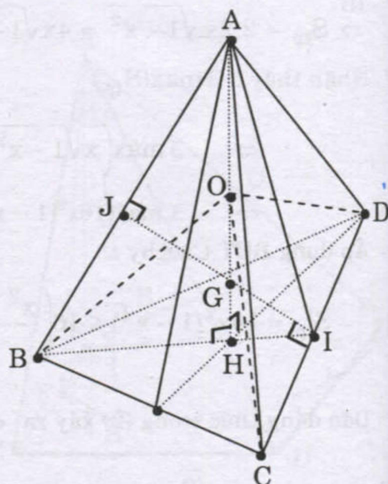
$\Rightarrow$ H là trọng tâm ΔBCD

$$\Rightarrow BH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.AH.S_{BCD}$

$\Rightarrow V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (ycbt).



2/ Ta có :

$\begin{cases} \text{BH là hình chiếu của BA lên (BCD)} \\ BH \perp CD \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp CD$ (đpcm).

Do ABCD là tứ diện đều, nên BH sẽ cắt CD tại trung điểm I và BI = AI.

Gọi J là trung điểm của AB, thì ta có : $IJ \perp AB$.

Tương tự : JD = JC $\Rightarrow JI \perp CD$.

$\Rightarrow$ IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

$\Rightarrow IJ = \sqrt{BI^2 - BJ^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (ycbt).

3/ Ta có : $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$O \in AH$ (trục đường tròn) $\Rightarrow OB = OC = OD$

Mà: $OB^2 = OH^2 + HB^2 = \dfrac{1}{4}AH^2 + HB^2 = \dfrac{a^2}{6} + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow OB = OC = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Nhận thấy : $OB^2 + OC^2 = a^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta BOC$ vuông tại O.

Tương tự, ΔBOD và ΔCOD vuông tại O.

Vậy OB; OC; OD từng đôi một vuông góc nhau (đpcm).

4/ Gọi G là trọng tâm tứ diện ABCD $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{O}$

Xét : $\Sigma = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \left(\overrightarrow{MA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MD}\right)^2$

$\Rightarrow \Sigma = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right)^2$

$= 4.\overrightarrow{MG}^2 + \left(\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + \overrightarrow{GD}^2\right) + 2\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}}_{\vec{0}}\right)$

$\Rightarrow \Sigma = 4.\overrightarrow{MG}^2 + \left(\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + \overrightarrow{GD}^2\right)$

$\Rightarrow \Sigma = 4.MG^2 + \left(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2\right)$

$\Rightarrow \Sigma \geqslant GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$ (const)

Vậy : $\min\Sigma = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \quad \Leftrightarrow \quad M \equiv G$ (ycbt).

Bài 412 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI A – KINH TẾ – 1997)

Trên ba cạnh Ox, Oy, Oz của tam diện ba góc vuông Oxyz ta lần lượt lấy các điểm A,B,C với OA = a, OB = b, OC = c; (a, b, c > 0). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt phẳng (ABC).

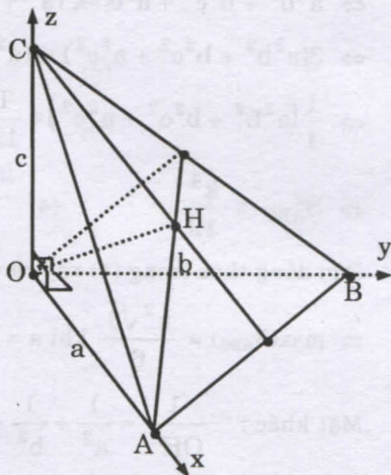
1/ Chứng minh rằng ΔABC có các góc đều nhọn và H là trực tâm ΔABC.

2/ Chứng minh rằng : $S^2_{ABC} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OAC}$

3/ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, AC. Chứng minh rằng 4 mặt của tứ diện OMNP là các tam giác bằng nhau. Tính thể tích tứ diện OMNP theo a, b, c.

4/ Giả sử a, b, c thay đổi nhưng luôn luôn thỏa mãn điều kiện : $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$. Chứng minh $\frac{k}{3}$ là giá trị max của OH và tính $\max(S_{ABC})$.

Giải



1/ Độc giả tự giải có thể xem Đề ĐẠI HỌC HÙNG VƯƠNG – KHỐI A – 1998 để có được cách chứng minh ba góc ΔABC đều nhọn.

$\Rightarrow$ H là trực tâm ΔABC (đpcm).

2/ Ta có : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{(abc)^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}$$

Khi đó: • $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$

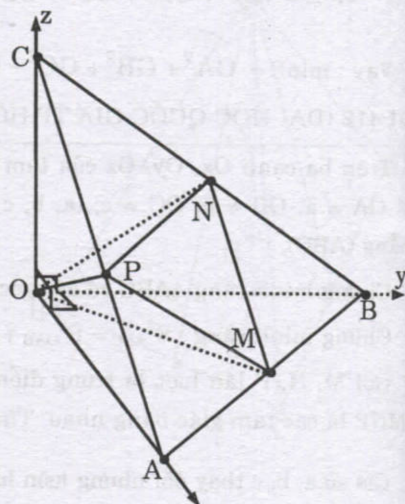
• $(S_{ABC})^2 = \left(\frac{3V_{OABC}}{OH}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$

Vậy : $S^2_{ABC} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OAC}$ (đpcm).

3/ Ta có : $\begin{cases} ON = \frac{1}{2}BC \\ PM = \frac{1}{2}BC \end{cases} \Rightarrow ON = PM$

Tương tự $\Rightarrow PN = OM;\ OP = MN$.

Vậy : ΔOMP = ΔONP = ΔOMN = ΔMNP ⇒ (đpcm).



Ta có : $V_{OMNP} = \frac{1}{3}.OH.S_{MNP}$

$\Rightarrow V_{OMNP} = \frac{1}{3}.OH.(\frac{1}{4}.S_{ABC})$

$\Rightarrow V_{OMNP} = \frac{1}{4}.V_{OABC} = \frac{abc}{24}$ (ycbt).

4/ Ta có : $S^2_{ABC} = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có :

$a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2$ (1)

$a^4 + c^4 \geqslant 2a^2c^2$ (2)

$b^4 + c^4 \geqslant 2b^2c^2$ (3)

Khi đó : (1) + (2) + (3)

$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \leqslant a^4 + b^4 + c^4$

$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$

$\Leftrightarrow 3(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right) \leqslant \frac{1}{12}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$

$\Leftrightarrow S^2_{ABC} \leqslant \frac{k^4}{12}$ (4)

Dấu đẳng thức trong (4) xảy ra ⇔ a = b = c

$\Rightarrow \max(S_{ABC}) = \frac{k^2\sqrt{3}}{6}$ khi $a = b = c = \frac{k\sqrt{3}}{3}$

Mặt khác : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \geqslant \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{9}{k^2}$ (5)

Dấu đẳng thức trong (5) xảy ra ⇔ a = b = c

$\Rightarrow \max(OH) = \frac{k}{3}$ khi $a = b = c = \frac{k\sqrt{3}}{3}$ (ycbt).

Bài 413 (ĐẠI HỌC VĂN LANG – KHỐI A – ĐỢT 2– 1997)

Cho tứ diện ABCD có AC = AD = BC = BD = a; AB = 2m; CD = 2n.

1/ Xác định vị trí và tính độ dài của đoạn thẳng vuông góc chung IJ của hai cạnh đối nhau AB và CD.

2/ Một mặt phẳng (α) vuông góc với IJ tại O sao cho JO = x (I∈ AB; J ∈ CD). Vẽ thiết diện MNPQ do mặt phẳng (α) cắt tứ diện. Tính diện tích S(x) của thiết diện. Xác định vị trí của điểm O để thiết diện có diện tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất ấy ?

Giải

1/ Để ý thấy ΔACD cân có trung tuyến AJ đồng thời là đường cao

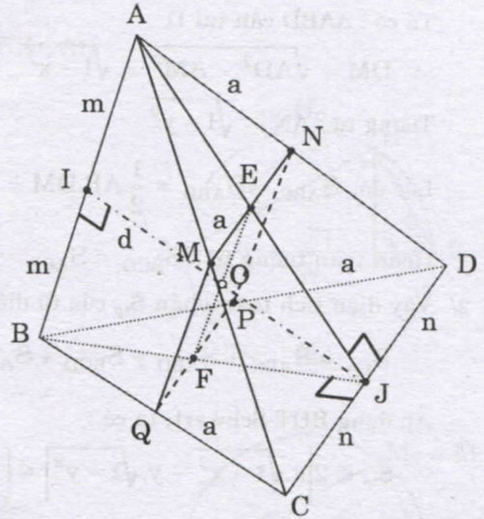
$\Rightarrow AJ \perp CD$ (1)

Tương tự : $BJ \perp CD$ (2)

$\overset{(1);(2)}{\Rightarrow} CD \perp (ABJ)$ (3)

Trong tam giác ABJ từ J hạ $IJ \perp AB$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} IJ \perp CD.$



Khi đó, IJ là đường vuông góc chung của AB; CD, và I là trung điểm của AB (vì AJ = BJ) (ycbt).

Độ dài đoạn vuông góc chung của AB; CD là:

$$d = IJ = \sqrt{AJ^2 - IA^2} = \sqrt{a^2 - n^2 - m^2};$$

(với : $a^2 \geqslant m^2 + n^2$) (ycbt).

2/ Mặt phẳng $(\alpha) \perp IJ$, nên : $(\alpha) // AB$ và $(\alpha) // CD$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha) \cap (ACD) = MN // CD \\ (\alpha) \cap (BCD) = QP // CD \end{cases} \Rightarrow MN // QP // CD \quad (4)$$

Tương tự : $MQ // NP // AB$ (5)

Từ : $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $AB \perp CD$ (6)

Khi đó : (4); (5); (6) $\Rightarrow$ thiết diện MNPQ là hình chữ nhật.

Diện tích thiết diện : $S(x) = S_{MNPQ}(x) = MN.PQ$

$$\text{Trong đó : } \begin{cases} \dfrac{MN}{CD} = \dfrac{AE}{AJ} = \dfrac{d-x}{d} & \Rightarrow MN = \dfrac{2n(d-x)}{d} \\ \dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{x}{d}. & \Rightarrow MQ = \dfrac{2mx}{d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{4mnx(d-x)}{a^2 - n^2 - m^2}.$$

$$\Rightarrow S(x) \leqslant \frac{4mn}{a^2 - n^2 - m^2}\left(\frac{x + d - x}{2}\right)^2 = \frac{4mn}{a^2 - n^2 - m^2}.\frac{(\sqrt{a^2 - n^2 - m^2})}{4}$$

$\Rightarrow S(x) \leqslant m.n$ (7)

Dấu đẳng thức trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x = d - x \Leftrightarrow x = \dfrac{d}{2}$

Vậy : $\max S(x) = mn \Leftrightarrow$ O là trung điểm IJ (ycbt).

Bài 414 (ĐẠI HỌC NGOẠI NGỮ TIN HỌC – 1997)

Cho tứ diện ABCD sao cho AB = 2x, CD = 2y và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1.

1/ Tính diện tích toàn phần của tứ diện theo x và y.

2/ Xác định x và y để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

Giải

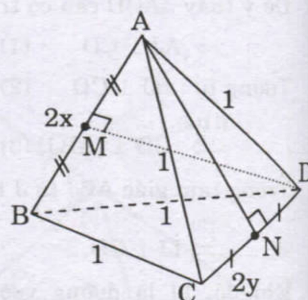
1/ Gọi M; N lần lượt là trung điểm của AB; CD.

Ta có : ΔABD cân tại D

$\Rightarrow DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{1 - x^2}$

Tương tự : $AN = \sqrt{1 - y^2}$

Lúc đó: $S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{1}{2}AB.DM = x.\sqrt{1 - x^2}$



Hoàn toàn tương tự : $S_{BCD} = S_{ACD} = y.\sqrt{1 - y^2}$ (ycbt).

2/ Vậy diện tích toàn phần S_{tp} của tứ diện là :

$$S_{tp} = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ACD} = 2\left(x.\sqrt{1 - x^2} + y.\sqrt{1 - y^2}\right)$$

Áp dụng BĐT Schwart, ta có :

$$S_{tp} \leqslant 2\left|x.\sqrt{1 - x^2} + y.\sqrt{1 - y^2}\right| \leqslant \left[x^2 + \left(1 - x^2\right)\right] + \left[y^2 + \left(1 - y^2\right)\right] \leqslant 2 \quad (1)$$

Dấu đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 - x^2} \\ y = \sqrt{1 - y^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy : $\max S_{tp} = 2 \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ycbt).

Bài 415 (ĐẠI HỌC VĂN LANG – KHỐI B, D – ĐỢT 1 – 1997)

Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (S) đường kính :AB = 2R. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A, lấy điểm C sao cho AC = AB. M là một điểm thuộc (S), H là hình chiếu của A xuống CM.

1/ Chứng minh rằng khi M di động trên (S) thì H di động trên một đường tròn.

2/ Xác định vị trí M trên (S) (Tính độ dài AM theo R) sao cho hình chóp HABC có thể tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Giải

1/ Theo định lý ba đường vuông góc

$\left.\begin{matrix} BM \perp AB \\ BM \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BM \perp (ACM) \Rightarrow BM \perp CM \quad (1)$

Đã có : $BM \perp AM$ (2); vì $M \in (S)$

$\overset{(1)\&(2)}{\Rightarrow} BM \perp (ACM)$

$\Rightarrow (CAM) \perp (CBM)$ theo giao tuyến CM.

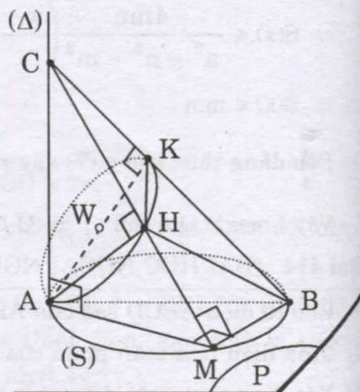
✪ **Cách dựng :** $AH \perp CM$

$\Rightarrow AH \perp (CBM) \quad \Rightarrow AH \perp BC$ (3)

Gọi K là trung điểm cạnh BC của ΔBAC vuông cân ở A

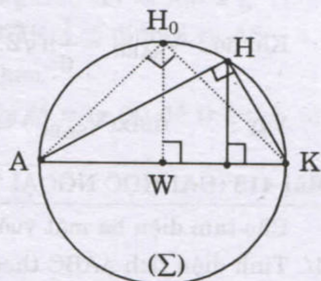
$\Rightarrow AK \perp BC$ (4)

$\overset{(3)\&(4)}{\Rightarrow} BC \perp (AHK)$: cố định, bởi vì AK cố định.



Lúc đó M lưu động trên (S) thì H lưu động trên đường tròn cố định (Σ) đường kính $AK = R\sqrt{2}$, nằm trong mặt phẳng cố định (AHK) (đpcm).

2/ Ta có : $V_{H.ABC} = V_{A.HBC} = \frac{1}{3}.S_{HBC}.AH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}BC.HK\right).AH$



$\Rightarrow V_{H.ABC} = \frac{1}{3}BC.\left(\frac{1}{2}HK.AH\right) = \frac{1}{3}BC.S_{AHK}$

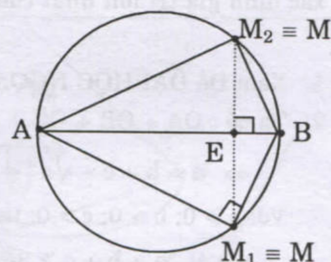
Vậy : $\max(V_{H.ABC}) \Leftrightarrow \max(S_{AHK})$ xảy ra

$\Leftrightarrow \Delta AHK \equiv \Delta AH_0K$ vuông cân tại H_0

$\Leftrightarrow AH = HK = \frac{AK\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2} = R$

Mà : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AM^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{AM^2}$



$\Leftrightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{3}{4R^2} \Rightarrow AM = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Vậy tồn tại hai điểm M_1; M_2 đối xứng nhau qua AB,

có độ dài : $AM = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ làm cho : $\max(V) = \frac{\sqrt{2}}{3}R^2$

(ycbt).

Bài 416 (ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM – 1998)

Cho tứ diện SABC có các góc phẳng ở đỉnh S vuông.

1/ Chứng minh rằng : $\sqrt{3}\,dt(ABC) \geq dt(SBC) + dt(SAB) + dt(SAC)$.

2/ Cho SA = a, SB + SC = k. Đặt SB = x, tính thể tích tứ diện SABC theo a, k, x. Xác định SB, SC để thể tích tứ diện SABC lớn nhất.

Hướng dẫn

(Xem Đề ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM – 1993)

Bài 417 (ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI – 1998)

Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mặt (ABC), nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông. Biết $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = \frac{\pi}{4}$, $\widehat{ASB} = \alpha$; $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

1/ Chứng minh BC vuông góc với SB. Từ đó xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

2/ Tính thể tích tứ diện SABCD theo a và α. Với giá trị nào của α thì thể tích đó lớn nhất.

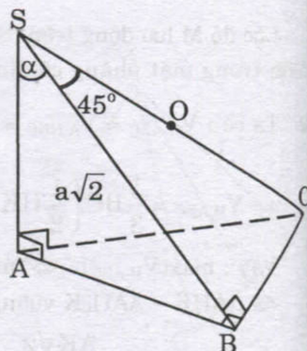
Giải

1/ Xem Đề ĐH NGOẠI NGỮ TIN HỌC CBP – 1999

2/ Thể tích tứ diện SABC là :

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}BC.S_{SAB} = \frac{1}{6}a\sqrt{2}.SA.AB$$

Với chú ý : $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{AB}{SB} \Rightarrow AB = a\sqrt{2}\sin\alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{SA}{SB} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$



Khi đó : $V_{SABC} = \dfrac{1}{6}a\sqrt{2}.a\sqrt{2}\sin\alpha.a\sqrt{2}\cos\alpha = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}\sin 2\alpha$

Vậy : $\max(V_{SABC}) \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (ycbt).

Bài 418 (ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG – KHỐI D – 1998)

Cho tam diện ba mặt vuông Oxyz. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C.

1/ Tính diện tích ΔABC theo OA = a; OB = b; OC = c.

2/ Giả sử A, B, C thay đổi nhưng luôn có OA + OB + OC + AB + BC + CA = k không đổi. Hãy xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện OABC.

Giải

1/ Xem Đề ĐẠI HỌC NGOẠI NGỮ HÀ NỘI – PB – 1997)

2/ Ta có : OA + OB + OC + AB + BC + AC = k

$$\Leftrightarrow a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} = k$$

Với a > 0; b > 0; c > 0; ta áp dụng BĐT Cauchy :

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \quad (1)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \sqrt{2ab} \quad (2)$$

$$\sqrt{c^2 + b^2} \geqslant \sqrt{2bc} \quad (3)$$

$$\sqrt{a^2 + c^2} \geqslant \sqrt{2ac} \quad (4)$$

Lấy : (2) + (3) + (4) và áp dụng BĐT Cauchy, ta có :

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geqslant \sqrt{2ab} + \sqrt{2bc} + \sqrt{2ac} \geqslant 3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc} \quad (5)$$

Thể tích hình chóp :

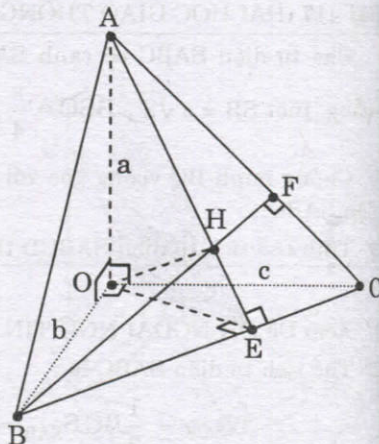
$$V_{SABC} = \frac{1}{6}abc \quad \Leftrightarrow \quad 6V_{S.ABC} = abc$$

Tương tự (1) + (5) và lại áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$\overset{(1)+(5)}{\Rightarrow} \quad k \geqslant \left(3 + 3\sqrt{2}\right)\sqrt[3]{abc}$$

$$\Rightarrow k \geqslant \left(3 + 3\sqrt{2}\right)\sqrt[3]{6.V_{SABC}} \quad (6)$$

$$\Rightarrow V_{SABC} \leqslant \frac{1}{6}.\left(\frac{k}{3 + 3\sqrt{2}}\right)^3 \quad (7)$$



Dấu đẳng thức trong (7) xảy ra khi đồng thời (5) và (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c

Vậy: $\max(V_{SABC}) = \frac{1}{6}.\left(\frac{k}{3+3\sqrt{2}}\right)^3$; khi : a = b = c (ycbt).

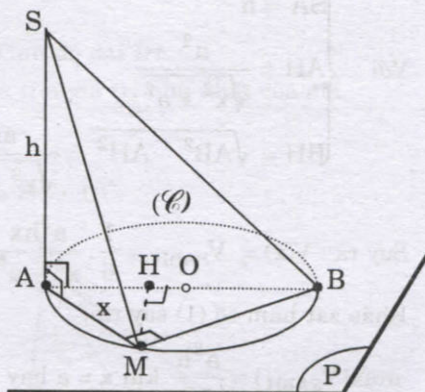
Bài **419** (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM QUY NHƠN – 1998)

Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm O, đường kính AB = 2R. Điểm M di động trên ($\mathscr{C}$) và AM = x. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa ($\mathscr{C}$) tại điểm A, lấy một điểm cố định S và AS = h.

1/ Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (SAM) và (SBM) vuông góc với nhau.

2/ Tính thể tích tứ diện SABM theo R, h, x. Tìm những vị trí của M trên ($\mathscr{C}$) để thể tích tứ diện này đạt giá trị lớn nhất

Giải



1/ Độc giả có thể xem **Câu 1** Đề ĐẠI HỌC QUỐC GIA – 1996, để từ : MB ⊥ (SAM)

⇒ (SAM) ⊥ (SBM) (đpcm).

2/ Ta có :

$$MB = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

Thể tích tứ diện :

$$V_{SABM} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABM} = \frac{1}{6}hx\sqrt{4R^2 - x^2}$$

Nên : $\exists \max(V_{SABM}) \Leftrightarrow \max(S_{ABM})$ (1)

Trong ΔABM hạ MH ⊥ AB

$$\Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MH = R.MH$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \exists \max(MH) \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$$

Vậy khi M là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AB}$ thì thể tích tứ diện đạt giá trị lớn nhất (ycbt).

Bài **420** (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – ĐỢT 1 – 1998)

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = h và SA ⊥ (ABCD). M là điểm thay đổi trên cạnh CD. Đặt CM = x.

1/ Hạ SH ⊥ BM. Tính SH theo a, h và x.

2/ Xác định vị trí của M để thể tích tứ diện SABH đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Giải

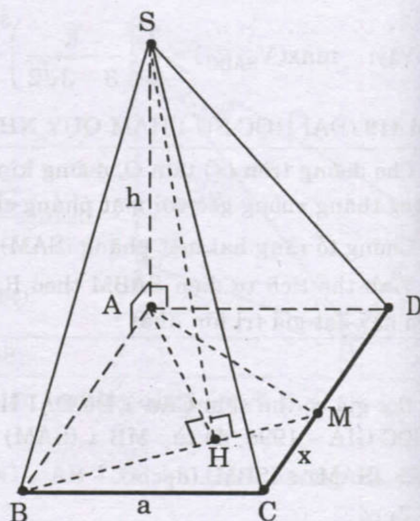
1/ Ta có : $\begin{cases} \Delta BCM \text{ vuông } \Rightarrow BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + x^2} \\ \text{Diện tích } \Delta ABM \text{ là : } S_{ABM} = \frac{1}{2}AH.BM \end{cases}$

Diện tích ΔABM là :

$$S_{ABCD} - S_{AMD} - S_{BCM} = \frac{1}{2}AH.BM$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{a(a-x)}{2} - \frac{ax}{2} = \frac{1}{2}AH.\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$



Vậy : $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2}$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{\frac{a^4 + a^2h^2 + x^2h^2}{x^2 + a^2}} \text{ (ycbt).}$$

2/ Thể tích hình chóp SABH là :

$$V_{SABH} = \frac{1}{6} SA.AH.BH$$

Với : $\begin{cases} SA = h \\ AH = \dfrac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{cases}$

x	0		a
V'(x)		+	0
V(x)	0	↗	$\frac{a^2h}{12}$

Suy ra : $V(x) = V_{SABH} = \frac{1}{6} . \frac{a^3hx}{x^2 + a^2}$ (1)

Khảo sát hàm số (1) suy ra :

$$\max(V_{SABH}) = \frac{a^2h}{12} \text{ khi } x = a \text{ hay } M \equiv D \text{ (ycbt).}$$

Bài 421 (ĐẠI HỌC CẦN THƠ – KHỐI A – 1999)

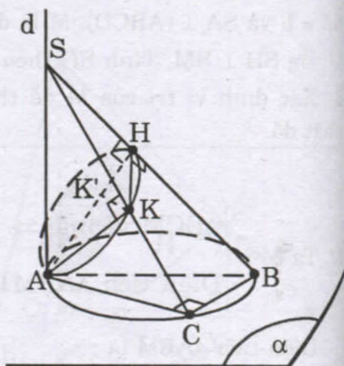
Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (T) đường kính AB = 2R. Lấy điểm C di động trên (T). Trên đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) lấy điểm S sao cho SA = R. Hạ $AH \perp SB$; $AK \perp SC$.

1/ Chứng minh : $AK \perp (SBC)$, $SB \perp (AHK)$.

2/ Tìm quỹ tích điểm K khi C thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SAHK.

Giải

1/ Tương tự, khi xem Đề ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM (LUẬT) – 1996, độc giả có thể thay E bằng H; N bằng K; M bằng C.



Khi đó độc giả dễ dàng có được :

$$AK \perp KH \Rightarrow \begin{cases} AK \perp (SBC) \\ SB \perp (AHK) \end{cases} \text{ (ycbt).}$$

2/ Cũng như thế, quỹ tích điểm K khi C thay đổi là đường tròn đường kính AH nằm trong mặt phẳng qua AH và vuông góc với SB.

Ta có : $\Delta SAH \backsim \Delta SBA \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{SA}{SB}$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{SB} \Rightarrow AH = \frac{R.2R}{R\sqrt{5}} = \frac{2R}{\sqrt{5}} \Rightarrow SH = \frac{R}{\sqrt{5}}$$

Gọi K' là hình chiếu của K xuống AH, khi đó :

$$V_{SAKH} = \frac{1}{6}SH.AH.KK' = \frac{1}{15}R^2KK'$$

Nên: $\max(V_{SAKH}) \Leftrightarrow \max(KK') \Leftrightarrow K' = \frac{AH}{2} = \frac{R}{\sqrt{5}}$

Vậy: $\max(V_{SAHK}) = \frac{R^3\sqrt{5}}{75}$ khi K là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AH}$ (ycbt).

Bài 422 (HỌC VIỆN NGÂN HÀNG – 1999)

Cho hình vuông ABCD cạnh 2a. Trên đường thẳng d qua trung điểm I của cạnh AB và vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy điểm E sao cho IE = a. M là điểm thay đổi trên cạnh AB, hạ EH ⊥ CM. Đặt BM = x.

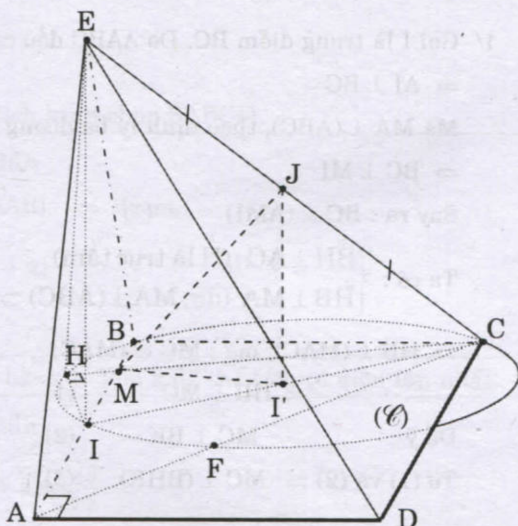
1/ Chứng minh điểm H di động trên một đường tròn. Tính độ dài IH.

2/ Gọi J là trung điểm của đoạn CE. Tính độ dài JM và tìm giá trị nhỏ nhất của JM.

Giải

1/ Ta có : $\begin{cases} CH \perp EH \\ HI \text{ là hình chiếu của HE lên (ABCD)} \end{cases} \Rightarrow HI \perp HC$

Nên H thuộc đường tròn ($\mathscr{C}$) đường kính CI trên mặt phẳng (ABCD).



Gọi : F = ($\mathscr{C}$) ∩ AC.

Nhận thấy, khi :

- $M \equiv B \Rightarrow H \equiv B$
- $M \equiv A \Rightarrow H \equiv F$

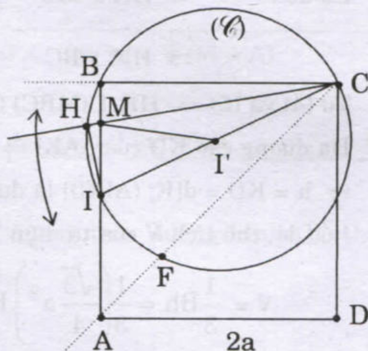
Vậy H di động trên cung $\overset{\frown}{BF}$ của đường tròn ($\mathscr{C}$) đường kính CI trên mặt phẳng (ABCD) (đpcm).

Ta có : ΔIHM ∽ ΔCBM

$$\Rightarrow \frac{IH}{BC} = \frac{IM}{CM}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{2a|a - x|}{\sqrt{4a^2 + x^2}} \text{ (ycbt).}$$

2/ Gọi I' là trung điểm của CI. Trong ΔIMC, áp dụng định lý đường trung tuyến; ta có :



$$MI^2 + MC^2 = 2I'M^2 + \frac{CI^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2I'M^2 = (x - a)^2 + 4a^2 + x^2 - \frac{5a^2}{2}$$

$$\Rightarrow I'M^2 = x^2 - ax + \frac{5a^2}{4}$$

Ta có : $\begin{cases} J \text{ là trung điểm } CE \\ I' \text{ là trung điểm } CI \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} JI' \,//\, EI \\ JI' = \dfrac{1}{2}EI = \dfrac{a}{2} \end{cases}$

Trong $\Delta MI'J$ vuông tại I', ta có : $MJ = \sqrt{I'M^2 + I'J^2} = \sqrt{\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{5a^2}{4}}$

Khi đó : $MJ \geqslant \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Vậy $(MJ)_{min} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{a}{2}$ hay M là trung điểm của IB (ycbt).

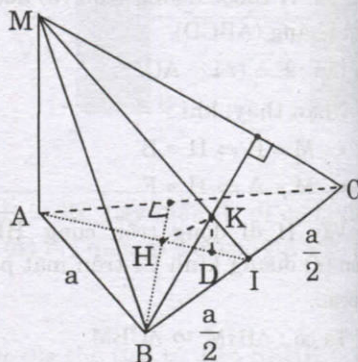
Bài 423 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM – KHỐI A – ĐỢT 2 – 2000)

Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm M. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; K là trực tâm của tam giác BCM.

1/ Chứng minh rằng $MC \perp (BHK)$ và $HK \perp (BCM)$.

2/ Khi M thay đổi trên (d), tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện KABC.

Giải



1/ Gọi I là trung điểm BC. Do ΔABC đều cạnh a

$\Rightarrow AI \perp BC$

Mà $MA \perp (ABC)$, theo định lý ba đường vuông góc

$\Rightarrow BC \perp MI$

Suy ra : $BC \perp (AMI)$ (*)

Ta có : $\begin{cases} BH \perp AC \text{ (H là trực tâm)} \\ HB \perp MA \text{ (do: } MA \perp (ABC) \supset HB) \end{cases}$

$\Rightarrow HB \perp (MAC)$; mà : $MC \subset (MAC)$

$\Rightarrow HB \perp MC$ (1)

Để ý : $MC \perp BK$ (2) (K là trực tâm)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MC \perp (BHK)$ (3) (đpcm)

Do đó : $\overset{(3)}{\Rightarrow} HK \perp MC$ (4) (vì : $HK \subset (HBK)$)

$\overset{(*)}{\Rightarrow} HK \perp BC$ (5) (vì : $HK \subset (MAI)$)

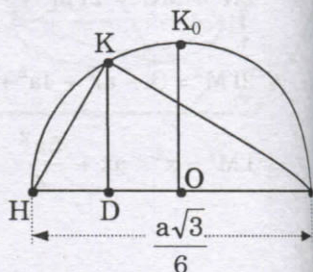
Từ (4) và (5) $\Rightarrow HK \perp (MBC)$ (đpcm).

2/ Hạ đường cao KD của $\Delta AKI \Rightarrow KD \perp (ABC)$

$\Rightarrow h = KD = d[K; (ABC)]$ là đường cao tứ diện K.ABC.

Lúc đó, thể tích V của tứ diện K.ABC là :

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right).KD = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2.KD$$



Do đó : $\exists\max(V) \Leftrightarrow \exists\max(KD)$.

Để ý ΔHKI vuông tại K và cạnh huyền

$$HI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \max(KD) = K_0O = \frac{a\sqrt{3}}{12}$$

(với O là trung điểm HI; $K_0 \in \widehat{HI}$ và $K_0O \perp HI$)

Vậy khi M thay đổi trên (d) thì giá trị lớn nhất của thể tích V trong yêu cầu bài toán là :

$$\max(V) = \frac{\sqrt{3}}{12}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3}{48} \text{ (ycbt).}$$

ĐỀ TƯƠNG TỰ

Bài 424 (ĐẠI HỌC KHỐI A, B – 1982)

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy $M \in AD$ và đặt $AM = x$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$. Cho đường thẳng $d \perp (ABCD)$ tại A. Lấy $S \in d$ và đặt $SA = y > 0$.

a/ Chứng minh nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông.

b/ Tính khoảng cách từ M đến mp(SAC).

c/ Tìm thể tích hình chóp SABCM.

d/ Cho $x^2 + y^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp SABCM.

Hướng dẫn

a/ Dễ thấy $BC \perp mp(SAB)$ $\Rightarrow mp(SBC) \perp mp(SAB)$ $\Rightarrow$ đpcm.

b/ $MH = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ c/ $V_{SABCM} = \frac{1}{6}ay(a + x)$ d/ $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 425 (ĐẠI HỌC NÔNG LÂM – 1994)

Cho tứ diện ABCD có AB = x, các cạnh còn lại bằng 1. Tìm x để thể tích tứ diện lớn nhất.

Hướng dẫn

$$\max V = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Bài 426 (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI – KHỐI B – 1997)

Cho ΔABC cân đỉnh A và đường thẳng $(d) \perp mp(ABC)$ tại A. Lấy $M \in d$ $(M \neq A)$.

a/ Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của ΔMBC.

b/ O là trực tâm ΔABC. Tìm vị trí của M để tứ diện OHBC đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

a/ H nhìn OI cố định dưới góc vuông nên quỹ tích H là đường tròn đường kính OI, thuộc mp(MAI) cố định.

b/ ΔMAI vuông cân $\Rightarrow MA = AI$.

Chuyên đề 23 : PHƯƠNG PHÁP VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. PHƯƠNG PHÁP

Cơ sở của phương pháp là sử dụng các định nghĩa và phép toán của vectơ trong không gian (Oxyz) (không gian chứa hệ tọa độ (Oxyz)). Nó tương tự các định nghĩa và phép toán vectơ trong mặt phẳng (Oxy). Ở đây ta lưu ý được các tính chất cơ bản :

- Cộng hai vectơ theo quy tắc đường chéo hình bình hành.
- Hệ thức ba điểm : $\forall A, B, M \in (Oxy) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}\end{array}\right.$
- I là trung điểm đoạn AB $\Leftrightarrow$ $\boxed{2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}$; $\forall M \in (Oxyz)$
- G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG};\ \forall M \in (Oxyz)\end{array}\right.$
- G là trọng tâm tứ diện ABCD $\Leftrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}}$
- Khái niệm ba vectơ đồng phẳng :

•1 Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$ đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng.

•2 Phân tích $\boxed{\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\neq\vec{0}}$ $(\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ là duy nhất và luôn thực hiện được khi $\vec{m}$ đồng phẳng với hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$.

•3 Phân tích $\boxed{\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\neq\vec{0}}$ $(\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ là duy nhất và luôn thực hiện được khi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

✪ **Ghi chú :** *1) Nếu một trong ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *bằng* $\vec{0}$ *thì chúng đồng phẳng.*

2) Nếu một trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *cộng tuyến thì chúng cũng đồng phẳng.*

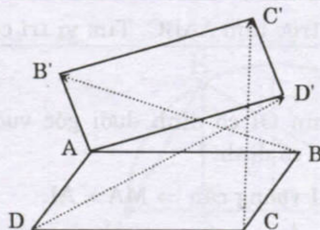
3) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ *đồng phẳng* $\Rightarrow O, A, B, C \in mp(\alpha)$.

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

Bài 427

Hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' trong không gian có chung một đỉnh A. Chứng minh các vectơ $\overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ đồng phẳng.

Giải



Theo hệ thức Chales, ta có : $\left\{\begin{array}{ll}\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'} & (1)\\ \overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD'} & (2)\end{array}\right.$

Cộng theo vế hai đường thẳng (1) và (2) ta được :

$\Rightarrow \overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{DD'}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'})$

$=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{AD'})=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{CC'} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 428

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N là trung điểm AA', BD', theo thứ tự đó. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

Giải

Chọn các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Ta có : $\vec{a}.\vec{b} = 0$; $\vec{b}.\vec{c} = 0$; $\vec{c}.\vec{a} = 0$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Ta phải chứng minh được rằng :

$$\begin{cases} MN \perp AA' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AA'} = 0 \\ MN \perp BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD'} = 0 \end{cases}$$

Để ý : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c}.\vec{a} + \vec{c}.\vec{b}) = 0 \Rightarrow$ (đpcm)

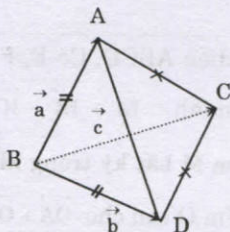
Chứng minh tương tự : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD'} = 0 \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 429

1/ Cho tứ diện ABCD có AB = BC, AD = DC. Chứng minh $AC \perp BD$.

2/ Khi tứ diện ABCD có $AB \perp CD$. Chứng minh rằng : $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

Giải



1/ Đặt các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$

Suy ra : $\begin{cases} \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \vec{c} - \vec{b} \\ \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b} \end{cases}$

Theo đầu bài : $|\vec{a}| = |\vec{c}| \Rightarrow \vec{a}^2 = \vec{c}^2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{c} - \vec{b}|$

$\Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{c} - \vec{b})^2 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} = \vec{c}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} \Leftrightarrow \vec{b}(\vec{a} - \vec{c}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA} = 0 \Leftrightarrow BD \perp CA$ (đpcm)

2/ Ta có : $AC^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = 2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$

Theo giả thiết : $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

$\Rightarrow AC^2 - AD^2 = \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = BC^2 - BD^2$ (đpcm)

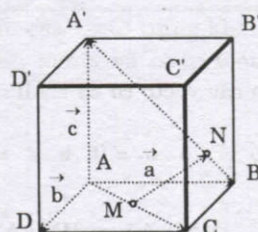
Bài 430

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tìm khoảng cách giữa hai đường chéo AC và A'B.

Giải

Lấy tùy ý $M \in AC$, $N \in A'B$ sao cho MN là đường vuông góc chung của AC và A'B.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = 0 \text{ và } \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BA'} = 0$$



Chọn các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b},\ \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{a}$$

Đặt : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BA'}$

Lúc đó : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -x\overrightarrow{AC} + \vec{a} + y\overrightarrow{BA'}$

$$= -x(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} + y(\vec{c} - \vec{a}) = (1 - x - y)\vec{a} - x\vec{b} - y\vec{c}$$

Để ý : $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BA'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(1 - x - y)\vec{a} - x\vec{b} - y\vec{c}](\vec{a} + \vec{b}) = 0 \\ [(1 - x - y)\vec{a} - x\vec{b} - y\vec{c}](\vec{c} - \vec{a}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x - y)a^2 - xa^2 = 0 \\ ya^2 - (1 - x - y)a^2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ -1 + x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$$

Suy ra : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$

$$\Leftrightarrow MN^2 = \frac{1}{9}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (ycbt)}$$

✪ **Ghi chú :** *Bài toán này có nhiều cách giải, ở trên ta đã sử dụng phương pháp vectơ.*

Bài 431

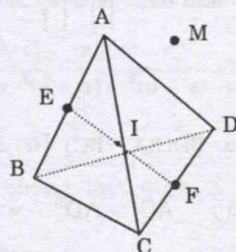
Cho tứ diện ABCD. Có E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, EF.

a/ Chứng minh : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

b/ Với điểm M bất kỳ trong không gian, hãy chứng minh : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$

c/ Tìm điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh điểm O là duy nhất.

Giải



a/ Hệ thức trung điểm cho ta : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IE}$; $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IF}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \text{ (đpcm)}$$

b/ Tương tự : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME}$; $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MF}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = 4\overrightarrow{MI} \text{ (đpcm)}$$

c/ Cũng tương như thế từ câu a/ ta có : $\vec{0} = 2(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$

Đẳng thức này chứng tỏ O là trung điểm đoạn EF.

Giả sử có điểm $O' \neq O$ thỏa mãn đẳng thức đã cho, ta cũng dẫn được tới $\overrightarrow{O'E} + \overrightarrow{O'F} = \vec{0}$

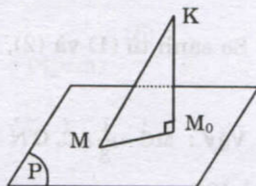
$$\Rightarrow \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'E} + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'F} \Leftrightarrow \vec{0} = 2\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'E} + \overrightarrow{O'F} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'O} = \vec{0} \Rightarrow O' \equiv O$$

Vậy O là điểm duy nhất thỏa : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ (ycbt)

Bài 432

Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (P). Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải



Gọi I, J là trung điểm AB, CD theo thứ tự đó. Ta có :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = 4\overrightarrow{MK} \qquad (1)$$

Trong (1) thì K là trung điểm IJ. Suy ra :

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4\left|\overrightarrow{MK}\right| \leqslant 4\left|\overrightarrow{M_0K}\right| \qquad (2)$$

Trong (2) thì $M_0K \perp (P)$, $M_0 \in (P)$

Vậy : $\min\limits_{M\in(P)} \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4\left|\overrightarrow{M_0K}\right|$

$\Leftrightarrow$ M_0 là hình chiếu vuông góc của K trên mặt phẳng (P). (ycbt)

Bài 433

Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB và CD. Hai điểm R, S lần lượt lấy trên các cạnh AC và BD sao cho $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{AC}} = \dfrac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{BD}} = k \ (k > 0)$. Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, R, S nằm trên cùng một mặt phẳng.

Giải

Ta có : $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \dfrac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}\right) + \left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP}\right)\right]$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) - \left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}\right)}_{\vec{0}}\right] = \frac{1}{2}.\frac{1}{k}\left(\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BS}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PS}\right) = \frac{1}{2k}(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}) \ (\text{vì } \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \vec{0})$$

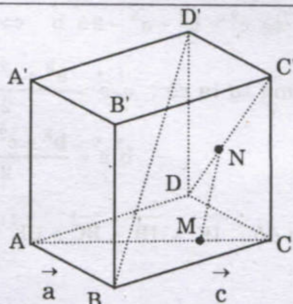
$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}\overrightarrow{PR} + \frac{1}{2k}\overrightarrow{PS} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS} \text{ đồng phẳng.}$$

Vậy P, Q, R, S nằm trên cùng một mặt phẳng (đpcm).

Bài 434

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tìm điểm M thuộc đoạn AC và điểm N thuộc đoạn C'D sao cho MN song song với BD'.

Giải



Xét các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$

Để ý : $\begin{cases} M \in AC \Rightarrow \overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC} \\ N \in C'D \Rightarrow \overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D} \end{cases}$

Giả thiết MN // BD' cho :

$$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'} = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c} \quad (1)$$

Mặt khác : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = n\overrightarrow{AC} + \vec{b} + m\overrightarrow{C'D} = n(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + m(\vec{a} - \vec{b})$

$= (m - n)\vec{a} + (1 - m)\vec{b} + n\vec{c}$ (2)

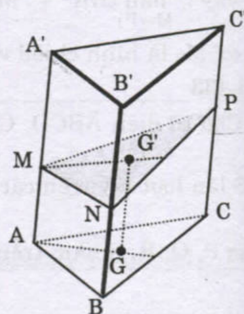
So sánh từ (1) và (2), ta được : $\begin{cases} m - n = k & (3) \\ 1 - m = k & (4) \\ n = k & (5) \end{cases} \Leftrightarrow k = n = \dfrac{1}{3}, m = \dfrac{2}{3}$

Vậy : $\overrightarrow{MC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'N} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{C'D}$ (đủ để xác định M, N thỏa ycbt)

Bài 435

Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng a. Trên các cạnh bên AA', BB', CC' lấy các điểm M, N, P sao cho AM + BN + CP = a. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

G' là trọng tâm của tam giác MNP.

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG'} \\ \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NG'} \\ \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PG'} \end{cases}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + (\overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{NG'} + \overrightarrow{PG'})$

$\Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \dfrac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}}{3} = \dfrac{\overrightarrow{AA'}}{3}$ (vectơ buộc)

Mà G cố định $\Rightarrow$ G' cố định. Vậy mp(MNP) đi qua G' cố định (đpcm).

Bài 436

Cho hình tứ diện ABCD cá các cặp cạnh đối bằng nhau :

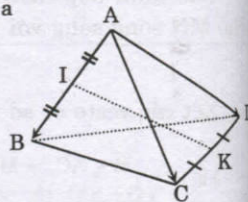
AB = CD = a; BC = AD = c; AC = BD = b

1/ Chứng minh rằng đoạn thẳng nối hai trung điểm của cặp cạnh đối diện là đường vuông góc chung của hai cạnh đó.

2/ Tính độ dài đường vuông góc chung đó theo a, b, c.

Giải

Khi chọn hệ vectơ cơ sở : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| = a; |\vec{b}| = b; |\vec{c}| = c$



Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} \Leftrightarrow BC^2 = (\overrightarrow{BC})^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = b^2 + a^2 - 2\vec{b}.\vec{a}$

$\Leftrightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \Leftrightarrow 2\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2}$ (1)

Tương tự ta có : $\vec{a}.\vec{c} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$ (2)

$\vec{b}.\vec{c} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ (3)

Lúc đó : $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \dfrac{\vec{a}}{2} + (\vec{b} - \vec{a}) + \dfrac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \dfrac{\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}}{2}$ (*)

Xét : $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}\right).\vec{a} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}-\vec{a}^2\right)$ (4)

Thay (1), (2) vào (4), ta có :

$$\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2}-a^2\right) = \frac{1}{4}.0 = 0 \Rightarrow IK \perp AB \quad (5)$$

Hoàn toàn tương tự chứng minh được : $IK \perp CD$ (6)

Vậy (5) và (6) cho ta IK là đường vuông góc chung của AB và CD ⇒ (đpcm).

2/ Ta có : $\overrightarrow{IK}^2 = \left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{a}^2+2\vec{b}\vec{c}-2\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{c}\right)$

$$\Rightarrow IK^2 = \frac{1}{4}\left[b^2+c^2+a^2+(b^2+c^2-a^2)-(a^2+b^2-c^2)-(a^2+c^2-b^2)\right] = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-2a^2)$$

$$\Rightarrow IK = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{b^2+c^2-a^2} \text{ (ycbt).}$$

Bài 437

Các góc phẳng ở đỉnh của một góc tam diện bằng α, β, γ. Các góc phẳng nhị diện đối diện tương ứng bằng A, B và C. Chứng minh rằng ta luôn có :

$$\cos\alpha = \cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\sin\gamma.\cos A$$
$$\cos\beta = \cos\alpha.\cos\gamma + \sin\alpha.\sin\gamma.\cos B$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos C$$

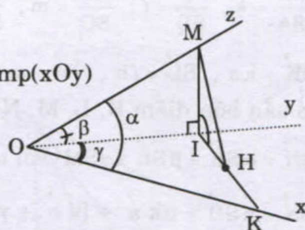
Giải

Đặt : $\widehat{zOx} = \alpha$; $\widehat{zOy} = \beta$; $\widehat{xOy} = \gamma$.

Trên Oz lấy một điểm M, kẻ MI ⊥ Oy; I ∈ Oy và MH ⊥ mp(xOy)

⇒ HI ⊥ Oy (định lý 3 đường vuông góc) với $\widehat{MIH} = A$.

Đường thẳng IH cắt Ox tại K.



Chọn vectơ cơ sở : $\overrightarrow{OI} = \vec{a}, \overrightarrow{OK} = \vec{b}, \overrightarrow{OM} = \vec{c}$

Lúc đó : $\left|\vec{b}\right| = \dfrac{\left|\vec{a}\right|}{\cos\gamma}; \left|\vec{c}\right| = \dfrac{\left|\vec{a}\right|}{\cos\beta} \Rightarrow \vec{b}.\vec{c} = \left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|.\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{a}\right|^2.\cos\alpha}{\cos\gamma.\cos\beta} = \dfrac{a^2.\cos\alpha}{\cos\gamma.\cos\beta}$ (1)

Mặt khác : $\vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{IK}$, $\vec{c} = \vec{a} + \overrightarrow{IM}$

$$\Rightarrow \vec{b}.\vec{c} = (\vec{a}+\overrightarrow{IK}).(\vec{a}+\overrightarrow{IM}) = \vec{a}^2 + \vec{a}.\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IK}.\vec{a} + \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IM} = a^2 + 0 + 0 + \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IM}$$
$$= a^2 + \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IM}$$

Nhưng : $\left|\overrightarrow{IK}\right| = \left|\vec{a}\right|.\tan\gamma.\tan\beta.\cos A$

$$\Rightarrow \vec{b}.\vec{c} = a^2 + a^2\tan\gamma.\tan\beta.\cos A = a^2(1+\tan\gamma.\tan\beta.\cos A) \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ⇒ $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma.\cos\beta} = 1 + \tan\gamma.\tan\beta.\cos A$

⇔ $\cos\alpha = \cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\sin\gamma\cos A$ (ycbt)

Tương tự ta chứng minh được :

$\cos\beta = \cos\alpha.\cos\gamma + \sin\alpha.\sin\gamma.\cos B$ (ycbt)

$\cos\gamma = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos C$ (ycbt)

Bài 438

Trong không gian cho một điểm O và bốn điểm A, B, C, D phân biệt và không thẳng hàng. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ABCD là một hình bình hành là: $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$.

Giải

❐ Nếu ABCD là một hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ với điểm O bất kỳ trong không gian.

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$ (1) (đpcm)

❐ Đảo lại nếu ta có : $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

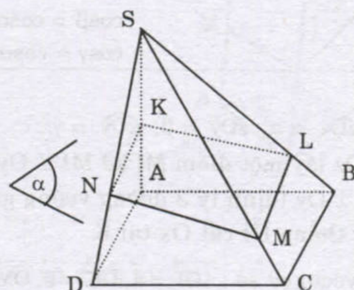
Nhưng do A, B, C, D phân biệt và không thẳng hàng ⇒ ABCD là một hình bình hành.

Từ (1) và (2) ⇒ (đpcm).

Bài 439

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD, lần lượt tại K, L, M, N. Chứng minh rằng : $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$.

Giải



Xét các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$

Với K ∈ SA; L ∈ SB; M ∈ SC, ta có :

$\frac{SK}{SA} = k$, $\frac{SL}{SB} = l$, $\frac{SM}{SC} = m$, $\frac{SN}{SD} = n$.

$\Rightarrow \overrightarrow{SK} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{SL} = l\vec{b}$, $\overrightarrow{SM} = m\vec{c}$, $\overrightarrow{SN} = n\overrightarrow{SD}$.

Đã có sẵn bốn điểm K, L, M, N đồng phẳng nên :

$\overrightarrow{SN} = \alpha\overrightarrow{SK} + \beta\overrightarrow{SL} + \gamma\overrightarrow{SM}$ với α + β + γ = 1.

$\Rightarrow \overrightarrow{SN} = n\overrightarrow{SD} = \alpha k\vec{a} + \beta l\vec{b} + \gamma m\vec{c}$

Với ABCD là hình bình hành nên ta có :

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} \Rightarrow \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$\Rightarrow n\overrightarrow{SD} = n\vec{a} - n\vec{b} + n\vec{c} = \alpha k\vec{a} - \beta l\vec{b} + \gamma m\vec{c}$

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

n = αk, −n = βl, n = γm hay α = $\frac{n}{k}$, β = $-\frac{n}{l}$, γ = $\frac{n}{m}$.

Nhưng α + β + γ = 1 nên : $\frac{n}{k} - \frac{n}{l} + \frac{n}{m} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k} + \frac{1}{m} = \frac{1}{l} + \frac{1}{n}$

Vậy : $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$ (đpcm).

Bài 440

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt giao điểm các đường chéo của các mặt (ABCD), (CDD'C'), (A' B'C'D'), (ADD'A').

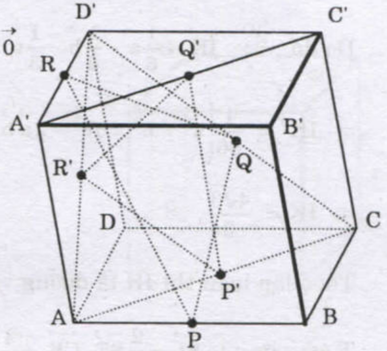
1/ Chứng minh rằng : $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

2/ Chứng minh rằng ΔPQR và ΔP'Q'P' có trọng tâm trùng nhau.

Giải

1/ Xét : $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA'} + \overrightarrow{A'A}) = \vec{0}$ (1) (đpcm)

2/ Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm các ΔPQR và ΔP'Q'R'.



$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P'}) + (\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'Q'}) + (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'R'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{RG})}_{\vec{0}} + 3\overrightarrow{GG'} + \underbrace{(\overrightarrow{G'P'} + \overrightarrow{G'Q'} + \overrightarrow{G'R'})}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{0} \quad + 3\overrightarrow{GG'} \quad + \quad \vec{0} \quad = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ G trùng G'

Vậy hai ΔPQR và ΔP'Q'R' có cùng một trọng tâm (đpcm).

Bài 441

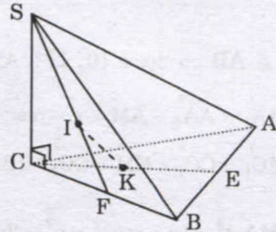
Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh là $4\sqrt{2}$, SC ⊥ (ABC), gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CB, SC = 2. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa SF và CE.

Giải

Ta chọn hệ cơ sở : $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CS} = \vec{c} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c} = 0 \\ \vec{a}.\vec{b} = (4\sqrt{2})^2.\cos 60^0 = 16 \end{cases}$

Lấy tùy ý I ∈ SF, ta có : $\overrightarrow{SI} = \alpha\overrightarrow{SF} = \alpha\left(-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{SI} = -\alpha\vec{c} + \frac{1}{2}\alpha\vec{b}$

Lấy tùy ý K ∈ CE cũng có : $\overrightarrow{CK} = \beta\overrightarrow{CE} = \beta\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right)$



Do đó : $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CK} = \alpha\vec{c} - \frac{1}{2}\alpha\vec{b} + (-\vec{c}) + \frac{\beta}{2}\vec{a} + \frac{\beta}{2}\vec{b}$

$$= \frac{\beta}{2}\vec{a} + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)\vec{b} + (\alpha - 1)\vec{c} \qquad (*)$$

Xét : SF ⊥ IK ⇔ $\overrightarrow{SF}.\overrightarrow{IK} = 0$, trong đó $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CF} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{4}\vec{a}.\vec{b} + \left(\frac{\beta - \alpha}{4}\right)\vec{b}^2 + \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)\vec{b}.\vec{c} - \frac{\beta}{2}\vec{a}.\vec{c} - \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)\vec{b}.\vec{c} - (\alpha - 1)\vec{c}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{4}(16) + \left(\frac{\beta - \alpha}{4}\right)32 + 0 - 0 - (\alpha - 1)4 = 0 \Leftrightarrow 12\beta - 12\alpha = -4 \Leftrightarrow 3\beta - 3\alpha = -1 \qquad (1)$$

Lại xét : CE ⊥ IK ⇔ $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IK} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left[\frac{\beta}{2}\vec{a} + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)\vec{b} + (\alpha - 1)\vec{c}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{4}\vec{a}^2 + \left(\frac{\beta - \alpha}{4}\right)\vec{a}\vec{b} + \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)\vec{a}\vec{c} + \frac{\beta}{4}\vec{a}\vec{b} + \left(\frac{\beta - \alpha}{4}\right)\vec{b}^2 + \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)\vec{b}\vec{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{4}(32) + \left(\frac{\beta - \alpha}{4}\right)16 + 0 + \frac{\beta}{4}(16) + \left(\frac{\beta - \alpha}{4}\right)32 + 0 = 0 \Leftrightarrow 24\beta - 12\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \alpha = 2\beta \qquad (2)$$

Giải hệ : $\begin{cases} \alpha = 2\beta & (1) \\ 3\beta - 3\alpha = -1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{3} \\ \beta = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Do đó : $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$ và $\overrightarrow{IK}^2 = \left(\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right)^2 = \frac{1}{36}\left(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}\right)^2$

$\Rightarrow IK^2 = \frac{1}{36}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 4\vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{a}\vec{c} + 4\vec{b}\vec{c}\right) = \frac{1}{36}(32 + 32 + 16 - 2(16) - 0 + 0) = \frac{48}{36} = \frac{12}{9}$

$\Leftrightarrow IK = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

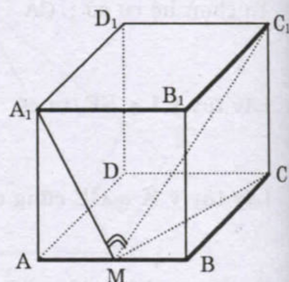
Theo lập luận thì IK là đường vuông góc chung của SF và CE $\Rightarrow$ mind[SF; CE] = IK = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tương ứng : $\overrightarrow{SI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SF}$, $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$.

Bài 442

Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có chiều cao dài bằng nửa cạnh đáy ($h = \frac{a}{2}$). Với M là một điểm tùy ý trên cạnh AB, tìm giá trị lớn nhất của $\widehat{A_1MC_1}$.

Giải



Chọn vectơ cơ sở : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ $\Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 2\left|\vec{c}\right|$

Chiều cao của lăng trụ là h thì $\left|\vec{c}\right| = h$.

Do $M \in AB \Rightarrow \exists\alpha \in [0; 1] : \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$ với $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AM} = \vec{c} - \alpha\vec{a} \\ \overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CC_1} - (\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = (1-\alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{MA_1})^2 = (\vec{c} - \alpha\vec{a})^2 = \vec{c}^2 - 2\alpha\vec{c}.\vec{a} + \alpha^2\vec{a}^2 = h^2 - 0 + \alpha^2(4h^2) = h^2(1 + 4\alpha^2) \\ (\overrightarrow{MC_1})^2 = \left[(1-\alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right]^2 = (1-\alpha)^2 4h^2 + 4h^2 + h^2 = h^2[4(1-\alpha)^2 + 5] \end{cases}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA_1}\right| = h\sqrt{1 + 4\alpha^2}$ và $\left|\overrightarrow{MC_1}\right| = h\sqrt{4(1-\alpha)^2 + 5}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MC_1} = (\vec{c} - \alpha\vec{a})[(1-\alpha)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = \vec{c}^2 - \alpha(1-\alpha)\vec{a}^2 = h^2 - \alpha(1-\alpha)4h^2$

$= h^2[1 - 4\alpha(1-\alpha)] = h^2(2\alpha - 1)^2$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{MA_1}; \overrightarrow{MC_1}\right) = \frac{h^2(2\alpha-1)^2}{h^2\sqrt{(1+4\alpha^2)[4(1-\alpha)^2+5]}}$; với $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$\Rightarrow \cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{MA_1}; \overrightarrow{MC_1}\right) = \frac{(2\alpha-1)^2}{\sqrt{(1+4\alpha^2)[4(1-\alpha)^2+5]}} \geqslant 0$ (vì $0 \leqslant \varphi \leqslant 90^0$)

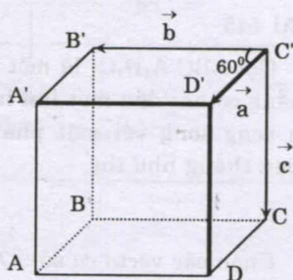
$\exists\max\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \in [0; 1]$, khi M là trung điểm AB (ycbt)

Bài 443

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có $\widehat{BCD} = 60^0$ và các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh rằng:

$$C'B^2 + C'D^2 = C'A^2.$$

Giải



Xét các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{C'D'} = \vec{a}, \overrightarrow{C'B'} = \vec{b}, \overrightarrow{C'C} = \vec{c}$

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{C'B} = \vec{b} + \vec{c} \Leftrightarrow C'B^2 = (\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{b}\vec{c} \\ \overrightarrow{C'D} = \vec{a} + \vec{c} \Leftrightarrow C'D^2 = (\vec{a} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{c} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{C'B}^2 = a^2 + a^2 + 2\vec{b}\vec{c} \\ \overrightarrow{C'D}^2 = a^2 + a^2 + 2\vec{a}\vec{c} \end{cases}$

$\Rightarrow C'B^2 + C'D'^2 = 4a^2 + 2\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = 4a^2 + 2\vec{c}.\overrightarrow{C'A'}$ (1)

Xét riêng : $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$

$\Rightarrow \overrightarrow{C'A}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c} = a^2 + a^2 + a^2 + 2a^2\cos 60^0 + 2\vec{c}(\vec{a} + \vec{b})$

$= 4a^2 + 2\vec{c}.\overrightarrow{C'A'}$ (2)

So sánh (1) và (2) $\Rightarrow C'B^2 + C'D^2 = C'A^2$ (đpcm)

Bài 444

Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Có $M \in A'B'$, $N \in AB$, $P \in CC'$ thỏa mãn : $\dfrac{A'M}{MB'} = \dfrac{BN}{NA} = \dfrac{C'P}{PC} = \dfrac{1}{2}$.

Mặt phẳng MNP cắt B'C' tại Q. Tìm tỷ số $\dfrac{C'Q}{B'C'}$.

Giải

Xét các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

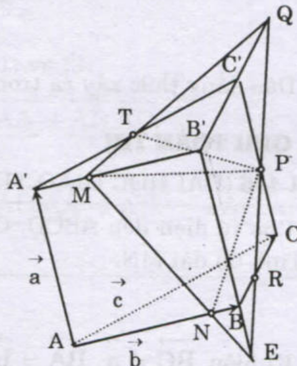
Để ý thấy $Q \in mp(MNP) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{MP} + y\overrightarrow{QN}$ (1)

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AN} = -\dfrac{1}{3}\vec{b} - \vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b} = \dfrac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$

Lại có : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'P} = -\dfrac{1}{3}\vec{b} + \vec{c} - \dfrac{1}{3}\vec{a}$

Và $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QC'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{B'C'} - \vec{a} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\vec{b} = k(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'}) - \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \dfrac{1}{3}\vec{b}$

$= k(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}$ (2)



Thay (2) vào (1) ta được :

$\dfrac{1}{3}\vec{b} - \vec{a} = -\dfrac{1}{3}x\vec{b} + x\vec{c} - \dfrac{1}{3}x\vec{a} + ky\vec{c} - ky\vec{b} - y\vec{a} + \dfrac{2}{3}y\vec{b} - y\vec{c}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + ky - y = 0 \\ -\dfrac{1}{3}x - ky + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3}x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{7} \\ y = \dfrac{5}{7} \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

Do đó : $\overrightarrow{QC'} = k\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{B'C'} \Rightarrow$ Q chia ngoài đoạn B'C' theo tỷ số $\frac{1}{5}$.

Vậy là Q ở phần B'C' kéo dài về phía C' một đoạn C'Q = $\frac{1}{5}$B'C'. (ycbt)

Bài 445

Gọi $ABC.A_1B_1C_1$ là một hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Xét các đoạn thẳng có hai đầu mút lần lượt nằm trên hai đường chéo BC_1 và CA_1 của hai mặt bên lăng trụ và song song với mặt phẳng ABB_1A_1. Tính chiều dài của đoạn thẳng ngắn nhất trong các đoạn thẳng như thế.

Giải

Chọn các vectơ cơ sở : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{a^2}{2};\ \vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow \exists\alpha \in [0; 1] : \overrightarrow{MA_1} = \alpha\overrightarrow{CA_1} = \alpha(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{C_1N} = \beta\overrightarrow{C_1B} = \beta(-\vec{b} - \vec{c} + \vec{a})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{C_1N} = \alpha(\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b} + \beta(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = \beta\vec{a} + (1 - \alpha - \beta)\vec{b} + (\alpha - \beta)\vec{c} \quad (1)$$

Để ý đến ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CC_1}$ là đồng phẳng

$$\Rightarrow \exists p; q : \overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{CC_1} = p\vec{a} + q\vec{c} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) cho : $\beta\vec{a} + (1 - \alpha - \beta)\vec{b} + (\alpha - \beta)\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{c}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = p \\ 1 - \alpha - \beta = 0 \\ \alpha - \beta = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \beta \\ \alpha = 1 - \beta \\ q = 1 - 2\beta \end{cases}$$

Lúc đó (1) hoặc (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \beta\vec{a} + 0.\vec{b} + (1 - 2\beta)\vec{c}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \beta^2\vec{a}^2 + (1 - 2\beta)^2\vec{c}^2 + 2\beta(1 - 2\beta)\vec{a}.\vec{c}$$

$$\Rightarrow MN^2 = \beta^2a^2 + (1 - 2\beta)^2a^2 + 0 = (5\beta^2 - 4\beta^2 + 1)a^2$$

$$= 5\left(\beta^2 - \frac{4\beta}{5} + \frac{1}{5}\right)a^2 = 5\left[\left(\beta - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}\right]a^2 \geqslant \frac{a^2}{5} \quad (3)$$

Dấu đẳng thức xảy ra trong (3) khi b = $\frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ min(MN) = $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ tương ứng b = $\frac{2}{5}$ (ycbt)

III. GIẢI TOÁN THI

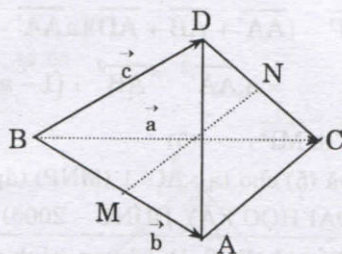
Bài 446 (ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI HÀ NỘI – 1997)

Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M, N là trung điểm tương ứng của các cạnh AB, CD và CB = a. Tính độ dài MN.

Giải

Kí hiệu $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{BA} = \vec{b}, \overrightarrow{BD} = \vec{c}$

Vì ABCD là tứ diện đều nên :



$$\begin{cases} \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = a^2 \\ \vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = \dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB} = -\dfrac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{c} - 2\vec{b}\vec{c}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ (ycbt)}$$

Bài 447 (ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI HÀ NỘI – 2000)

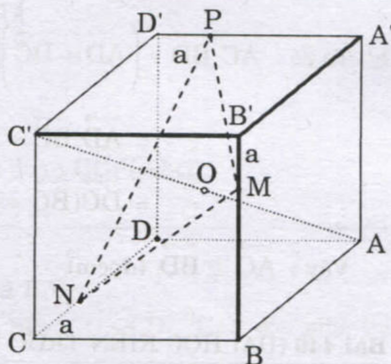
Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D', các cạnh của nó có độ dài bằng 1. Trên các cạnh BB', CD, A'D' lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho :

$$B'M = CN = D'P = a \ (0 < a < 1).$$

Chứng minh rằng : 1/ $\overline{MN} = -a.\overline{AB} + \overline{AD} + (a-1)\overline{AA'}$

2/ $\overline{AC'}$ vuông góc với mặt phẳng (MNP).

Giải



1/ Sử dụng hệ thức Chales, ta có :

$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$

$= (1-a).\overline{B'B} + \overline{AD} + a.\overline{CD}$

$= (a-1).\overline{AA'} + \overline{AD} - a.\overline{AB}$ (1)

2/ Tương tự, sử dụng hệ thức Chales, ta có :

$\overline{MP} = \overline{MB'} + \overline{B'A'} + \overline{A'P}$

$= a.\overline{AA'} - \overline{AB} + (1-a)\overline{AD}$ (2)

và $\overline{AC'} = \overline{AA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AD}$ (3)

• $\overline{AC'}.\overline{MN} = (\overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AD})[(a-1)\overline{AA'} + \overline{AD} - a.\overline{AB}]$ do (1) và (3)

$$= (a-1)\underbrace{\overline{AA'}^2}_{1} + \underbrace{\overline{AA'}.\overline{AD}}_{0} - a\underbrace{\overline{AA'}.\overline{AB}}_{0} + (a-1)\underbrace{\overline{AB}.\overline{AA'}}_{0} + \underbrace{\overline{AB}.\overline{AD}}_{0} -$$

$$- a\underbrace{\overline{AB}^2}_{1} + (a-1)\underbrace{\overline{AD}.\overline{AA'}}_{0} + \underbrace{\overline{AD}^2}_{1} - a\underbrace{\overline{AD}.\overline{AB}}_{0}$$

$= (a-1) - a + 1 = 0$

$\Rightarrow \overline{AC'} \perp \overline{MN}$ (4)

- $\overline{AC'}.\overline{MP} = (\overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AD})[a\overline{AA'} - \overline{AB} + (1-a).\overline{AD}]$ do (2) và (3)

$$= a.\overline{AA'}^2 - \overline{AB}^2 + (1-a).\overline{AD}^2 = a - 1 + (1-a) = 0$$

$\Rightarrow \overline{AC'} \perp \overline{MP}$ (5)

Từ (4) và (5) cho ta : AC' ⊥ (MNP) (đpcm).

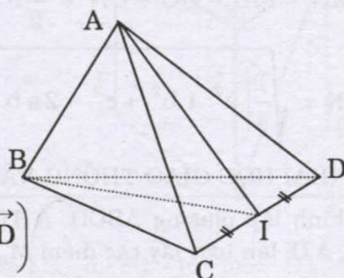
Bài 448 (ĐẠI HỌC XÂY DỰNG – 2000)

Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng :

a/ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

b/ Nếu $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ thì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

Giải



a/ $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BD}^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BI}$ (với I là trung điểm CD)

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DC}\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$ (đpcm)

b/ Ta có : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$

$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}$, do $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA} = 0$

Vậy : $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ (đpcm)

Bài 449 (ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI – 2000)

Cho tứ diện ABCD và M là một điểm di động trong không gian. G và G_1 lần lượt là trọng tâm tứ diện và trọng tâm tam giác BCD.

1/ Chứng minh : $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

2/ Chứng minh : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

(**Ghi chú :** *Trọng tâm của tứ diện là giao điểm các đường thẳng nối mỗi đỉnh của tứ diện với trọng tâm của mặt đối diện*)

3/ Tìm tập điểm M thỏa mãn hệ thức :

$$3\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$$

Giải

1/ Gọi G_1 là trọng tâm ΔBCD và B' là trung điểm CD, ta có :

$$\overrightarrow{G_1B} = -2\overrightarrow{G_1B'} \qquad (1)$$

Ta lại có : $\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = 2\overrightarrow{G_1B'} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$ (đpcm).

2/ Gọi G_2 là trọng tâm ΔACD.

Khi đó G là giao điểm của AG_1 với BG_2.

Ta có : $\dfrac{B'G_1}{B'B} = \dfrac{B'G_2}{B'A} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow G_1G_2 \,//\, AB$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG_1} = -\overrightarrow{GA}$ (Theo định lý Thalès)

Mà : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = 3\overrightarrow{GG_1}$

Vậy : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GA} = \vec{0}$ (đpcm).

3/ Ta có : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG_1}$

Do đó : $3\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$

$\Leftrightarrow 12\left|\overrightarrow{MG}\right| = 12\left|\overrightarrow{MG_1}\right| \Leftrightarrow MG = MG_1$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt phẳng trung trực (α) của đoạn GG_1 (ycbt).

Bài 450 (ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG, KHỐI B, ĐỢT 2 – 2002)

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

a/ Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

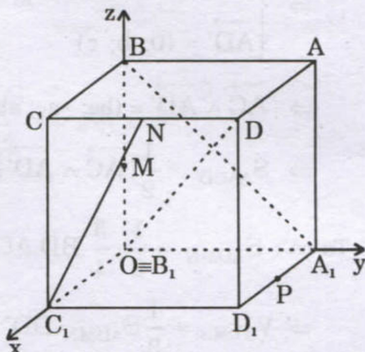
b/ Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

Giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ như sau :

$B_1(0;\,0;\,0)$, $C_1(a;\,0;\,0)$, $A_1(0;\,a;\,0)$,

$B(0;\,0;\,a)$, $D(a;\,a;\,a)$.



a/ Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{A_1B} = (0;\,-a;\,a), & \overrightarrow{B_1D} = (a;\,a;\,a) \\ \overrightarrow{A_1B_1} = (0;\,-a;\,0), & \overrightarrow{A_1D} = (a;\,0;\,a) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n} = \overrightarrow{A_1B} \wedge \overrightarrow{B_1D} = (-2a^2;\ a^2;\ a^2) \\ \overrightarrow{A_1B} \wedge \overrightarrow{A_1B_1} = (a^2;\ 0;\ 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = |\vec{n}| = \sqrt{4a^4 + a^4 + a^4} = a^2\sqrt{6} \\ V_{DA_1BB_1} = \dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{A_1B} \wedge \overrightarrow{A_1B_1}).\overrightarrow{A_1D}| = \dfrac{1}{6}a^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(A_1B, B_1D) = \frac{6V_{DA_1BB_1}}{S} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

b/ Ta có : $\begin{cases} M\left(0;\ 0;\ \dfrac{a}{2}\right) \\ N\left(a;\ \dfrac{a}{2};\ a\right) \\ P\left(\dfrac{a}{2};\ a;\ 0\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MP} = \left(\dfrac{a}{2};\ a;\ -\dfrac{a}{2}\right) \\ \overrightarrow{C_1N} = \left(0;\ \dfrac{a}{2};\ a\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{C_1N}}) = \frac{\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{C_1N}}{|\overrightarrow{MP}|.|\overrightarrow{C_1N}|} = 0 \ \Rightarrow MP \perp C_1N.$$

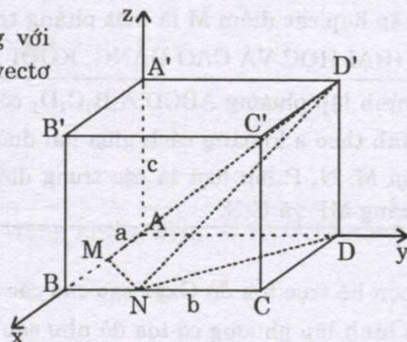
Bài 451 (HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ – 2001)

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với AB = a, BC = b, AA' = c.

a/ Tính diện tích của ΔACD' theo a, b, c.

b/ Giả sử M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Hãy tính thể tích của tứ diện D'DMN theo a, b, c.

Giải



a/ Ta lập hệ trục tọa độ vuông góc có gốc trùng với đỉnh A, các trục có phương lần lượt trùng với các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$.

Khi đó : A(0; 0; 0), C(a; b; 0), D'(0; b; c)

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (a;\ b;\ 0) \\ \overrightarrow{AD'} = (0;\ b;\ c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD'} = (bc;\ -ac;\ ab)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ACD'} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD'}| = \frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}.$$

b/ Ta có : $S_{\Delta DMN} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}.BD.AC = \dfrac{3}{8}.BD.AC = \dfrac{3}{8}.S_{ABCD} = \dfrac{3}{8}ab$

$$\Rightarrow V_{D'DMN} = \frac{1}{3}S_{\Delta DMN}.DD' = \frac{abc}{8}.$$

Bài 452 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI, KHỐI A – 2001)

Cho hai hình chữ nhật ABCD (AC là đường chéo) và ABEF (AE là đường chéo) không cùng nằm trong một mặt phẳng và thỏa mãn các điều kiện: $AB = a$, $AD = AF = a\sqrt{2}$. Đường thẳng $AC \perp BF$. Gọi HK là đường vuông góc chung của AC và BF ($H \in AC$, $K \in BF$).

a/ Gọi I là giao điểm của đường thẳng DF với mặt phẳng chứa AC và song song với BF. Tính tỉ số $\dfrac{DI}{DF}$.

b/ Tính độ dài đoạn HK.

c/ Tính bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện ABHK.

Giải

Chọn hệ tọa độ Đề các vuông góc trong không gian sao cho :

$A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; a)$, $D(0;\ a\sqrt{2};\ 0)$,

$F(x; y; 0)$ (với $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 = AF^2 = 2a^2$)

Suy ra : $\overrightarrow{AC} = (0;\ a\sqrt{2};\ a)$, $\overrightarrow{BF} = (x; y; -a)$

Mà $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF} = 0$ nên $a\sqrt{2}.y - a^2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

a/ Giao điểm I cần tìm là điểm thuộc đường thẳng DF sao cho mặt phẳng (ACI) song song với BF tức một vectơ vuông góc $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CI}$ thì phải vuông góc với $\overrightarrow{BF}$.

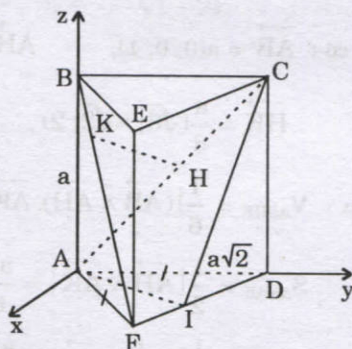
Đặt $\overrightarrow{DI} = t.\overrightarrow{DF}$ $(t \neq 0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI} = (0;0;-a) + t.\overrightarrow{DF}$$

$$= (0;0;-a) + t(x; y - a\sqrt{2}; 0)$$

$$= (0;0;-a) + t\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}t; -t; -\sqrt{2}\right)$$



và $\overrightarrow{AC} = a(0; \sqrt{2}; 1)$

nên một vectơ $\neq \vec{0}$ vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{CI}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

$$\vec{R} = (-2 + t; \sqrt{3}t; -\sqrt{6}t)$$

Mà $\vec{R} \perp \overrightarrow{BF} = \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; -a\right)$ nên $(-2 + t)\dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}t + \sqrt{6}t = 0$

$$\Leftrightarrow -2 + t + t + 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{DI}{DF} = \frac{1}{2}.$$

b/ Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AH} = u.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BK} = v.\overrightarrow{BF} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{AH} = (0;0;a) + v.\overrightarrow{BF} - u.\overrightarrow{AC}$$

$$= (0;0;a) + v\left(\frac{a\sqrt{6}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};-a\right) - u(0;a\sqrt{2};a)$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}v;\frac{a.v.\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{2}.u;a - av - ua\right)$$

$$= a\left(\frac{\sqrt{6}}{2}v;\frac{v.\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}u;1 - u - v\right)$$

Đường thẳng HK ⊥ AC và BF nên :

$$\begin{cases}\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC} = 0\\ \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BF} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v - 2u + 1 - u - v = 0\\ \frac{3}{2}v + \frac{v}{2} - u - 1 + u + v = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u = \frac{1}{3}\\ v = \frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH} = \frac{a}{3}(0;\sqrt{2};1)\\ \overrightarrow{AK} = \frac{a}{6}(\sqrt{6};\sqrt{2};4)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{HK} = \frac{a}{6}(\sqrt{6};-\sqrt{2};2)$$

$$\Rightarrow HK = \frac{a}{6}\sqrt{6+2+4} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

c/ Ta có : $\overrightarrow{AB} = a(0;\ 0;\ 1)$, $\quad \overrightarrow{AH} = \frac{a}{3}(0;\sqrt{2};1)$, $\quad \overrightarrow{AK} = \frac{a}{6}(\sqrt{6};\sqrt{2};4)$

$\overrightarrow{HK} = \frac{a}{6}(\sqrt{6};-\sqrt{2};\ 2)$, $\quad \overrightarrow{BH} = \frac{a}{3}(0;\ \sqrt{2};\ -2)$

nên : $V_{ABHK} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{AK}| = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

$$S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AK}| = \frac{a^2}{6}; \quad S_{\Delta BHK} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{HK} \wedge \overrightarrow{BH}| = \frac{a^2}{6}$$

$$S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AH}| = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}; \quad S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AK}| = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S_{\Delta AHK} + S_{\Delta BHK} + S_{\Delta ABH} + S_{\Delta ABK} = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2}{3}(1+\sqrt{2})$$

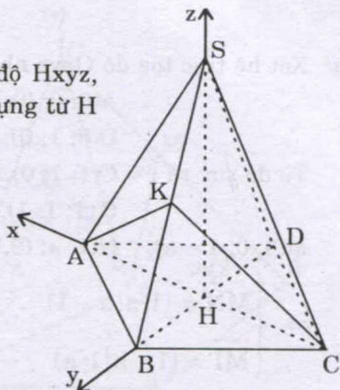
Bán kính hình cầu cần tìm : $r = \frac{3V_{ABHK}}{S_{tp}} = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{3}}{3}}{\frac{a^2(1+\sqrt{2})}{3}} = \frac{3a\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$

Vậy : $r = 3(\sqrt{6} - \sqrt{3})a$.

Bài 453

Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Các mặt bên tạo với đáy góc β. Gọi K là trung điểm của SB. Hãy tính góc φ giữa mặt phẳng (AKC) và (SAB) theo β.

Giải



Kẻ đường cao SH. Lấy H làm gốc tọa độ, dựng hệ trục tọa độ Hxyz, trục Hx chứa A, chiều dựng từ H đến A, trục Hy chứa B, chiều dựng từ H đến B, trục Hz chứa S, chiều dựng từ H đến S.

Đặt $\begin{cases} AB = a\sqrt{2} \\ SH = h \end{cases}$

Ta có : A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(–a; 0; 0),

D(0; –a; 0), S(0; 0; h) và $K\left(0; \frac{a}{2}; \frac{h}{2}\right)$

Mặt phẳng (ABC) có phương trình z = 0, mặt phẳng (SAB) có phương trình theo đoạn chắn là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{h} = 1 \Leftrightarrow hx + hy + az - ah = 0$$

Mặt phẳng (AKC) chứa trục Hx và đi qua K nên có phương trình là :

$$-hy + az = 0$$

Vậy góc β giữa (SAB) và (ABC) được xác định bởi :

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{h^2 + h^2 + a^2}.\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2k}} \quad (\text{với } k = \frac{h^2}{a^2}).$$

Vì φ là góc giữa (AKC) và (SAB) nên :

$$\cos\varphi = \frac{|a^2 - h^2|}{\sqrt{a^2 + h^2}.\sqrt{a^2 + 2h^2}} = \frac{|1 - k|}{\sqrt{1 + k}.\sqrt{1 + 2k}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2\beta = \dfrac{1}{1 + 2k} \quad (\Rightarrow k = \dfrac{1}{2}\tan^2\beta) \\ \cos\varphi = \dfrac{|1 - k|}{\sqrt{1 + k}.\sqrt{1 + 2k}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left|1 - \frac{1}{2}\tan^2\beta\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\tan^2\beta}} \cdot \cos\beta = \frac{|2\cos^2\beta - \sin^2\beta|}{\sqrt{4\cos^2\beta + 2\sin^2\beta}} = \frac{|3\cos^2\beta - 1|}{\sqrt{2(1 + \cos^2\beta)}}.$$

Bài 454 (OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ)

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Các điểm M, N, I lưu động lần lượt trên AA', BC, C'D' sao cho : A'M = BN = C'I = a ($0 \leqslant a \leqslant 1$). Gọi (α) là mặt phẳng qua ba điểm M, N, I.

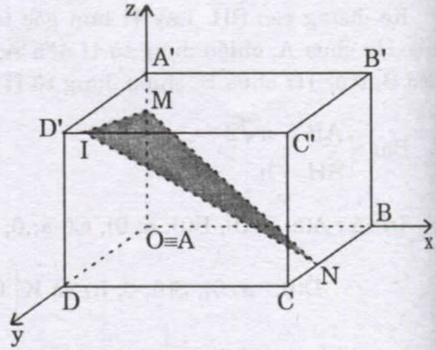
a/ Chứng minh rằng (α) luôn tự song song.

b/ Tính d(A, (α)).

c/ Tính diện tích ΔMNI theo a và xác định M để diện tích này bé nhất.

Giải

a/ Xét hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, ta có :



A(0; 0; 0),B(1; 0; 0),
D(0; 1; 0),A'(0; 0; 1).

Từ đó suy ra : C(1; 1; 0),B'(1; 0; 1),
C'(1; 1; 1), D'(0; 1; 1),

M(0; 0; 1 – a), N(1; a; 0),I(1 – a; 1; 1)

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} = (1; a; a-1) \\ \overrightarrow{MI} = (1-a; 1; a) \end{cases}$$

⇒ Pháp tuyến của (MNI) là :

$$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MI} = (a^2 - a + 1; -a^2 + a - 1; a^2 - a + 1)$$

nên pháp tuyến thu gọn là $\vec{n}_{\alpha_0} = (1; -1; 1) \Rightarrow \vec{n}_{\alpha_0}$ cố định.

Vậy (α) là mặt phẳng tự song song.

b/ Ta viết được phương trình mặt phẳng (α) (chứa M) là :

$$1(x - 0) - 1(y - 0) + 1(z - 1 + a) = 0 \Leftrightarrow x - y + z + a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow d(A, \alpha) = \frac{1-a}{\sqrt{3}}$$

c) $S_{\Delta MNI} = \frac{1}{2}|\vec{n}_\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - a + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Vậy : $\min S_{\Delta MNI} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ khi $a = \frac{1}{2}$, tức là $M\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm đoạn AA'.

Bài 455 (ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI – 2000)

Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau. Trên Ox, Oy, Oz theo thứ tự lấy các điểm A, B, C sao cho OA = a > 0, OB = $a\sqrt{2}$, OC = c > 0. Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật AOBD và M là trung điểm BC, (P) là mặt phẳng đi qua A, M và cắt (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với AM.

a/ Gọi E là giao điểm của đường thẳng OC với (P). Tính độ dài OE.

b/ Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp C.AOBD bởi mặt phẳng (P).

c/ Tính d(C, (P)).

Giải

Gọi I là tâm hình chữ nhật AOBD, {G} = AM ∩ CI, {F} = EG ∩ CD.

Đặt : $V = V_{C.AOBD}$

$(\Rightarrow V_{CAOD} = \frac{V}{2})$

$V_1 = V_{CAEMF}$

$V_2 = V_{AEMFAOBD}$

$(\Rightarrow V_1 + V_2 = V)$

Chọn hệ tọa độ Đề các Oxyz như hình vẽ. Ta có:

$A(a; 0; 0), B(0; a\sqrt{2}\ ; 0), C(0; 0; c), M\left(0; \dfrac{a}{\sqrt{2}}; \dfrac{c}{2}\right),$

$D(a; a\sqrt{2}; 0),\ G\left(\dfrac{a}{3}; \dfrac{a\sqrt{2}}{3}; \dfrac{c}{3}\right), E(0;\ 0;\ x_E)$

Do đó : $\overrightarrow{EG} = \left(\dfrac{a}{3}; \dfrac{a\sqrt{2}}{3}; \dfrac{c}{3} - x_E\right), \overrightarrow{AM} = \left(-a; \dfrac{a}{\sqrt{2}}; \dfrac{c}{2}\right)$

a/ $AM \perp EG \Leftrightarrow \overrightarrow{EG}.\overrightarrow{AM} = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3} + \frac{c}{2}\left(\frac{c}{3} - x_E\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_E = \frac{c}{3} \quad \Rightarrow E\left(0; 0; \frac{c}{3}\right) \quad \Rightarrow OE = \frac{c}{3}.$$

b/ Dễ thấy rằng : $\dfrac{CE}{CO} = \dfrac{CG}{CI} = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow EG \,//\, OI \ \Rightarrow \dfrac{CF}{CD} = \dfrac{2}{3}$

Do đó : $\dfrac{V_{CAEF}}{V_{CAOD}} = \dfrac{CA.CE.CF}{CA.CO.CD} = \dfrac{4}{9}; \quad \dfrac{V_{CEMF}}{V_{COBD}} = \dfrac{CE.CM.CF}{CO.CB.CD} = \dfrac{2}{9}$

Suy ra : $V_{CAEF} = \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{V}{2} = \dfrac{2V}{9}$

$+$

$V_{CEMF} = \dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{V}{2} = \dfrac{V}{9}$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{V}{3} \quad \Rightarrow V_2 = \frac{2V}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}.$$

c/ Phương trình mặt phẳng (AEM) là : $2cx - c\sqrt{2}y + 6az - 2ac = 0$

Do đó : $d(C, (P)) = \dfrac{|0 - 0 + 6ac - 2ac|}{\sqrt{4c^2 + 2c^2 + 36a^2}} = \dfrac{4ac}{\sqrt{6c^2 + 36a^2}}.$

Bài 456 (ĐẠI HỌC XÂY DỰNG VÀ ĐẠI HỌC LUẬT HÀ NỘI – 2000)

Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có chiều cao bằng h và hai đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính thể tích lăng trụ đó.

Giải

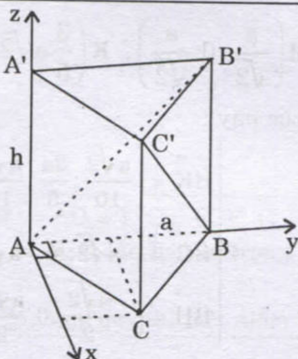
Đặt AB = BC = CA = a > 0. Ta sẽ tính a theo h.

Xét hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ.

Ta dễ thấy rằng :

$A(0; 0; 0), B(0; a; 0), C\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a}{2}; 0\right)$

$A'(0; 0; h), \quad B'(0; a; h), \quad C'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a}{2}; h\right)$



Do đó : $\overrightarrow{AB'} = (0; a; h)$, $\overrightarrow{BC'} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{a}{2}; h\right)$

Theo giả thiết : $\overrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{BC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{a^2}{2} + h^2 = 0 \Leftrightarrow a = h\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{h^2\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = h.S_{\Delta ABC} = \dfrac{h^3\sqrt{3}}{2}$.

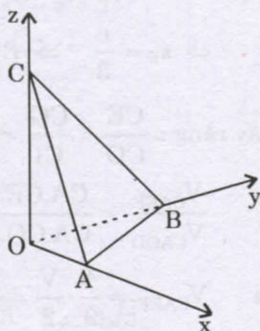
Bài 457 (ĐẠI HỌC HUẾ – 2000)

Cho tứ diện OABC với OA, OB, OC từng đôi một vuông góc và OA = a, OB = 2a, OC = 3a (a > 0).

a/ Tính $S_{\Delta ABC}$. b/ Tính d[O, (ABC)].

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.



Ta có : A(a; 0; 0), B(0; 2a; 0), C(0; 0; 3a).

Khi đó :

- $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \dfrac{7a^2}{2}$ (đvdt)
- Phương trình mặt phẳng (ABC) là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{3a} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6a = 0$$

$$\Rightarrow d[O, (ABC)] = \frac{6a}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6a}{7}.$$

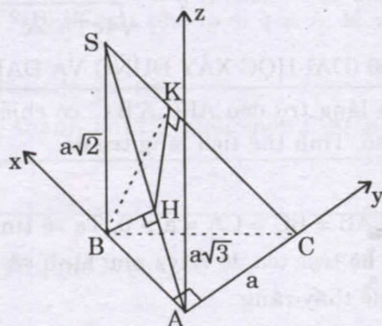
Bài 458 (HỌC VIỆN QUÂN Y HÀ NỘI – 2000)

Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Cạnh SB ⊥ (ABC). Qua B kẻ BH ⊥ SA, BK ⊥ SC. Chứng minh rằng : SC ⊥ (BHK) và từ đó tính diện tích $S_{\Delta BHK}$ biết $BC = a\sqrt{3}$, AC = a, $SB = a\sqrt{2}$ (a > 0).

Giải

Chọn hệ tọa độ Đề các Axyz như hình vẽ.

(Ax ≡ AB, Ay ≡ AC, Az ⊥ (ABC))



Tính toán ta được : A(0; 0; 0),

$B(a\sqrt{2}; 0; 0)$, C(0; a; 0), $S(a\sqrt{2}; 0; a\sqrt{2})$,

$H\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}; 0; \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $K\left(\dfrac{3}{5}a\sqrt{2}; \dfrac{2}{5}a; \dfrac{3}{5}a\sqrt{2}\right)$

Lúc này :

$$\begin{cases} \overrightarrow{HK} = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{10}; \dfrac{2a}{5}; \dfrac{a\sqrt{2}}{10}\right) \\ \overrightarrow{SC} = \left(-a\sqrt{2}; a; -a\sqrt{2}\right) \\ \overrightarrow{BH} = \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{SC} = a\left(-\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\right) = 0 \\ \overrightarrow{BH} \wedge \overrightarrow{HK} = \left(\dfrac{a^2\sqrt{2}}{5}; -\dfrac{a^2}{5}; \dfrac{a^2\sqrt{2}}{5}\right) \end{cases}$$

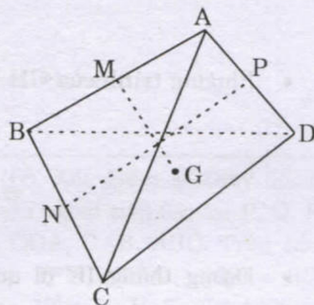
$$\Rightarrow \begin{cases} HK \perp SC \text{ (Để ý đã có } BK \perp SC) \\ S_{\Delta BHK} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BH} \wedge \overrightarrow{HK}| = \frac{1}{2\sqrt{5}}a^2 \end{cases}$$

Vậy : $\begin{cases} SC \perp (BHK) \\ S_{\Delta BHK} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}a^2. \end{cases}$

Bài 459

Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CB, AD và G là trọng tâm ΔBCD. Chứng minh rằng MG và NP là hai đường thẳng chéo nhau.

Giải



Đặt : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{a} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AD} = \vec{c} \end{cases}$

Khi đó : • $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

• $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{6}(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})$

• $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

• $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{b}$

Giả sử $\overrightarrow{MG}$, $\overrightarrow{PN}$ và $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng, khi đó :

$$\exists \alpha, \beta \in R : \overrightarrow{MN} = \alpha.\overrightarrow{MG} + \beta.\overrightarrow{PN} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{\beta}{2} = 0 \\ \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{\beta}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Hệ này vô nghiệm.}$$

⇒ $\overrightarrow{MG}$, $\overrightarrow{PN}$ và $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

⇒ MG, PN là hai đường thẳng chéo nhau.

Bài 460

Cho tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc và AB = AC = AD = 1. Gọi E, F, G, H, I, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, AC, BD, AD, BC và M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các mặt (ABC), (ACD), (ADB), (BCD).

Chứng minh rằng các đường thẳng EF, GH, IK, AQ, BN, CP, DM đồng quy tại một điểm T.

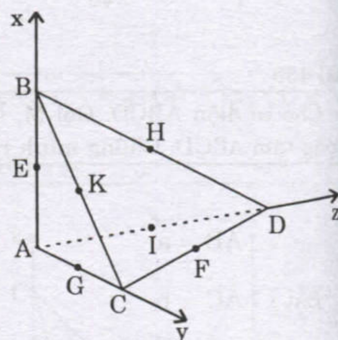
Giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó :

$$E\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right),\ F\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right),\ G\left(0; \frac{1}{2}; 0\right),\ H\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right),\ I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right),\ K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

Do đó : $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{GH} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Suy ra :



- Phương trình của EF là : $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z}{\frac{1}{2}}$

- Phương trình của GH là : $\dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{z}{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow EF \cap GH = \left\{T\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)\right\}$$

- Đường thẳng IK đi qua I và nhận $\overrightarrow{IK} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là :

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow T \in IK$$

- Có $Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AQ là :

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow T \in BN$$

- Phương trình CP là : $\dfrac{x}{\frac{1}{3}} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{\frac{1}{3}} \Rightarrow T \in CP$

- Phương trình DM là : $\dfrac{x}{\frac{1}{3}} = \dfrac{y}{\frac{1}{3}} = \dfrac{z-1}{-1} \Rightarrow T \in DM$

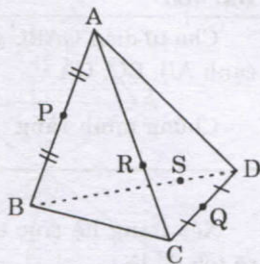
Như vậy : EF, GH, IK, BN, CP, DM đồng quy tại $T\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Bài 461

Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB và CD. Hai điểm R, S lần lượt lấy trên các cạnh AC và BD sao cho $\overrightarrow{AR} = k.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BS} = k.\overrightarrow{BD}$ $(k > 0)$.

Chứng minh rằng : P, Q, R, S nằm trên cùng một mặt phẳng.

Giải



Ta có : $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP})$

$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) - \underbrace{(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP})}_{0}] = \frac{1}{2k}(\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BS})$$

$$= \frac{1}{2k}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PS})$$

$$= \frac{1}{2k}[\underbrace{(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP})}_{0} + (\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS})]$$

$$= \frac{1}{2k}(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2k}\overrightarrow{PR} + \frac{1}{2k}\overrightarrow{PS} \Rightarrow$ P, Q, R, S đồng phẳng $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 462

Cho ABCD là một tứ diện cố định, có mặt cầu ngoại tiếp (O). Xét điểm M thay đổi nằm trong tứ diện ABCD. Các tia AM, BM, CM, DM lần lượt cắt mặt cầu ngoại tiếp (O) tại P, Q, R, S. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Trên các tia PG_1, QG_2, RG_3, SG_4 lần lượt lấy các điểm U, V, Z, T sao cho $2PU = 3PG_1$, $2QV = 3QG_2$, $2RZ = 3RG_3$, $2ST = 3SG_4$. Chứng minh rằng mặt cầu đi qua các điểm U, V, Z, T luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

+ Theo giả thiết, ta có : $2\overrightarrow{PU} = 3\overrightarrow{PG_1} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OU} - 2\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG_1} - 3\overrightarrow{OP}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

+ Gọi I_1 là trung điểm tại AP, ta có : $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OI_1}$ và $\overrightarrow{OI_1} \perp \overrightarrow{MI_1}$.

Đặt $2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ ($\Rightarrow$ H cố định). Khi đó :

$$2\overrightarrow{OU} + 2\overrightarrow{OI_1} = 2\overrightarrow{OH} \Leftrightarrow \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OI_1} = \overrightarrow{OH} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI_1} = \overrightarrow{UH}.$$

+ Gọi N là điểm sao cho $\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{MO}$, ta có :

$$\overrightarrow{MI_1} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OI_1} = \overrightarrow{HN} + \overrightarrow{UH} = \overrightarrow{UN}$$

Từ $\overrightarrow{OI_1} = \overrightarrow{UH}$, $\overrightarrow{MI_1} = \overrightarrow{UN}$ và $\overrightarrow{OI_1} \perp \overrightarrow{MI_1}$, ta có $\overrightarrow{UH} \perp \overrightarrow{UN}$

$\Rightarrow$ U thuộc mặt cầu có đường kính HN.

+ Tương tự, gọi I_2, I_3, I_4 lần lượt là trung điểm các đoạn BQ, CR, DS, ta cũng có :

$$\overrightarrow{OI_2} = \overrightarrow{VH},\ \overrightarrow{OI_3} = \overrightarrow{ZH},\ \overrightarrow{OI_4} = \overrightarrow{TH} \text{ và } \overrightarrow{VH} \perp \overrightarrow{VN},\ \overrightarrow{ZH} \perp \overrightarrow{ZN},\ \overrightarrow{TH} \perp \overrightarrow{TN}$$

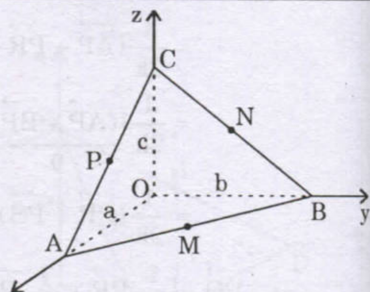
+ Suy ra mặt cầu đi qua các điểm U, V, Z, T có đường kính HN $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 463

Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc đôi một. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA.

Chứng minh rằng : Nếu (OMN) ⊥ (OMP) thì $\frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$.

Giải



Xét trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz sao cho A, B, C có tọa độ là :

A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)

(với a = OA, b = OB, c = OC)

Khi đó : $M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};0\right)$, $N\left(0;\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$, $P\left(\frac{a}{2};0;\frac{c}{2}\right)$

Suy ra :

- Vectơ pháp tuyến của (OMN) là : $\vec{n_1} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} = \left(-\frac{b}{a};1;-\frac{b}{c}\right)$
- Vectơ pháp tuyến của (OMP) là : $\vec{n_2} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OP} = \left(1;-\frac{a}{b};-\frac{a}{c}\right)$

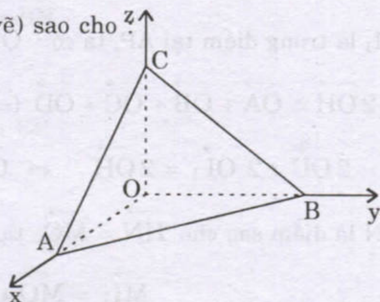
Vì vậy : (OMN) ⊥ (OMP) $\Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{a} - \frac{a}{b} + \frac{ab}{c^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{c^2} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Bài 464

Cho góc tam diện vuông Oxyz. A, B, C lần lượt là các điểm di động trên Ox, Oy, Oz sao cho $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{1009}$. Chứng minh rằng (ABC) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz (như hình vẽ) sao cho A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)

(với OA = a, OB = b, OC = c).

Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Hơn nữa : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2009}$ (do giả thiết)

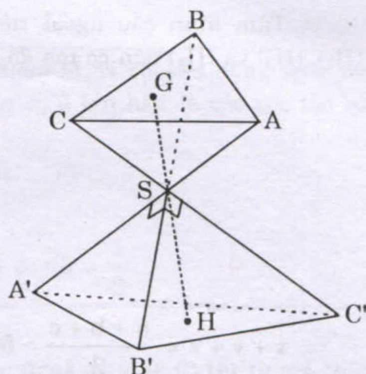
⇒ M(2009; 2009; 2009) ∈ mp (ABC)

⇒ Mp (ABC) luôn luôn đi qua điểm cố định M(2009; 2009; 2009).

Bài 465

Từ một điểm S nằm bên trong một mặt cầu cho trước ta dựng ba đường thẳng x'Sx, y'Sy, z'Sz vuông góc nhau từng đôi một. Đường thẳng x'Sx cắt mặt cầu tại A, A'; đường thẳng y'Sy cắt mặt cầu tại B, B'; đường thẳng z'Sz cắt mặt cầu tại C, C'. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh rằng : SG ⊥ (A'B'C').

Giải



Vì G là trọng tâm ΔABC nên :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \ \overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$$

Hơn nữa :

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB'} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB'} = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA'} = 0 \\ \text{(vì x'Sx, y'Sy, z'Sz vuông góc nhau từng đôi một)} \\ \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SA'} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SB'} \ \text{(tính chất phương tích của đường tròn)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{SG}.\overrightarrow{A'B'} = (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})(\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA'}) = 0 \ \Rightarrow \ SG \perp A'B'$$

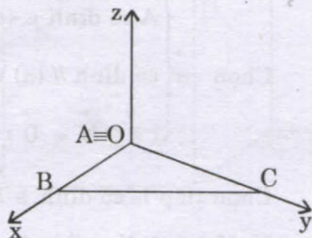
Chứng minh tương tự : SG ⊥ B'C'

Vậy : SG ⊥ (A'B'C').

Bài 466

Cho ΔABC vuông góc ở A. Tìm quỹ tích các điểm M trong không gian thỏa mãn:
$MB^2 + MC^2 \leqslant MA^2$.

Giải



Chọn hệ trục tọa độ Đề các Oxyz sao cho A ≡ O, B(b; 0; 0), C(0; c; 0) (với AB = b > 0, AC = c > 0).

Khi đó M(x; y; z) thỏa :

$$MB^2 + MC^2 \leqslant MA^2$$

$$\Leftrightarrow (x-b)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-c)^2 + z^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow (x-b)^2 + (y-c)^2 + z^2 \leqslant 0 \ \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ y = c \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M(b; c; 0)$$

Vậy quỹ tích chỉ có một điểm duy nhất M(b; c; 0).

Bài 467

Cho góc tam diện vuông Oxyz có A, B, C lần lượt là các điểm di động trên Ox, Oy, Oz sao cho OA + OB + OC = 1000. Tìm quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Giải

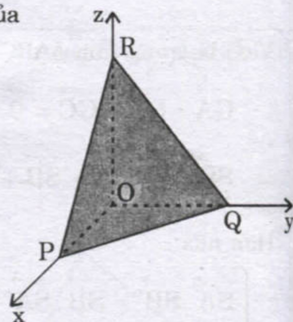
Xét hệ trục tọa độ Đề các Oxyz.

Với A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) (a, b, c ⩾ 0).

Khi đó : a + b + c = 2010 và phương trình các mặt phẳng trung trực (H_1), (H_2), (H_3) của các đoạn thẳng OA, OB, OC theo thứ tự là :

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{c}{2}$$

$\Rightarrow$ Tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là giao điểm của (H_1), (H_2) và (H_3) nên có tọa độ là :



$$I\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{b}{2} \\ z = \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y + z = \frac{a+b+c}{2} = 500 \Leftrightarrow \frac{x}{500} + \frac{y}{500} + \frac{z}{500} = 1$$

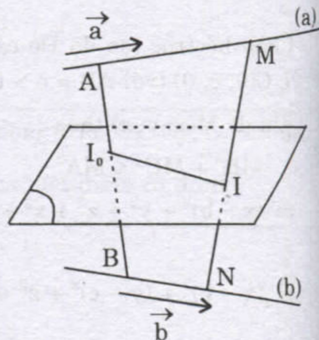
Đây là phương trình mặt phẳng đoạn chắn (P, Q, R) với P(500; 0; 0), Q(0; 500; 0), R(0; 0; 500).

$\Rightarrow$ Quỹ tích I là ΔPQR phần "chấm chấm" nằm trong ΔPQR (kể cả các cạnh tam giác).

Bài 468

Trong không gian cho hai đường thẳng (a) và (b) chéo nhau. M và N là hai điểm lần lượt di động trên (a) và (b). Tìm tập hợp các điểm I sao cho $\overrightarrow{IM} = k.\overrightarrow{IN}$ (k hằng số cho trước, $k \neq 0$, $k \neq 1$).

Giải



Chọn $\vec{a}\begin{cases} \text{A cố định} \in \text{(a), B cố định} \in \text{(b)} \\ \text{cố định // (a) và } \vec{b} \text{ cố định // (b)} \\ (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}) \end{cases}$

Chọn tiếp I_0 cố định $\in$ AB sao cho $\overrightarrow{I_0A} = k.\overrightarrow{I_0B}$

Vì M $\in$ (a), N $\in$ (b) nên luôn $\exists m, n \in R$

$\overrightarrow{AM} = m.\vec{a}$, $\overrightarrow{BN} = n.\vec{b}$

Khi đó mọi điểm I trong không gian, ta có :

$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{II_0} + \overrightarrow{I_0A} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{I_0I} + k.\overrightarrow{I_0B} + m.\vec{a}$$

$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{II_0} + \overrightarrow{I_0B} + \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{I_0I} + \overrightarrow{I_0B} + n.\vec{b}$$

Điểm I thuộc tập hợp cần tìm $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = k.\overrightarrow{IN}$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{I_0I} + k.\overrightarrow{I_0B} + m.\vec{a} = -k.\overrightarrow{I_0I} + k.\overrightarrow{I_0B} + kn.\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow m.\vec{a} - kn.\vec{b} = (1-k).\overrightarrow{I_0I} \Leftrightarrow \overrightarrow{I_0I} = \frac{m}{1-k}.\vec{a} + \frac{kn}{k-1}.\vec{b} \Leftrightarrow I \in mp(\alpha)$$

Với (α) là mặt phẳng đi qua I_0 và nhận $\vec{a}$, $\vec{b}$ làm các vectơ chỉ phương.

Vậy : Tập hợp các điểm I là mặt phẳng (α) (xác định như trên).

Bài 469 (ĐẠI HỌC VINH - 2001)

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Hai điểm M, N chuyển động trên hai đoạn thẳng BD và B'A tương ứng sao cho BM = B'N = t. Gọi α, β lần lượt là các góc tạo bởi đường thẳng MN với các đường thẳng BD và B'A.

a/ Tính MN theo a và t. Tìm t để MN đạt giá trị nhỏ nhất.

b/ Tính α, β khi MN đạt giá trị nhỏ nhất.

c/ Trong trường hợp tổng quát, chứng minh rằng : $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{1}{2}$.

Giải

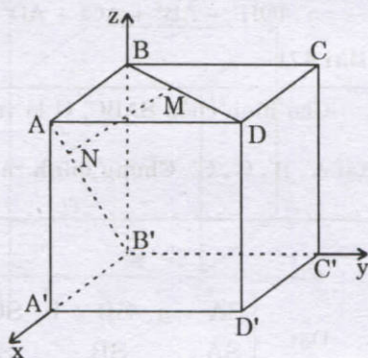
Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho B'(0; 0; 0), B(0; 0; a), A(a; 0; a), A'(a; 0; 0) thì từ giả thiết suy ra :

$$M\left(\frac{t}{\sqrt{2}};\frac{t}{\sqrt{2}};a\right) \text{ và } N\left(\frac{t}{\sqrt{2}};0;\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \quad (0 \leqslant t \leqslant a\sqrt{2})$$

a/ $\overrightarrow{MN} = \left(0;-\frac{t}{\sqrt{2}};\frac{t}{\sqrt{2}}-a\right) \Rightarrow MN^2 = \frac{t^2}{2}+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-a\right)^2 = t^2 - a\sqrt{2}t + a^2$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{t^2 - at\sqrt{2} + a^2} = \sqrt{\left(t-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \min(MN) = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ khi } t = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



b/ Ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{BD} = (a;a;0) = a(1;1;0)\\ \overrightarrow{B'A} = (a;0;a) = a(1;0;1)\end{cases}$

Khi đó : $\begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{MN}|}{BD.MN} = \dfrac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{t^2-a\sqrt{2}t+a^2}.\sqrt{2}}\\ \cos\beta = \dfrac{|\overrightarrow{B'A}.\overrightarrow{MN}|}{BD.MN} = \dfrac{\left|\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-a\right)\right|}{\sqrt{t^2-a\sqrt{2}t+a^2}.\sqrt{2}}\end{cases}$

Khi MN nhỏ nhất thì $t = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases}\cos\alpha = \frac{1}{2}\\ \cos\beta = \frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 60^0.$

c/ Theo câu b, ta có :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{\frac{t^2}{2}+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-a\right)^2}{2\left(t^2-at\sqrt{2}+a^2\right)} = \frac{t^2-at\sqrt{2}+a^2}{2\left(t^2-at\sqrt{2}+a^2\right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

Bài 470 (OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ)

Cho tứ diện trực tâm ABCD. Gọi H và O lần lượt là trực tâm và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng :

$$4OH^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + DB^2 = 16R^2 \text{ (với } R = OA).$$

Giải

Ta có : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OH}$ (Bạn đọc tự chứng minh)

Do đó : $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})^2 = 4OH^2$

$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} +$

$+ 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = 4OH^2$

$\Rightarrow 4R^2 + (2R^2 - AB^2) + (2R^2 - AC^2) + (2R^2 - AD^2) +$

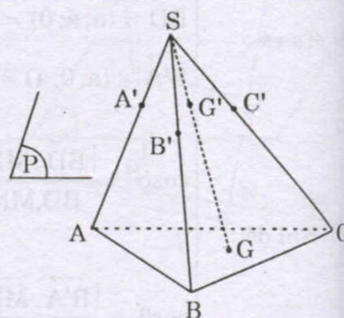
$+ (2R^2 - BC^2) + (2R^2 - BD^2) + (2R^2 - CD^2) = 4OH^2$

$\Rightarrow 4OH^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 16R^2 \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 471

Cho hình chóp SABC, G là trọng tâm ΔABC. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SG thứ tự tại A', B', C', G'. Chứng minh rằng : $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{3SG}{SG'}$.

Giải



Đặt : $\begin{cases} \overrightarrow{SA} = \vec{a},\ \overrightarrow{SB} = \vec{b},\ \overrightarrow{SC} = \vec{c} \\ \dfrac{SA}{SA'} = x,\ \dfrac{SB}{SB'} = y,\ \dfrac{SC}{SC'} = z,\ \dfrac{SG}{SG'} = m \end{cases}$.

Ta cần phải chứng minh : $x + y + z = 3m$

Ta có : $\overrightarrow{SA'} = \dfrac{1}{x}.\vec{a}$, $\overrightarrow{SB'} = \dfrac{1}{y}.\vec{b}$, $\overrightarrow{SC'} = \dfrac{1}{z}.\vec{c}$

$$\overrightarrow{SG'} = \frac{1}{m}.\overrightarrow{SG} = \frac{1}{m}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{3m}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(vì G là trọng tâm ΔABC nên ta có : $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$)

Vì A', B', C', G' đồng phẳng nên $\exists \alpha, \beta, \gamma \in R : \alpha + \beta + \gamma = 1$

và $\overrightarrow{SG'} = \alpha.\overrightarrow{SA'} + \beta.\overrightarrow{SB'} + \gamma.\overrightarrow{SC'}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3m}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{\alpha}{x}.\vec{a} + \frac{\beta}{y}.\vec{b} + \frac{\gamma}{z}.\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{1}{3m} \\ \dfrac{\beta}{y} = \dfrac{1}{3m} \\ \dfrac{\gamma}{z} = \dfrac{1}{3m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{3m} \\ \beta = \dfrac{y}{3m} \\ \gamma = \dfrac{z}{3m} \end{cases}$$

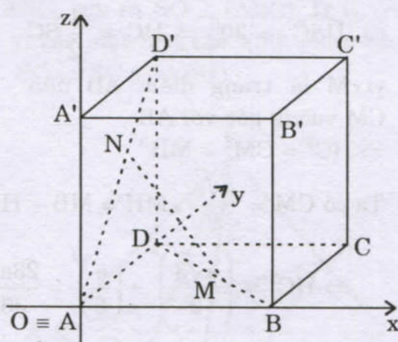
Vì $\alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{3m} + \dfrac{y}{3m} + \dfrac{z}{3m} = 1 \Rightarrow x + y + z = 3m \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 472

> Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a ($a \geqslant 0$). Trên BD và AD' lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $DM = AN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$. Tìm x để MN ngắn nhất.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Axyz lần lượt chứa AB, AD, AA' (chiều dựng các trục như hình vẽ).



Ta có : A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0),

A'(0; 0; a), D'(0; a; a).

Do đó : $M\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}; a - \dfrac{x}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $N\left(0; \dfrac{x}{\sqrt{2}}; \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{x^2}{2} + \left(\sqrt{2}x - a\right)^2 + \frac{x^2}{2}$$

$$= 3x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = f(x)$$

$$f'(x) = 6x - 2\sqrt{2}a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}a}{3}$$

Bảng biến thiên :

x	0		$\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$		$a\sqrt{2}$
f'(x)		−	0	+	
f(x)		↘	$\dfrac{a^2}{3}$	↗	

Vậy : $MN_{min} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ khi $x = \dfrac{\sqrt{2}a}{3}$.

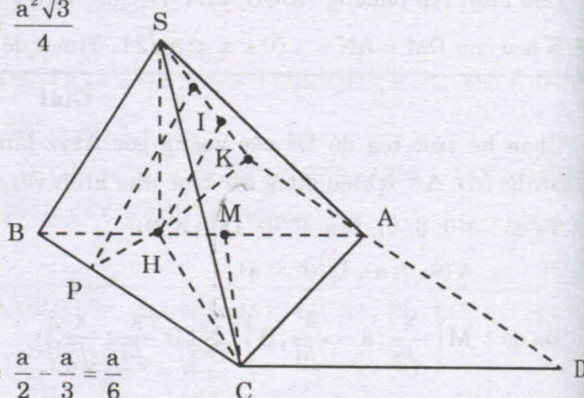
A. ĐỀ THI ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG

Bài 473 (Thi tuyển sinh Đại học khối A – A_1 – 2012)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Giải

- Từ giả thiết ta có thể tích hình chóp S.ABC bằng $V = \frac{1}{3}SH.dt(ABC)$, trong đó diện tích tam giác đều ABC cạnh a bằng: $dt(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



Góc $\widehat{SCH} = 60^0$ là góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) nên tam giác SHC là nửa tam giác đều, có $\widehat{HSC} = 30^0 \Rightarrow HC = \frac{1}{2}SC$

vì M là trung điểm AB nên CM vuông góc với AB $\Rightarrow HC^2 = CM^2 + MH^2$

Ta có $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MH = MB - HB = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$

$$\Rightarrow HC^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{28a^2}{36} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\Rightarrow SC = 2HC = \frac{2a\sqrt{7}}{3}$$

Do đó $SH^2 = SC^2 - HC^2 = \frac{21a^2}{9} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

Vậy $V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{21}}{3} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$.

- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC

Dựng hình thoi CBAD. Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm H trên đường thẳng AD và I là hình chiếu vuông góc của điểm H trên đường thẳng SK.

Ta có SH ⊥ (ABC) ⇒ SH ⊥ AD, mà HK ⊥ AD ⇒ AD ⊥ (SHK) ⇒ (SAK) ⊥ (SHK), hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến SK, mà HI ⊥ SK ⇒ HI ⊥ SA.

Mặt khác AD ⊥ (SHK), BC song song với AD nên BC ⊥ (SHK) ⇒ BC ⊥ HI.

HK kéo dài cắt BC tại P, trong tam giác SPK vẽ PQ song song với HI, Q thuộc cạnh SK thì PQ chính là độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC. Tức là khoảng cách của hai đường thẳng SA và BC.

Xét tam giác KPQ: $\frac{HI}{QP} = \frac{KH}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow QP = \frac{3HI}{2}$

Để tính HI, ta xét tam giác vuông SHK, đường cao HI

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2}$$

Ta có $\frac{HK}{KP} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}KP = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow HK^2 = \frac{a^2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{3}{7a^2} = \frac{24}{7a^2}$$

$$\Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{42}}{12} \Rightarrow QP = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

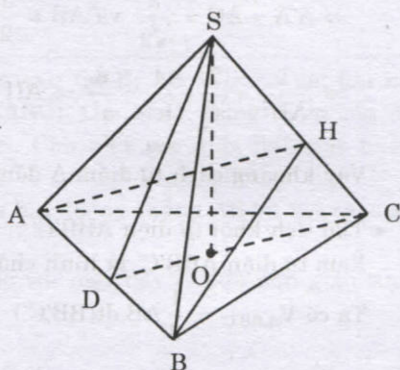
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Bài 474 (Thi tuyển sinh Đại học khối B – 2012)

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2a, AB = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích khối chóp S.ABH theo a.

Giải

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, suy ra SO ⊥ (ABC), D là trung điểm của cạnh AB ⇒ CD ⊥ AB, SD ⊥ AB. Nối BH vì các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau, suy ra AH = BH, BH ⊥ SC ⇒ SC ⊥ (ABH).
- Trong tam giác vuông SDB ta có: $SD^2 = SB^2 - DB^2$



$$SD^2 = (2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{15a^2}{4} \Rightarrow SD = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

Diện tích tam giác SAB bằng:

$$dt(SAB) = \frac{1}{2}SD.AB = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$$

Ta có $dt(SAB) = dt(SAC) = \frac{1}{2}AH.SC$

$$\Rightarrow AH = \frac{a^2\sqrt{15}}{4a} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

Trong tam giác vuông SHA ta có $SH^2 = SA^2 - AH^2$

$$SH^2 = (2a)^2 - \frac{15a^2}{16} = \frac{49a^2}{16} \Rightarrow SH = \frac{7a}{4}$$

Áp dụng công thức $\frac{V_{S.ABH}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SC} = \frac{7a}{8a} = \frac{7}{8} \Rightarrow V_{S.ABH} = \frac{7}{8}V_{S.ABC}$

Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.dt(ABC)$ với $SO^2 = SD^2 - OD^2$

$$SO^2 = \left(\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{15a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{44a^2}{12} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

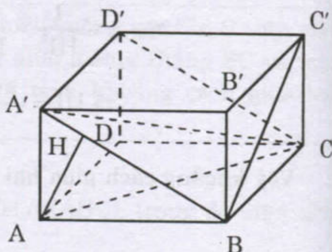
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{33}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABH} = \frac{7}{8}.\frac{a^3\sqrt{11}}{12} = \frac{7a^3\sqrt{11}}{96}.$$

Bài 475 (Thi tuyển sinh Đại học khối D – 2012)

Cho hình hộp đứng ABCD.A′B′C′D′ có đáy là hình vuông, tam giác A′AC vuông cân, A′C = a. Tính thể tích khối tứ diện ABB′C′ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD′) theo a.

Giải



- Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD′)

Ta có A′D′ // BC nên mp(BCD′) cũng chính là mp(A′BCD′)

Vì A′A ⊥ (ABCD) ⇒ BC ⊥ A′A. Vì ABCD là hình vuông nên BC ⊥ AB. Suy ra BC ⊥ (ABB′A′) ⇒ mp(A′BCD′) ⊥ (ABB′A′) và cắt nhau theo giao tuyến A′B.

Trong tam giác vuông A′AB, vẽ đường cao AH thì suy ra AH ⊥ (A′BCD′) ⇒ AH chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD′)

Xét tam giác vuông A′AB, đường cao AH nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2}$

Tam giác A′AC vuông cân tại A ⇒ $A'A = AC = \frac{A'C}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

ABCD là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow A'A = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ và $AB = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{6}}$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến (BCD′) bằng $AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

- Thể tích khối tứ diện ABB′C′

Xem tứ diện ABB′C′ là hình chóp tam giác đỉnh A, đáy BB′C′

Ta có $V_{A.BB'C'} = \frac{1}{3}AB.dt(BB'C')$

Ta có $AB = \frac{a}{2}$, $dt(BB'C') = \frac{1}{2}B'B.BC = \frac{1}{2}.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$

$\Rightarrow V_{A.BB'C'} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

Bài 476 (Thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, A_1, B, D – 2012)

Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, SA = SB = SC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC theo a.

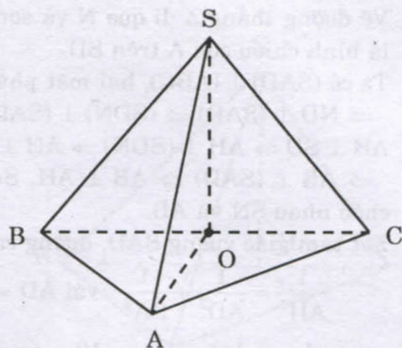
Giải

Gọi O là hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC)

Vì SA = SB = SC OA = OB = OC ⇒ O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, mà tam giác ABC vuông cân tại A ⇒ O là trung điểm của cạnh huyền BC.

Ta có SO ⊥ (ABC) ⇒ $\widehat{SAO} = 60^0$ là góc giữa cạnh bên SA và mặt phẳng (ABC).

• Thể tích hình chóp S.ABC: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.dt(ABC)$



$dt(ABC) = \frac{1}{2}AB.AC = a^2$

Trong tam giác vuông SOA, $SO = AOtan60^0$

Với $AO = \frac{1}{2}BC = A \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

• Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

$\Rightarrow IA = IB = IC \Rightarrow$ I thuộc đường thẳng SO $\Rightarrow$ I nằm trong mặt phẳng (SBC)

Mặt khác $IS = IB = IC \Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Xét tam giác vuông SOA: $SO = SA.\sin 60^0 = \frac{SA\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a\sqrt{3} = \frac{SA\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = 2a$

$\Rightarrow$ tam giác SBC có SA = SB = SC = BC = 2a nên tam giác SBC là tam giác đều cạnh 2a.

Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp.

$$IS = IB = IC = \frac{2a}{2\sin 60^0} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 477 (Thi tuyển sinh Đại học khối A – 2011)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Cho biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0.

Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Giải

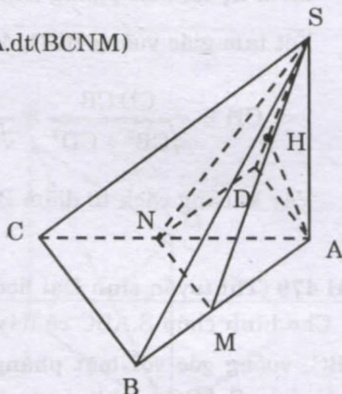
Ta có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC) nên giao tuyến $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp (BCNM)$

Ta có $SA \perp (ABC)$, $CB \perp BA \Rightarrow CB \perp SB$

$\Rightarrow$ góc SBA là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Ta có $\widehat{SBC} = 60^0$

Hình chóp S.BCNM có đường cao SA nên thể tích: $V = \frac{1}{3}SA.dt(BCNM)$



Xét tam giác vuông SAB, $SA = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$

Mặt phẳng đi qua SM và song song với BC nên cắt đáy (ABC) theo giao tuyến MN // BC $\Rightarrow$ N là trung điểm của AC $\Rightarrow MN = \frac{BC}{2} \Rightarrow MN = a$.

Ta có $dt(BCNM) = \frac{(BC + MN)BM}{2} = \frac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}$

• Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN

Vẽ đường thẳng Δ đi qua N và song song với AB, gọi D là hình chiếu của A trên Δ, gọi H là hình chiếu của A trên SD.

Ta có (SAD) ⊥ (ABC), hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến AD, mà ND ⊥ AD

⇒ ND ⊥ (SAD) ⇒ (SDN) ⊥ (SAD), hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến SD mà AH ⊥ SD ⇒ AH ⊥ (SDN) ⇒ AH ⊥ SN. Mặt khác vì AB // ND, mà ND ⊥ (SAD)

⇒ AB ⊥ (SAD) ⇒ AB ⊥ AH. Suy ra AH chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SN và AB.

Xét tam giác vuông SAD, đường cao AH, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} \quad \text{với } AD = MN = a,\ SA = 2a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{12a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Bài 478 (Thi tuyển sinh Đại học khối B – 2011)

Cho hình lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD.

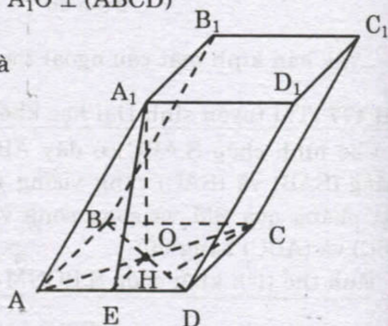
Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Giải

- Gọi O là giao điểm của AC và BD, theo giả thiết ta có $A_1O \perp (ABCD)$

  Gọi E là trung điểm AD ⇒ OE ⊥ AD và $A_1E \perp AD$

  ⇒ góc A_1EO là góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD), do đó $\widehat{A_1EO} = 60^0$.



  Gọi V là thể tích khối lăng trụ đã cho, ta có

  $V = A_1O.dt(ABCD)$

  Ta có $dt(ABCD) = AB.AD = a^2\sqrt{3}$

  Xét tam giác vuông A_1OE:

  $$A_1O = OE.\tan 60^0 = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{3a^3}{2}$$

- Tứ giác A_1B_1CD là hình bình hành ⇒ $B_1C // A_1D$ ⇒ $B_1C // (A_1BD)$ ⇒ khoảng cách từ điểm B_1 tới mặt phẳng (A_1BD) bằng khoảng cách từ điểm C tới mặt phẳng (A_1BD)

  Ta có $A_1O \perp (ABCD) \Rightarrow (A_1BD) \perp (ABCD)$, hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến BD, do đó nếu vẽ CH ⊥ BD thì $CH \perp (A_1BD)$ do đó độ dài CH chính bằng khoảng cách từ điểm B_1 tới mặt phẳng (A_1BD).

  Xét tam giác vuông BCD, đường cao CH: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2}$

  $$\Rightarrow CH = \frac{CD.CB}{\sqrt{CB^2 + CD^2}} = \frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

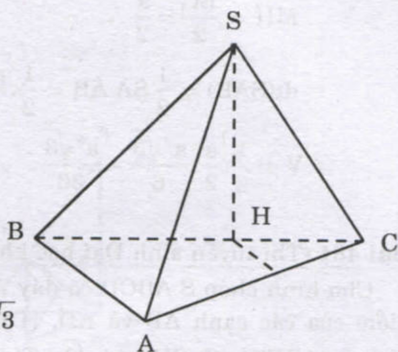
  Vậy khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 479 (Thi tuyển sinh Đại học khối D – 2011)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = 3a, BC = 4a. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Cho biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 60^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Giải

Gọi H là hình chiếu của S trên BC. Bởi vì (SBC) ⊥ (ABC), hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến BC, nên SH ⊥ (ABC)



Gọi V là thể tích khối chóp S.ABC, ta có

$$V = \frac{1}{3}SH.dt(ABC)$$

$$dt(ABC) = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{2}.3a.4a = 6a^2$$

xét tam giác vuông SHB: $SH = SB.\sin 30^0 = 2a\sqrt{3}.\frac{1}{2} = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.6a^2 = 2a^3\sqrt{3}$$

Gọi d là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC)

Ta có thể tích V của hình chóp S.ABC có thể được tính bằng

$$V = \frac{1}{3}d.dt(SAC) \Rightarrow d = \frac{3V}{dt(SAC)}$$

Để tính diện tích tam giác SAC ta tính các cạnh của nó

Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2 \Rightarrow AC = 5a$

Ta có SH ⊥ (ABC), AB ⊥ BC ⇒ AB ⊥ SB

Xét tam giác vuông SAB: $SA^2 = SB^2 + AB^2 = 21a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{21}$

Xét tam giác vuông SHC: $SC^2 = SH^2 + HC^2$, $SH = a\sqrt{3}$

$$BH^2 = SB^2 - SH^2 = 9a^2 \Rightarrow BH = 3a \Rightarrow HC = a$$

$$\Rightarrow SC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow SC = 2a$$

Ta có: $AC = 5a$, $SC = 2a$, $SA = a\sqrt{21} \Rightarrow AC^2 = SA^2 + SC^2$

⇒ tam giác SAC vuông tại S ⇒ $dt(SAC) = \frac{1}{2}SA.SC = a^2\sqrt{21}$

⇒ khoảng cách $d = \frac{6a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{21}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$

Bài 480 (Thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – B – D năm 2011)

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Góc giữa hai mặt phẳn (SBC) và (ABC) bằng 30^0. Gọi M là trung điểm của SC. Tính thể tích khối chóp S.ABM theo a.

Giải

Ta có SA ⊥ (ABC), BC ⊥ AB ⇒ BC ⊥ SB

Do đó góc SBA là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC)

Ta có $\widehat{SBA} = 30^0$. Xét tam giác vuông SAB, $SA = AB.\tan 30^0$

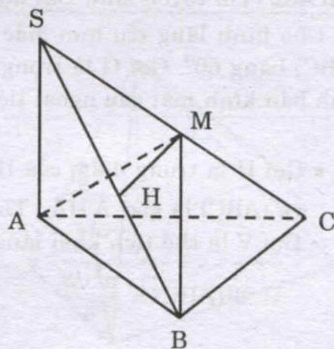
$$\Rightarrow SA = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có BC ⊥ SA, BC ⊥ BA ⇒ BC ⊥ (SAB).

Gọi H là trung điểm của SB ⇒ MH // BC ⇒ MH ⊥ (SAB)

⇒ nếu gọi thể tích khối chóp S.ABM là V thì

$$V = \frac{1}{3}MH.dt(SAB)$$



$MH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$

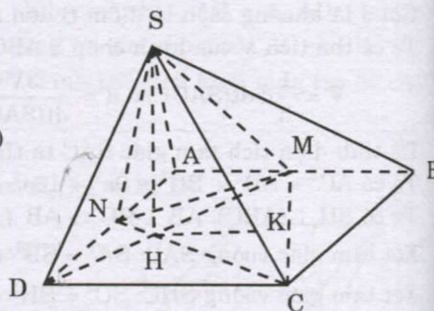
$dt(SAB) = \dfrac{1}{2}SA.AB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Bài 481 (Thi tuyển sinh Đại học khối A – 2010)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD, H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Giải



- Gọi V là thể tích khối chóp S.CDNM, ta có

$V = \dfrac{1}{3}SH.dt(CDNM)$

$dt(CDNM) = dt(ABCD) - dt(MAN) - dt(BMC)$

$= a^2 - \dfrac{1}{2}AM.AN - \dfrac{1}{2}MB.BC$

$= a^2 - \dfrac{a^2}{8} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{8}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{5a^2}{8} = \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{24}$

- Ta có các tam giác MAN và NDC bằng nhau theo trường hợp c.g.c

$\Rightarrow DM \perp CN$, mà $DM \perp SH \Rightarrow DM \perp (SCN)$

- Trong tam giác SHC, vẽ đường cao HK, ta có $DM \perp HK$

Do đó HK chính là đường vuông góc chung của hai đường thẳng DM và SC.

Xét tam giác vuông SHC, ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{HS^2} \Rightarrow HK = \dfrac{HC.HS}{\sqrt{HC^2 + HS^2}}$

- Xét tam giác vuông CDN, đường cao DH, ta có $CD^2 = CH.CN$

$CN^2 = CD^2 + DN^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow CN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $CH = a^2 : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Bài 482 (Thi tuyển sinh Đại học khối B – 2010)

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A′B′C′ có AB = a góc giữa hai mặt phẳng (A′BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm của tam giác A′BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Giải

- Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow AH \perp BC$ và $A'H \perp BC \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (A′BC) và (ABC) là góc $\widehat{A'HA}$. Theo giả thiết $\widehat{A'HA} = 60^0$.

Gọi V là thể tích khối lăng trụ ABC.A′B′C′ ta có V = A′A.dt(ABC)

$dt(ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Xét tam giác vuông A'AH, $A'A = AH.\tan 60^0$

Với $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'A = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2} \Rightarrow V = \frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

- Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, ta có IA = IB = IC và I cũng là trọng tâm của tam giác ABC ⇒ I thuộc trung tuyến AH.

Xét tam giác A'AH, ta có $\frac{HI}{HA} = \frac{1}{3} = \frac{HG}{HA'} \Rightarrow GI \,//\, A'A$

Mà $A'A \perp (ABC) \Rightarrow GI \perp (ABC) \Rightarrow GA = GB = GC$

Trong mặt phẳng (A'AH) vẽ trung trực của đoạn thẳng AG, trung trực này cắt đường thẳng GI tại O ⇒ OG = OA, OA = OB = OC

Do đó OA = OB = OC = OG, vậy O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC. Gọi M là trung điểm GA, tứ giác AMIO nội tiếp do đó $GM.GA = GI.GO \Rightarrow GO = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI}$

$$GO = \frac{GI^2 + IA^2}{2GI} \quad \text{với } GI = \frac{a}{2},\ IA = \frac{2}{3}HA \Rightarrow IA = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó $GO = \frac{7a}{12}$

Kết luận: bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC bằng $\frac{7a}{12}$.

Bài 483 (Thi tuyển sinh Đại học khối D – 2010)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA = a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc cạnh AC. Cho $AH = \frac{AC}{4}$.

Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Giải

Hình vuông ABCD cạnh là a, do đó đường chéo $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Xét tam giác vuông SHA: $SH^2 = SA^2 - AH^2$

$\Rightarrow SH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{7a^2}{8} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

Xét tam giác vuông SHC:

$$SC^2 = SH^2 + HC^2 = \frac{14a^2}{16} + \frac{18a^2}{16} = \frac{32a^2}{16} \Rightarrow SC = a\sqrt{2}$$

Xét tam giác SAC có SC = AC = a $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ tam giác SAC cân tại C.
Đường cao CM cũng là trung tuyến, nên M là trung điểm của SA
Ta có thể tích của tứ diện SMBC được tính

$$V_{SMBC} = V_{SABC} - V_{MABC}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.dt(ABC) = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{14}}{4}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24}$$

Trong tam giác SHA, vẽ MK song song với SH $\Rightarrow MK = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{14}}{8}$

Bởi vì SH $\perp$ (ABC) $\Rightarrow$ MK $\perp$ (ABC), do đó

$$V_{M.ABC} = \frac{1}{3}MK.dt(ABC) = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{14}}{8}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$$

Do đó $V_{SMBC} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24} - \frac{a^3\sqrt{14}}{48} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

Bài 484 (Thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – B – D năm 2010)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Cho biết SA = SB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45^0.

Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Giải

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow$ SH $\perp$ AB, mà (SAB) $\perp$ (ABCD)
$\Rightarrow$ SH $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow$ góc SCH là góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy (ABCD)

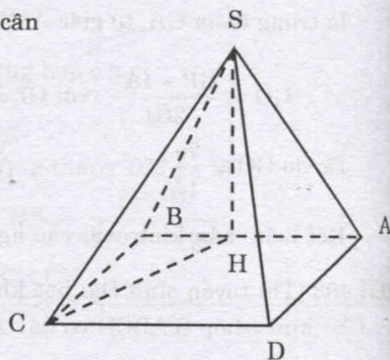
Theo giả thiết $\widehat{SCH} = 45^0$, do đó tam giác SHC vuông cân

$\Rightarrow$ SH = CH

Ta có trong tam giác vuông CBH,

$$CH^2 = CB^2 + BH^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$



Gọi V là thể tích khối tứ diện S.ABCD ta có

$$V = \frac{1}{3}SH.dt(ABCD) = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}.$$

Bài 485 (Thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)

Cho lăng trụ ABC.A′B′C′ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A có AB = a, AC = a $\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A′ trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A′.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA′ và B′C′.

Giải

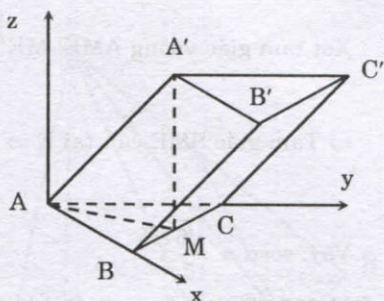
- Gọi M là trung điểm của cạnh BC, theo giả thiết A′M $\perp$ (ABC)

  Thể tích V của khối chóp A′.ABC: $V = \frac{1}{3}A'M.dt(ABC)$

  Xét tam giác vuông A′MA: $A'M^2 = A'A^2 - AM^2 \Rightarrow A'M = a\sqrt{3}$

  Tam giác ABC vuông tại A: $dt(ABC) = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{2}$



- Để tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA′ và B′C′, ta xét hệ toạ độ như hình vẽ. Khi đó A(0; 0; 0); B(a; 0; 0); C(0; $a\sqrt{3}$; 0); $M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$; $A'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$

  Đường thẳng A′A có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \left(1;\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$

  Đường thẳng B′C′ song song với BC có vectơ chỉ phương $\vec{b} = \left(-1;\sqrt{3};0\right)$

  Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AA′ và B′C′ ta có: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{1}{4}$.

Bài 486 (Thi tuyển sinh Đại học khối B – 2008)

Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông có cạnh bằng 2a. Các cạnh bên SA = a, SB = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) thuộc cạnh AB.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC
Tính thể tích khối chóp S.BMDN theo a và cosin của góc giữa hai đường thẳng SM và DN.

Giải

- Gọi H là hình chiếu của điểm S trên cạnh AB, suy ra SH ⊥ (ABCD)

  Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN vẽ từ đỉnh S xuống mặt phẳng đáy (BMDN)

  Thể tích của khối chóp S.BMDN được tính: $V = \dfrac{1}{3}$SH.dt(BMDN)

  Xét tam giác ASB có: AB = 2a; SB = $a\sqrt{3}$; SA = a do đó $AB^2 = SB^2 + SA^2 \Rightarrow$ tam giác ASB vuông tại S, có trung tuyến $SM = \dfrac{AB}{2} = a \Rightarrow AS = SM = MA = a$, do đó tam giác ASM là tam giác đều $\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

  Mặt khác, vì M là trung điểm của cạnh AB, N là trung điểm của cạnh BC nên dt(BMDN) $= \dfrac{1}{2}$.dt(ABCD) = $2a^2$

  Vậy $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

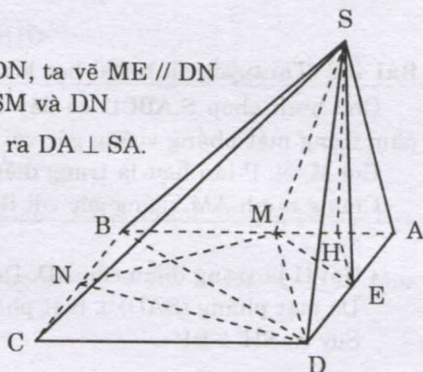
- Để tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM và DN, ta vẽ ME // DN E thuộc cạnh AD. Gọi α là góc giữa 2 đường thẳng SM và DN

  Ta có $\alpha = \widehat{SME}$. Ta có SH ⊥ (ABCD), DA ⊥ AB, suy ra DA ⊥ SA.

  Xét tam giác vuông SAE:

  $$SE^2 = SA^2 + AE^2,\ AE = \dfrac{CN}{2} = \dfrac{a}{2}$$

  $$\Rightarrow SE^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow SE = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$$



Xét tam giác vuông AME: $ME^2 = AM^2 + AE^2 = \dfrac{5a^2}{2} \Rightarrow ME = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

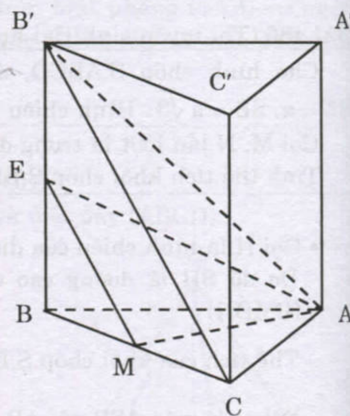
$\Rightarrow$ Tam giác SME cân tại E $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Vậy: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài 487 (Thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)

Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy ABC là tam giác có AB = BC = a, AC = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A′B′C′ và khoảng cách giữa hai đường thẳng B′C và AM.

Giải



- Xét tam giác ABC có: $AC^2 = 2a^2 = AB^2 + BC^2$ suy ra ta giác ABC vuông tại B

  $\Rightarrow dt(ABC) = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{a^2}{2}$

  Thể tích khối lăng trụ ABC.A′B′C′ bằng

  $V = AA'.dt(ABC) = a\sqrt{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

- Gọi E là trung điểm của BB′ suy ra $BE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

  Ta có EM là đường trung bình của tam giác B′BC, do đó EM // B′C

  Suy ra B′C song song với mặt phẳng (AME), do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B′C bằng khoảng cách giữa B′C và mặt phẳng (AME). Bởi vì M là trung điểm của BC nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME) bằng khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AME). Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME), bởi vì tứ diện BAME có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên:

  $$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

  Vậy: khoảng cách giữa hai đường thẳng B′C và AM bằng $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Bài 488 (Thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD.

Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Giải

- Gọi H là trung điểm của AD. Do tam giác SAD đều nên SH $\perp$ AD

  Do mặt phẳng (SAD) $\perp$ mặt phẳng (ABCD) nên SH $\perp$ (ABCD)

  Suy ra SH $\perp$ BP (1)

Xét hình vuông ABCD ta có các tam giác vuông CDH và BCP bằng nhau nên suy ra CH ⊥ BP (2)

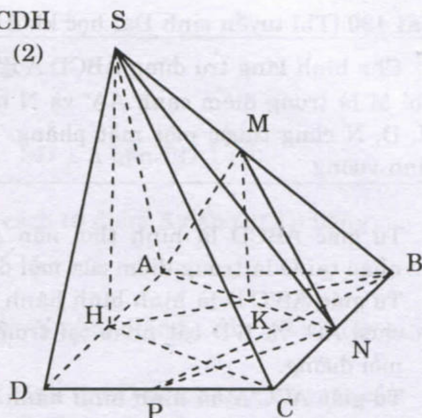
Từ (1) và (2) suy ra BP ⊥ (SHC)

Ta có MN // SC và AN // CH nên (AMN) // (SHC)

Suy ra BP ⊥ (AMN), do đó BP ⊥ AM

Vẽ MK ⊥ (ABC) với K thuộc (ABCD)

Thể tích khối tứ diện CMNP được xem như thể tích hình chóp M.CPN bằng



$$V = \frac{1}{3}MK.dt(CPN)$$

Điểm M là trung điểm của AB nên

$$MK = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$dt(CPN) = \frac{1}{2}CN.CP = \frac{a^2}{8}$$

Vậy thể tích $V = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2}{8} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

Bài 489 (Thi tuyển sinh Đại học khối A – 2003)

Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh là a. Tính số đo của góc phẳng nhị diện [B, A′C, D]

Giải

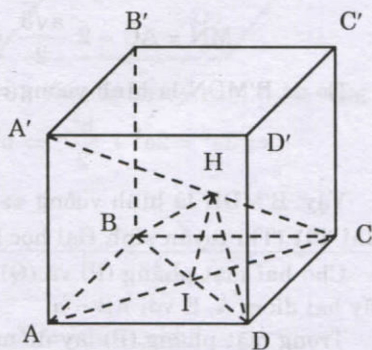
Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên A′C, ta có BH ⊥ A′C.

Mà BD ⊥ (A′AC) ⇒ BD ⊥ A′C, do đó A′C ⊥ (BHD) ⇒ A′C ⊥ DH.

Ta có BH ⊥ A′C, DH ⊥ A′C

⇒ góc phẳng nhị diện [B, A′C, D] là góc $\widehat{BHD}$

Xét tam giác vuông A′DC vuông tại D, ta có DH là đường cao nên



$$DH.A'C = CD.A'D \Rightarrow DH = \frac{CD.A'D}{A'C} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Tương tự, xét tam giác vuông A′BC, vuông tại B

ta có BH là đường cao, và tính được $BH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác BHD: $BD^2 = BH^2 + BD^2 - 2BH.BD.\cos\widehat{BHD}$

$\Rightarrow \cos\widehat{BHD} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^0$.

Cách 2: Ta có BD ⊥ (A′AC) ⇒ BD ⊥ A′C

Chứng minh tương tự, ta có BC′ ⊥ A′C. Suy ra A′C ⊥ (BC′D)

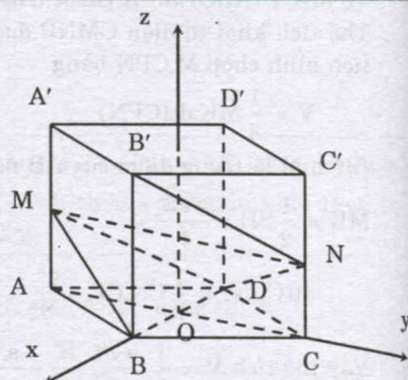
Gọi H là giao điểm của A′C và mặt phẳng (BC′D) thì góc $\widehat{BHD}$ chính là góc phẳng của nhị diện [B, A′C, D]

Các tam giác vuông HA′B, HA′D, HA′C′ bằng nhau suy ra HB = HC′ = HD ⇒ H là tâm của tam giác đều BC′D. Do đó $\widehat{BHD} = 120^0$.

Bài 490 (Thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)

Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'BDN là hình vuông.

Giải



Tứ giác ABCD là hình thoi nên AC và BD cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường.

Tứ giác AB'C'D là hình bình hành nên 2 đường chéo AC' và B'D cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

Tứ giác ACC'A' là hình bình hành nên 2 đường chéo AC' và A'C cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường mà I là trung điểm của AC'.

Nên AC' và A'C cắt nhau tại I, mà MN là đường trung bình của ACC'A' nên MN đi qua I.

Tứ giác B'MDN có 2 đường chéo B'D và MN cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường nên B'MDN là hình bình hành, có nghĩa bốn điểm B', M, D, N đồng phẳng.

Xét tam giác vuông A'MB' có $B'M^2 = A'N'^2 + A'M^2$

Xét tam giác vuông B'C'N có $B'N^2 = B'C'^2 + C'N^2$

Mà A'B' = B'C' và A'M = C'N suy ra B'M = B'N, do đó tứ giác B'MDN là hình thoi

Đặt AA' = b, ta có $B'N^2 = B'M^2 = a^2 + \dfrac{b^2}{4}$

$$MN = AC = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Do đó B'MDN là hình vuông $\Leftrightarrow MN^2 = B'M^2 + B'N^2$

$$\Leftrightarrow 3a^2 = 2a^2 + \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b = a\sqrt{2}$$

Vậy: B'MDN là hình vuông $\Leftrightarrow AA' = a\sqrt{2}$.

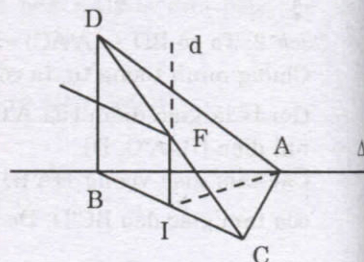
Bài 491 (Thi tuyển sinh Đại học khối D – 2003)

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với AB = a.

Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC và BD cùng vuông góc với Δ và AC = BD = AB.

Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

Giải



Gọi I là trung điểm BC, gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (ABC). Bởi vì tam giác ABC vuông cân tại A nên d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi F là giao điểm của d và CD thì F là trung điểm của CD, mà tam giác BCD vuông tại B suy ra FB = FC = FD = FA tức là F là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD ta có

$$R = FD = \frac{CD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (vì } BD = a, BC = a\sqrt{2}\text{)}$$

- Tính khoảng cách từ điểm A đến (BCD)

  Bởi vì (P) ⊥ (Q), (P) giao (Q) theo giao tuyến Δ mà BD ⊥ Δ nên BD ⊥ (P).

  Mà AI thuộc mặt phẳng (P) ⇒ BD ⊥ AI

  Lại có AI ⊥ BC suy ra AI ⊥ (BCD), do đó khoảng cách từ điểm A đến (BCD) bằng

$$AI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Cách 2: Bởi vì (P) ⊥ (Q), BD và AC cùng vuông góc với giao điểm Δ của (P) và (Q) suy ra BD ⊥ (P), AC ⊥ (Q) do đó BD ⊥ BC và AC ⊥ AD.

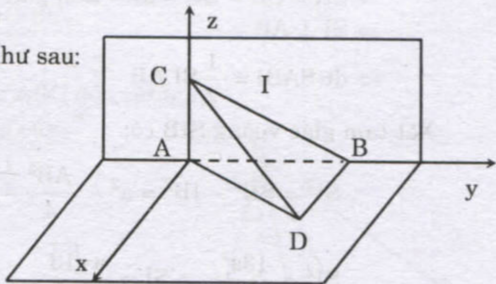
Do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có đường kính là CD nên bán kính mặt cầu

$$R = \frac{CD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích tứ diện ABCD: $V = \frac{1}{3}BD.dt(ABC) = \frac{1}{3}h.dt(BCD)$ với h là khoảng cách từ điểm A đến (BCD)

$$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Cách 3: Có thể giải bằng phương pháp toạ độ như sau:



Chọn hệ trục toạ độ Axyz sao cho A(0; 0; 0); B(0; a; 0); D(a; a; 0) và C(0; 0; a). Giả sử điểm I(x; y; z)

Vì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD nên

$$IA = IB = IC = ID = R \Leftrightarrow x = y = z = \frac{a}{2}$$

Suy ra $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) là $\vec{n} = (0; a^2; a^2) = a^2(0; 1; 1)$

Do đó phương trình mặt phẳng (BCD) là: $y + z - a = 0$

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

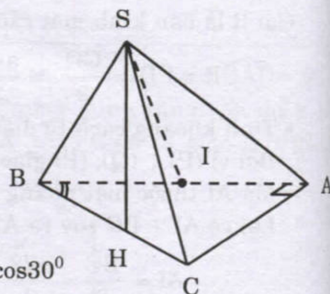
Bài 492 (Thi tuyển sinh Đại học khối A – A_1 năm 2013)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, góc $\widehat{ABC} = 30^0$. Mặt bên (SBC) là tam giác đều cạnh a và mặt bên (SCB) vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB)

Giải

- Gọi H trung điểm của BC, vì tam giác SBC đều nên SH ⊥ BC, mà (SBC) ⊥ (ABC) suy ra SH ⊥ (ABC)

Ta có thể tích khối chóp S.ABC: $V = \frac{1}{3}dt(ABC).SH$



Ta giác vuông ABC vuông tại A nên

$$dt(ABC) = \frac{1}{2}AB.AC$$

Ta có tam giác SBC đều cạnh a, nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác ABC vuông tại A, có góc $B = 30^0$, do đó $AB = BC\cos 30^0$

$$\Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ AC = BC\sin 30^0 = \frac{a}{2}$$

Do đó $V = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{16}$

- Để tính khoảng cách từ điểm C đến (SAB) ta gọi h là khoảng cách cần tính. Khi đó thể tích khối chóp S.ABC được tính:

$$V = \frac{1}{3}dt(SAB).h \Rightarrow h = \frac{3V}{dt(SAB)}$$

Tam giác ABC vuông tại A nên trung tuyến HA = HB = HC mà $SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow SA = SB = SC = a \Rightarrow$ tam giác SAB cân tại S. Gọi I là trung điểm của AB

$\Rightarrow SI \perp AB$

$$\Rightarrow dt(SAB) = \frac{1}{2}SI.AB$$

Xét tam giác vuông SIB có:

$$SI^2 = SB^2 - IB^2 = a^2 - \frac{AB^2}{4} = a^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$SI^2 = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

Vậy $dt(SAB) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$

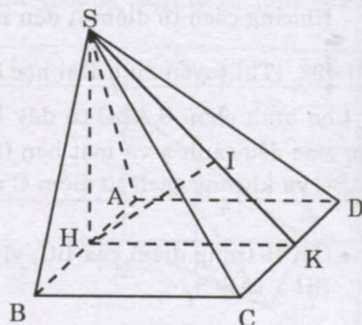
Do đó $h = \frac{3a^3}{16} : \frac{a^2\sqrt{39}}{16} = \frac{3a}{\sqrt{39}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Bài 493 (Thi tuyển sinh Đại học khối B – 2013)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a, thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD)

Giải

Gọi H là trung điểm của AB vì (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SH \perp (ABCD)$ (vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$)



Thể tích khối chóp S.ABCD bằng

$$V = \frac{1}{3}SH.dt(ABCD)$$

Tam giác SAB đều có cạnh là a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

ABCD là hình vuông cạnh a nên $dt(ABCD) = a^2$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Ta có AB // CD nên AB // (SCD)

Điểm H là trung điểm AB nên khoảng cách từ điểm A đến (SCD) bằng khoảng cách từ điểm H đến (SCD)

Gọi K là trung điểm của CD, ta có HK ⊥ CD mà CD ⊥ SH suy ra CD ⊥ (SHK). Trong tam giác SHK, vẽ HI ⊥ SK

Ta có (SHK) ⊥ (SCD) cắt nhau theo giao tuyến SK và HI ⊥ SK ⇒ HI ⊥ (SCD)

Do đó HI là khoảng cách từ điểm H đến (SCD) và cũng là khoảng cách từ điểm A đến (SCD)

Xét tam giác vuông SHK, HI ⊥ SK nên

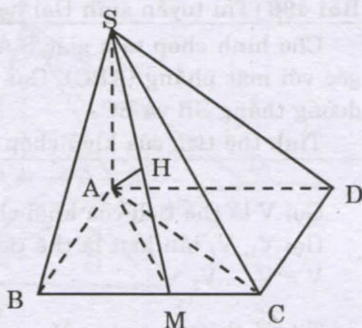
$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{HS.HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}}$$

Với $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, HK – a ⇒ $HI = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 494 (Thi tuyển sinh Đại học khối D – 2013)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{BAD} = 120^0$, M là trung điểm cạnh BC và góc $\widehat{SMA} = 45^0$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Giải



- Vì $\widehat{BAD} = 120^0$ nên $\widehat{ABC} = 60^0$ do đó tam giác ABC đều cạnh a.

  Do M là trung điểm BC nên AM là đường cao của tam giác đều

  $$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

  Suy ra dt(ABCD) = AM.BC = $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

  Tam giác SAM vuông tại A, có $\widehat{SMA} = 45^0$

  ⇒ tam giác SAM vuông cân tại A nên

  $$SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

  Thể tích khối chóp S.ABCD bằng $V = \frac{1}{3}AM.dt(ABCD) = \frac{a^3}{4}$

- Để tính khoảng cách từ điểm D đến (SBC) ta nhận thấy AD // BC nên AD song song với (SBC) do đó khoảng cách từ điểm D tới (SBC) bằng khoảng cách từ điểm A đến (SBC)

  Ta có SA ⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ BC. Theo trên AM ⊥ BC nên BC ⊥ (SAM)

  ⇒ (SAM) ⊥ (SBC).

  Hai mặt phẳng (SAM) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến SM.

  Trong tam giác vuông SAM, vẽ AM vuông góc với SM thì AH vuông góc với (SBC)

  ⇒ AH chính là khoảng cách từ điểm A đến (SBC).

  Xét tam giác vuông cân SAM, $AH = \frac{AM\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

  Vậy khoảng cách từ điểm D đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Bài 495 (Thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – A_1 – B – D năm 2013)

Cho lăng trụ đều ABC.A′B′C′ có AB = a và đường thẳng A′B tạo với đáy một góc bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và B′C′. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A′B′C′ và độ dài đoạn thẳng MN.

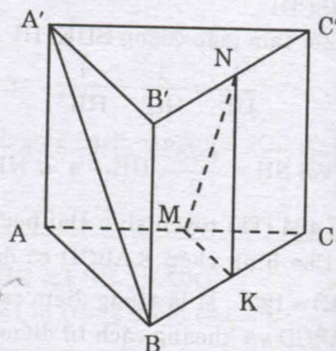
Giải

- Vì lăng trụ ABC.A′B′C′ là lăng trụ đều nên A′A ⊥ (ABC) ⇒ góc $\widehat{A'BA}$ là góc giữa A′B với đáy, vậy $\widehat{A'BA} = 60^0$.

Xét tam giác vuông A′AB: $A'A = AB.\tan\widehat{A'BA} = a\sqrt{3}$

Do đó thể tích V của khối lăng trụ ABC.A′B′C′ bằng

$V = A'A.dt(ABC) = a\sqrt{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4}$



- Xét trong mặt bên là hình chữ nhật BCC′B′ vẽ NK ⊥ BC thì K là trung điểm của BC, mà M là trung điểm của AC,

do đó $MK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

Ta có B′B ⊥ (ABC), NK song song với B′B suy ra NK ⊥ (ABC) suy ra NK ⊥ KM

Xét tam giác vuông NKM tại K ta có $MN^2 = NK^2 + KM^2$

Do đó $MN^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Bài 496 (Thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2006)

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các đường thẳng SB và SC.

Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

Giải

Gọi V là thể tích của khối chóp A.BCNM

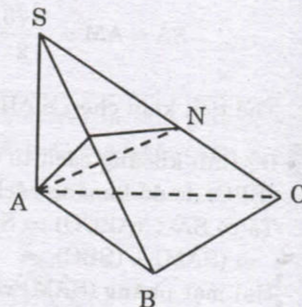
Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối chóp S.ABC và S.AMN, ta có:

$V = V_1 - V_2$

Từ giả thiết ta suy ra $V_1 = \dfrac{1}{3}.2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Để tính V_2 ta dùng tính chất đã biết:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}$$



Xét tam giác vuông SAB tại A, đường cao AM nên

$SA^2 = SM.SB$

$$\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}$$

Xét tam giác vuông SAC tại A, đường cao AN nên $SA^2 = SN.SC$

$$\Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}$$

Suy ra: $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow V_2 = \dfrac{16}{25}V_1 = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{75}$

Do đó $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} - \frac{8a^3\sqrt{3}}{75} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$

Kết luận: Thể tích khối chóp A.BCNM bằng $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

Bài 497 (Thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2006)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC. Gọi I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBM). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Giải

Vì ABCD là hình chữ nhật, nên hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường.

Xét tam giác ABD có AO và BM là hai trung tuyến cắt nhau tại I, suy ra I là trọng tâm của tam giác ABD. Do đó $BI = \frac{2}{3}BM$.

Xét tam giác vuông ABM: $BM^2 = AB^2 + AM^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Ta có $AI = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC$

với $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 2a^2$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{3} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác ABI có AB = a, $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$BI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ thoả mãn:

$AI^2 + BI^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{6a^2}{9} = a^2 = AB^2$ suy ra

Tam giác AIB vuông tại I, tức là $BI \perp AI$

Mặt khác $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BI$

Suy ra $BI \perp (SAC)$ tức là $BM \perp (SAC)$

Do đó $(SBM) \perp (SAC)$

Để tính thể tích khối tứ diện ANIB ta kí hiệu

V là thể tích khối chóp S.ABC; V_1 là thể tích khối tứ diện SABN; V_2 là thể tích khối tứ diện CNBI; V_3 là thể tích khối tứ diện ANIB.

Ta có: $V_3 = V - (V_1 + V_2)$

Áp dụng tính chất đã biết: $\frac{V_1}{V} = \frac{SN}{SC}.\frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB} = \frac{1}{2}$

$\frac{V_2}{V} = \frac{CN}{CS}.\frac{CB}{CB}.\frac{CI}{CA} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Suy ra $V_1 = \frac{1}{2}V$; $V_3 = \frac{1}{3}V$

Do đó $V_3 = V - \left(\frac{1}{2}V + \frac{1}{3}V\right) = \frac{1}{6}V$

Mà $V = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{6}a.a\sqrt{2}.a = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow V_3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Kết luận: Thể tích khối tứ diện ANIB bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Cách khác: Có thể giải bài toán bằng phương pháp toạ độ như sau:

Chọn hệ trục toạ độ Axyz như hình vẽ.

Ta có A(0; 0; 0); B(a; 0; 0), C(a, $a\sqrt{2}$; 0); D(0; $a\sqrt{2}$; 0); S(0; 0; a); $M\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right)$; $N\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right)$

- Vì điểm I là trọng tâm của tam giác ABD, suy ra $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IA}$ từ đó tính được $I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right)$.
- Ta có $\overrightarrow{AS} = (0; 0; a)$, $\overrightarrow{AC} = (a; a\sqrt{2}; 0)$ suy ra vectơ pháp tuyến của (SAC) bằng $\vec{n}_1 = \left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right] = \left(-a^2\sqrt{2}, a^2, 0\right)$.
- Ta có $\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a)$, $\overrightarrow{SM} = \left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};-a\right)$ suy ra vectơ pháp tuyến của (SMB) bằng $\vec{n}_2 = \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SM}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}, a^2, \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

Xét $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = -a^4 + a^4 = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow (SAC) \perp (SMB)$

- Ta có $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right)$; $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{6};\frac{a^2}{6};0\right)$

mà $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AB} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

$\Rightarrow$ Thể tích khối tứ diện ANIB bằng $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

Bài 498 (Thi Cao đẳng kinh tế đối ngoại khối A năm 2005)

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Qua cạnh AB dựng mặt phẳng tạo với góc φ và vuông góc với cạnh SC tại M. Cho biết thể tích phần hình chóp nằm giữa đáy của hình chóp S.ABC và mặt phẳng (ABM) bằng V. Tính a và chiều cao của hình chóp S.ABC theo V và φ.

Giải

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) ta có H là tâm của tam giác đều ABC. Do đó CH ⊥ AB và NA = NB

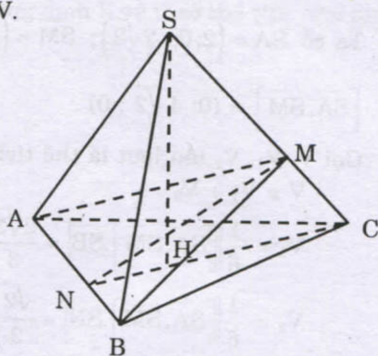
Ta có SH ⊥ (ABC) nên SH ⊥ AB, mà CN ⊥ AB, suy ra AB ⊥ (SCN)

Do đó AB ⊥ MN.

Theo giả thiết ta có góc $\widehat{MNC} = \varphi$ và SC ⊥ (AMN).

Theo giả thiết, ta biết thể tích khối chóp C.AMB bằng V.

Như vậy $V = \frac{1}{3}CM.\frac{1}{2}MN.AB = \frac{1}{6}a.CM.MN$



Xét tam giác vuông CMN, $MN = NC.\cos\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos\varphi$

$CM = CN.\sin\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi.\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\varphi = \frac{a^3\sin 2\varphi}{16}$

Vậy $a = 2\sqrt[3]{\frac{2V}{\sin 2\varphi}}$

Xét tam giác SHC, $SH = HC\tan\widehat{SCH} = HC.\tan(90^0 - \varphi)$

$$HC = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cot\varphi$$

$$\Rightarrow SH = \frac{2\sqrt{3}\cot\varphi}{3}.\sqrt[3]{\frac{2V}{\sin 2\varphi}}$$

Bài 499 (Thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2004)

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC và BD cắt nhau tại gốc toạ độ O.

Cho biết điểm A(2; 0; 0); B(0; 1; 0); S(0; 0; $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Giải

Cách 1:

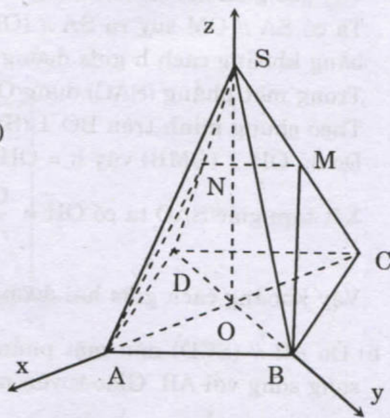
a) Vì A(2; 0; 0) nên C(−2; 0; 0)

Vì B(0; 1; 0) nên D(0; −1; 0)

Điểm M là trung điểm của cạnh SC nên M(−1; 0; $\sqrt{2}$)

Do đó $\overrightarrow{SA} = (2;0;-2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{BM} = (-1;-1;\sqrt{2})$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BM. Ta có:



$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \alpha = 30^0$

Ta có $\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(-2\sqrt{2};0;-2\right)$

và $\overrightarrow{AB} = \left(-2;1;0\right)$

Do đó khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA và BM là

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right]\right|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

b) Ta có AB // CD ⇒ AB // (SCD) ⇒ (ABM) cắt (SCD) theo giao tuyến MN thì MN // CD, mà M là trung điểm SC nên N là trung điểm của SD. Suy ra $N\left(0;-\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{SA} = \left(2;0;-2\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{SM} = \left(-1;0;-\sqrt{2}\right); \overrightarrow{SB} = \left(0;1;-2\sqrt{2}\right)$ và $\overrightarrow{SN} = \left(0;-\frac{1}{2};-\sqrt{2}\right)$ suy ra

$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right] = (0;\ 4\sqrt{2}\ ;\ 0)$

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp S.ABMN, S.ABM và S.AMN, ta có

$$V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SB}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$V_2 = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SN}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

Cách 2: Giải bằng phương pháp tổng hợp như sau:

a) Ta có SA // MO nên góc giữa hai đường thẳng SA và BM bằng góc giữa hai đường thẳng MO và BM.

Bởi vì BO ⊥ AC, BO ⊥ SO nên BO ⊥ (SAC) suy ra BO ⊥ OM.

Góc $\widehat{OMB}$ là góc giữa MO và BM.

Xét tam giác vuông SAO, có $SA^2 = OA^2 + OS^2 = 4 + 8 = 12$

Suy ra $SA = 2\sqrt{3}$ và do đó $OM = \sqrt{3}$

Ta có $\tan\widehat{OMB} = \frac{OB}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $\widehat{OMB} = 30^0$

Vậy góc giữa SA và BM bằng 30^0.

Ta có SA // OM suy ra SA // (OMB), do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM bằng khoảng cách h giữa đường thẳng SA và (OMB).

Trong mặt phẳng (SAC) dựng OH ⊥ SA thì OH ⊥ MO

Theo chứng minh trên BO ⊥ (SAC) suy ra BO ⊥ OH

Do đó OH ⊥ (OMB) vậy h = OH

Xét tam giác SAO ta có $OH = \frac{OA.OS}{SA} = \frac{2.2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM bằng $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b) Do AB // (SCD) nên mặt phẳng (ABM) cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến qua M và song song với AB. Giao tuyến này đi qua trung điểm N của SD

ta có $MN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$.

Suy ra: $S_{AMN} = \frac{1}{2}V_{S.ABM} \Rightarrow V_{S.ABMN} = \frac{3}{2}V_{S.ABM}$

Do M là trung điểm của SC nên khoảng cách từ S đến (ABM) bằng khoảng cách từ điểm C đến (ABM), do đó

$$V_{S.ABM} = V_{C.ABM} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{6}S_{ABC}.SO = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Vậy suy ra $V_{S.ABMN} = \frac{3}{2}.\frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

Chú ý: Để tính thể tích của khối chóp S.ABMN có thể dùng định lí về tỉ số thể tích như sau:

$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $V_{S.ABM} = \frac{1}{2}V_{S.ABC}$

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$$

Suy ra $V_{S.AMN} = \frac{1}{4}V_{S.ACD}$

Gọi V là thể tích của khối chóp S.ABCD thì $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V$

Do đó $V_{S.ABM} = \frac{1}{4}V$; $V_{S.AMN} = \frac{1}{8}V$

Từ đó $V_{S.ABMN} = \frac{1}{4}V + \frac{1}{8}V = \frac{3}{8}V = \frac{3}{8}S_{ABCD}.SO = \sqrt{2}$.

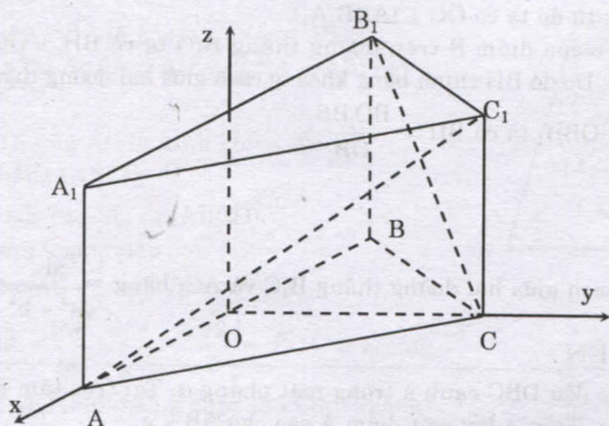
Bài 500 (Thi tuyển sinh Đại học khối D, M năm 2004)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Cho biết A(a; 0; 0); B(–a; 0; 0); C(0; 1; 0); B_1(–a; 0; 0) với a, b > 0.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b.

b) Cho a, b thay đổi, nhưng luôn thỏa mãn a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Giải



Cách 1: Từ giả thiết ta suy ra $C_1(0; 1; b)$; $\overrightarrow{B_1C} = (a; 1; -b)$; $\overrightarrow{AC_1} = (-a; 1; b)$; $\overrightarrow{AB_1} = (-2a; 0; b)$

Gọi h là khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1, ta có

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right].\overrightarrow{AB_1}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right]\right|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

b) Ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \sqrt{2ab}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2ab}} \Rightarrow \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant \frac{ab}{\sqrt{2ab}}$$

$$\Rightarrow h \leqslant \frac{ab}{\sqrt{2ab}}$$

Mặt khác $\frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{a+b}{2} = \sqrt{2}$

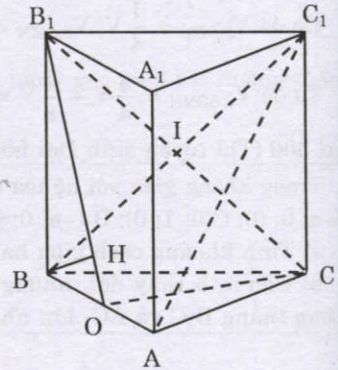
Vì a + b = 4 do đó $h \leqslant \sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi a = b = 2.

Cách 2:

Có thể giải bằng phương pháp tổng hợp như sau:



a) Gọi I là giao điểm của BC_1 và B_1C thì I là trung điểm của mỗi đoạn thẳng B_1C và BC_1. Vì O là trung điểm của AB nên OI // AC_1, do đó AC_1 song song với mặt phẳng (OB_1C).

Suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng AC_1 và B_1C bằng khoảng cách từ đường thẳng AC_1 đến (OB_1C) và cũng bằng khoảng cách từ điểm A đến (OB_1C).

- Vì OA = OB nên khoảng cách từ điểm A đến (OB_1C) bằng khoảng cách từ điểm B đến (OB_1C).

Vì $BB_1 \perp (ABC)$ suy ra $OC \perp B_1B$.

Mặt khác $OC \perp AB$, từ đó ta có $OC \perp (ABB_1A_1)$

Gọi H là hình chiếu của điểm B trên đường thẳng B_1O ta có $BH \perp OC$.

Suy ra $BH \perp (OB_1C)$. Do đó BH chính bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AC_1 và B_1C.

Xét tam giác vuông OBB_1 ta có $BH = \frac{BO.BB_1}{OB_1}$

Vậy $BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Kết luận: Khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 bằng $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

B. CÁC ĐỀ TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho một tam giác đều DBC cạnh a trong mặt phẳng α. Tại trực tâm H của tam giác ta kẻ đường thẳng $\Delta \perp \alpha$. Trên Δ lấy một điểm A sao cho AB = a.

a) Tính AH, AC, AD theo a.

b) Từ một điểm M trên cạnh AB, vẽ mặt phẳng β song song với hai đường thẳng AC và BD, cắt BC, CD tại AD lần lượt tại N, R, S. Tứ giác MNRS là hình gì?

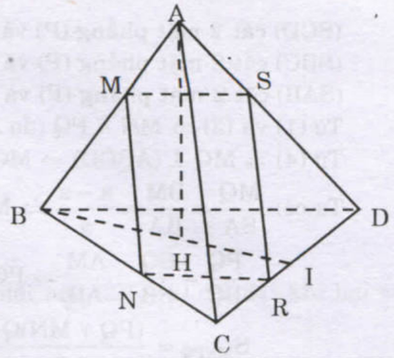
Giải

a) Vì tam giác BCD đều có cạnh là a nên trực tâm H cũng là trọng tâm, cũng là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Do đó:

$$BH = CH = DH = \frac{2}{3}BI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Tam giác AHB vuông tại H cho ta

$AH = \sqrt{AH^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



Vì AH ⊥ mặt phẳng (BCD)

Vì CH = DH = BH nên AC = AD = AB = a.

b) $\left.\begin{array}{l} \beta // BD \Rightarrow MS // NR // BD \\ \beta // AC \Rightarrow MN // RS // AC \end{array}\right\}$

⇒ Tứ giác MNRS là hình bình hành.

Mặt khác vì AC ⊥ BD (do BD ⊥ mặt phẳng (ACH))

Và MN // AC, MS // BD

Nên MN ⊥ MS. Vậy MNRS là hình chữ nhật.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông tại A lấy 1 điểm S sao cho SA = a.

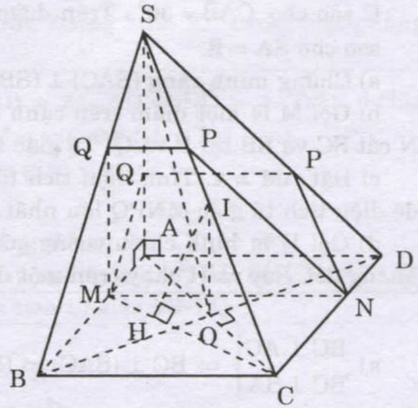
a) Chứng minh rằng SBC, SDC là hai tam giác vuông.

b) Tính góc của DC và SB. Tính góc của SC và (ABCD). Tính số đo nhị diện (A, BD, S).

c) Gọi M là 1 điểm trên cạnh AB. Một mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với AB cắt CD, CS, SB lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì? Đặt AM = x. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và x.

d) Gọi I là trung điểm của SC và H là hình chiếu vuông góc của I trên CM. Tìm quỹ tích của H khi M di động trên cạnh AB.

Giải



a) $\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ AB \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow SB \perp BC$ hay ΔSBC vuông tại B.

Tương tự ΔSCD vuông tại D.

b) DC // AB nên $\widehat{SBA}$ là góc của DC và SB

ΔSAB vuông tại A (SA = AH = a, SA ⊥ AB) nên

$\widehat{SBA} = 45^0$.

SA ⊥ (ABCD) nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABCD)

⇒ $\widehat{SCA}$ là góc của SC và (ABCD)

ABCD là hình vuông nên

$AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

Ta có $\text{tg}\,\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = \arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có: BD ⊥ AC (hai đường chéo của hình vuông)

BD ⊥ SA

⇒ BD ⊥ (SAC)

⇒ BD ⊥ SO

$\widehat{SCA}$ là góc phẳng của nhị diện (A, BD, S)

⇒ ta có $\text{tg}\,\widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \frac{2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SOA} = \text{arctg}\sqrt{2}$

c) $\left.\begin{array}{l} (P) \perp AB \\ (SAD) \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow (P) // (SAD)$

(ABCD) cắt 2 mặt phẳng (P) và (SAD) theo 2 giao tuyến song song MN // AD (1)

(SCD) cắt 2 mặt phẳng (P) và (SAD) theo 2 giao tuyến song song NP // SD (2)
(SBC) cắt 2 mặt phẳng (P) và (SAD) theo 2 giao tuyến song song QP // BC (3)
(SAB) cắt 2 mặt phẳng (P) và (SAD) theo 2 giao tuyến song song MQ // SA (4)
Từ (1) và (3) ⇒ MN // PQ (do AD // BC) ⇒ MNPQ là hình thang.
Từ (4) ⇒ MQ ⊥ (ABCD) ⇒ MQ ⊥ MN ⇒ MNPQ là hình thang vuông tại M và Q.

Ta có: $\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = a.\frac{a-x}{a} = a - x$

$\frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow PQ = a.\frac{x}{a} = x$

$S_{MNPQ} = \frac{(PQ + MN)QM}{2} = \frac{(x+a)(a-x)}{2}$

d) Ta có IO // SA (IO là đường trung bình ΔASC)

nên $\left.\begin{matrix} IO \perp (ABCD) \\ IH \perp CH \end{matrix}\right\} \Rightarrow CH \perp IO\ (\widehat{OHC} = 90^0)$

Nói khác đi là H ở trên đường tròn đường kính OC
Khi M ≡ A thì H ≡ O
Khi M ≡ B thì H ≡ J (J là trung điểm của BC)
Vậy quỹ tích của H khi M di động trên AB là cung OJ (1/4 đường tròn đường kính OC).

Bài 3. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn đường kính AB = 2R, trên đường tròn lấy 1 điểm C sao cho $\widehat{CAB} = 30^0$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A lấy 1 điểm S sao cho SA = R.

a) Chứng minh rằng (SAC) ⊥ (SBC)

b) Gọi M là một điểm trên cạnh AB, một mặt phẳng (E) đi qua M và vuông góc với AC tại N cắt SC và SB tại P và Q. Tứ giác MNPQ là hình gì?

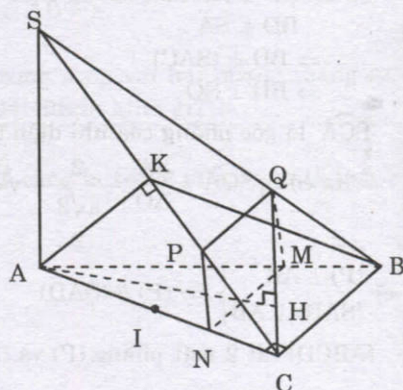
c) Đặt AM = x. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo R và x. Xác định vị trí của M trên AB để diện tích tứ giác MNPQ lớn nhất.

d) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên CQ và I là trung điểm của AC. Chứng tỏ HI không đổi. Suy ra H chạy trên một đường tròn cố định khi M di động trên AB.

Giải

a) $\left.\begin{matrix} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$

b) (E) ⊥ AC nên (E) // BC
(E) // SA
(E) // BC nên cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến MN // BC
(E) // SA nên cắt 2 mặt phẳng (SAC) và (SAB) theo 2 giao tuyến NP và MQ cùng song song với SA ⇒ MNPQ là hình bình hành.
Hơn nữa NP // SA nên NP ⊥ (ABC) ⇒ NP ⊥ MN
Suy ra, hình bình hành MNPQ là hình chữ nhật.



c) ΔABC vuông có $\widehat{CAB} = 30^0$ nên là nửa tam giác đều.

Ta có $BC = \frac{AB}{2} = \frac{2R}{2} = R$; $AC = R\sqrt{3}$

MN // BC nên tam giác AMN cũng là nửa tam giác đều.

Ta có: $MN = \frac{AM}{2} = \frac{x}{2}$

$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{2R - x}{2R}$

$\Rightarrow MQ = R.\frac{2R - x}{2R} = \frac{2R - x}{2}$

$S_{(MNPQ)} = MN.PQ = \frac{x}{2}.\frac{(2R - x)}{2} = \frac{(2R - x)x}{4}$

Hai số (2R – x) và x có tổng: 2R – x + x = 2R không đổi nên (2R – x) cực đại khi hai số đó bằng nhau.

S cực đại khi 2R – x = x hay x = R

Vậy S cực đại khi M ở tại trung điểm AB.

d) ΔAHC vuông tại H nên trung tuyến HI bằng nửa cạnh huyền AC

AC không đổi nên HI không đổi

Kẻ AK ⊥ SC

Vì (SAC) ⊥ (SBC) nên AK ⊥ (SBC)

$\left.\begin{matrix} AK \perp (SBC) \\ AK \perp CK \end{matrix}\right\} \Rightarrow KH \perp CH \Rightarrow \Delta KHC$ vuông tại H.

Trong mặt phẳng (SBC), H nhìn đoạn KC cố định dưới một góc vuông nên H ở trên đường tròn đường kính KC.

Vậy khi M di động trên AB thì H chạy trên đường tròn đường kính KC trong mặt phẳng (SCB).

Bài 4. Cho hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, AB = 2a, AD = DC = a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A lấy 1 điểm sao cho SA = 2a.

a) Chứng minh rằng các tam giác SDC, SCB là các tam giác vuông.

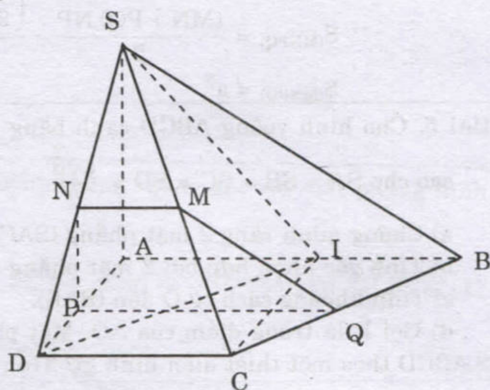
b) Tính các góc nhọn (CD, SB) và (BC, SD).

c) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa các cặp đường thẳng SA và BC, CD và SB.

d) Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với AD cắt SD, AD, BC lần lượt tại M, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì? Tính diện tích tứ giác MNPQ.

Giải

a) $\left\{\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ AD \perp DC \end{matrix}\right. \Rightarrow SD \perp DC$



hay ΔSCD vuông tại D (định lý 3 đường vuông góc)

Gọi I là trung điểm của A ⇒ tứ giác AICD là hình bình hành (AI // CD, AI = CD = a)

⇒ CI = AD = a.

ΔABC có trung tuyến CI bằng nửa cạnh đối diện AB nên là tam giác vuông cân tại C.

Tương tự như phần trên, áp dụng định lý 3 đường vuông góc, ta có SC ⊥ BC hay ΔSCB vuông tại C.

b) CD // AB nên góc nhọn (CD, SB) chính là góc $\widehat{SBA}$

ΔSBA vuông cân tại A (SA = SB = 2a) nên DI // BC nên $\left(\widehat{BC, SD}\right)$ chính là góc $\widehat{SDI}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ta có

$$SI^2 = DI^2 + SD^2 - 2SI.SD.\cos\widehat{SDI}$$

$$2a^2\sqrt{10}\cos\widehat{SDI} = 2a^2 \Rightarrow \cos$$

Trong đó $SI^2 = SA^2 + AI^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$

$$SI = a\sqrt{5}$$

$$DI = a\sqrt{2}$$

$$SD = a\sqrt{5}$$

a) Khoảng cách ngắn nhất giữa các cặp đường thẳng là đường vuông góc chung của chúng.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AC \perp SA \\ AC \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ AC là đường vuông góc chung của SA và BC

Theo trên ta có: $AC = a\sqrt{2}$ khoảng cách giữa hai đường CD và SB bằng a.

d) Mặt phẳng $\alpha \perp AD$ nên α // (SA)

mặt phẳng (SBC) cắt hai mặt phẳng // α và (SAB) theo hai giao tuyến MQ và SB song song với nhau.

Tương tự (ABCD) cắt hai mặt phẳng này theo 2 giao tuyến PQ // AB

(SAD) cắt hai mặt phẳng này theo 2 giao tuyến NP // SA.

(SCD) cắt hai mặt phẳng này theo 2 giao tuyến MN // CD.

Ta có: AB // CD nên PQ // MN ⇒ MNPQ là hình thang

Hơn nữa, NP // SA nên NP ⊥ (ABCD) ⇒ NP ⊥ PQ

Vậy MNPQ là hình thang vuông tại N và P

Từ M là trung điểm của SC, ta suy ra N, P, Q lần lượt là trung điểm của SD, AD và BC.

Ta có: $MN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$

$$PQ = \frac{DC + AB}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$NP = \frac{SA}{2} = a$$

$$S_{(MNPQ)} = \frac{(MN + PQ).NP}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right).a}{2} = \frac{2a.a}{2} = a^2$$

$$S_{(MNPQ)} = a^2.$$

Bài 5. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a tâm O, S là một điểm ở ngoài mặt phẳng ABCD sao cho $SA = SB = SC = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Chứng minh rằng 2 mặt phẳng (SAC) và (SDB) cùng vuông góc với (ABCD).

b) Tính góc nhọn hợp bởi 2 mặt phẳng (SAB) và (ABCD).

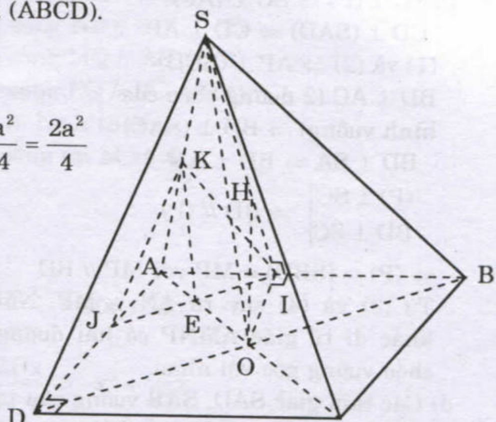
c) Tính khoảng cách từ O đến (SAB).

d) Gọi E là trung điểm của AO. Mặt phẳng (P) qua E và vuông góc với AC cắt hình chóp S.ABCD theo một thiết diện hình gì? Tính diện tích thiết diện đó.

Giải

a) Từ SA = SB = SC = SD nên S nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD. Nói khác đi $SO \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \end{cases}$

b) Gọi I là trung điểm của AB ta có: $\begin{cases} OI \perp AB \\ SI \perp AB \text{ (}\Delta SAB \text{ cân tại S)} \end{cases}$



$\Rightarrow \widehat{SIO}$ là góc hợp bởi 2 mặt phẳng (SAB) và (ABCD).

Ta có: $OI = \dfrac{a}{2}$

$$SI^2 = SB^2 - IB^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{2a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\widehat{SIO} = \dfrac{OI}{SI} = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{SIO} = 45^0$$

c) Gọi H là trung điểm của SJ

Do ΔSOI vuông cân tại O nên $OH \perp SI$

Mà $OH \perp AB$ (do $AB \perp$ mặt phẳng (SOI))

Nên $OH \perp (SAB)$

Vậy OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB)

$$OH = \dfrac{SI}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$$

d) $\left.\begin{matrix} (P) \perp AC \\ (SBD) \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow (P) \,//\, (SBD)$

Nên (P) cắt hình chóp theo tam giác IJK đồng dạng với tam giác SBD.

Mà ΔSBD cân tại S nên ΔIJK cân tại K.

KE // SO nên $KE \perp IJ$

Ta có: $KE = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{4}$ ($SO = OI = \dfrac{a}{2}$ và ΔSOI cân tại O)

$$IJ \,//\, DB \Rightarrow IJ = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{IJK} = \dfrac{1}{2}KE.IJ = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{4}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{16}$$

Bài 6. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình vuông dựng từ A lấy một điểm S sao cho SA = a.

a) Tính số đo nhị diện (A, CB, S).

b) Góc (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC cắt SBm SC, SD lần lượt tại M, N, P. Chứng minh $AP \perp (SCD)$.

Chứng minh tứ giác AMNP có hai đường chéo vuông góc nhau.

c) Tính diện tích tứ giác AMNP.

Giải

a) $\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ \Rightarrow SB \perp BC \end{matrix}\right\}$ định lí 3 đường vuông góc.

$\Rightarrow \widehat{SBA}$ là góc phẳng của nhị diện (A, CB, S)

ΔSAB vuông cân tại A nên $\widehat{SBA} = 45^0$

Vậy số đo nhị diện cạnh CB là 45^0.

b) $SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp (AP)$ (1)

$CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AP$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow AP \perp (SCD)$

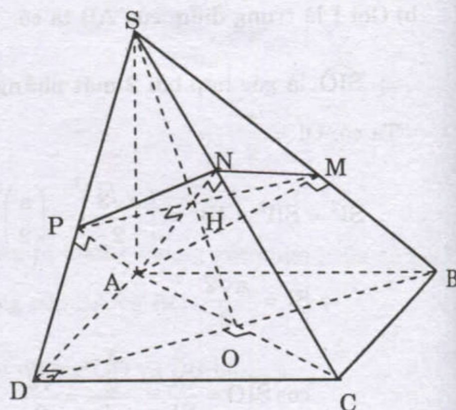
$BD \perp AC$ (2 đường chéo của hình vuông) $\Rightarrow BD \perp (SAC)$

$BD \perp SA \Rightarrow BD \perp AN$ (3)

$\left.\begin{array}{l} (P) \perp SC \\ BD \perp SC \end{array}\right| \Rightarrow BD // (P)$

$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = MP$ với $MP // BD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AN \perp MP$. Nói khác đi tứ giác AMNP có hai đường chéo vuông góc với nhau.



d) Các tam giác SAD, SAB vuông cân tại A nên các đường cao AP, AM cũng là đường trung tuyến. Nói khác đi M và P là trung điểm của SB và SD.

Ta có: $MP = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC, ta có

$$SA^2 = SN.SC \Rightarrow SN = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{(AMNP)} = \frac{1}{2}MP.AN = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{12}$$

Vậy $S_{(AMNP)} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{12}$.

Bài 7. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = a, AD = 2a, $SA \perp (ABCD)$ và SA = a.

a) Tính góc của SC và (ABCD) số đo nhị diện (A, SB, C)b) M là một điểm trên cạnh AB, mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với AB. Mặt phẳng (P) cắt thiết diện hình chóp theo hình gì?

c) Tính diện tích thiết diện đó theo a và BM = x, có giá trị nào của x để diện tích đó lớn nhất không? ($0 \leqslant x \leqslant a$)

Giải

a) $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{SCA}$ là góc hợp bởi SC và (ABCD)

Hệ thức lượng tam giác vuông ABC cho:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{5}$$

Ta có: $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$$\Rightarrow \widehat{SCA} = \arctan\frac{\sqrt{5}}{5}$$

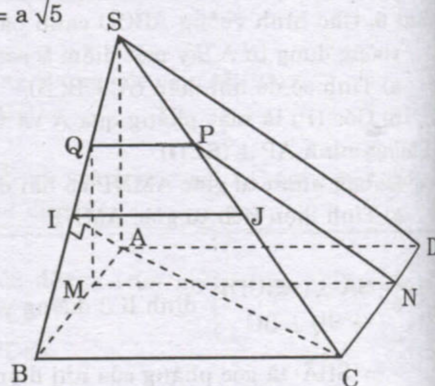
Gọi I, J là trung điểm của SB và SC

ΔSAB vuông cân tại A nên $AI \perp SB$

$IJ // BC$ nên $IJ \perp SB$

$\Rightarrow \widehat{AIJ}$ là góc phẳng của nhị diện (A, SB, C)

Do $IJ // BC$ mà $BC \perp (SAB)$ nên $IJ \perp (SAB)$



$\Rightarrow IJ \perp AI \Rightarrow \widehat{AIJ} = 90^0$

b) (P) $\perp$ AB $\Rightarrow$ (P) // (SAD)

(ABCD) cắt (P) và (SAD) theo 2 giao tuyến song song MN // AD (1)

(SCD) cắt (P) và (SAD) theo 2 giao tuyến song song NP // SD (2)

(SAB) cắt (P) và (SAD) theo 2 giao tuyến song song MQ // AS (3)

(SBC) cắt (P) và (SAD) theo 2 giao tuyến song song PQ // BC (4)

(1) và (4) $\Rightarrow$ MN // PQ (vì AD // BC) $\Rightarrow$ MNPQ là hình thang.

(3) $\Rightarrow$ MQ $\perp$ MN $\Rightarrow$ thiết diện là hình thang vuông tại M và Q.

c) Ta có: MN = 2a

$$\frac{MQ}{AS} = \frac{BM}{BA} = \frac{x}{a} \Rightarrow MQ = a\frac{x}{a} = x$$

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow PQ = 2a.\frac{a-x}{a} = 2(a-x)$$

$$S_{MNPQ} = \frac{\left(PQ + MN\right).MQ}{2} = \frac{(2a - 2x + 2a)x}{2} = -x^2 + 2ax$$

Đạo hàm: $S' = 2a - 2x$

$S' = 0 \Leftrightarrow 2a - 2x = 0 \Leftrightarrow x = a$

Vậy diện tích lớn nhất khi x = a.

x	0		a
S'			0
S	0	↗	a^2

Bài 8. Cho hình thoi ABCD cạnh AB = a, đường chéo BD = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$, trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình thoi tại giao điểm O của hai đường chéo lấy một điểm S sao cho SB = a.

a) Chứng minh rằng tam giác SAC vuông cân.

b) Chứng minh rằng (B, SA, D) là nhị diện vuông.

c) Gọi I là trung điểm SA. Mặt phẳng (CDI) cắt hình chóp SABCD theo thiết diện hình gì? Tính diện tích thiết diện này.

Giải

a) Ta có: $SO^2 = SB^2 - OB^2$

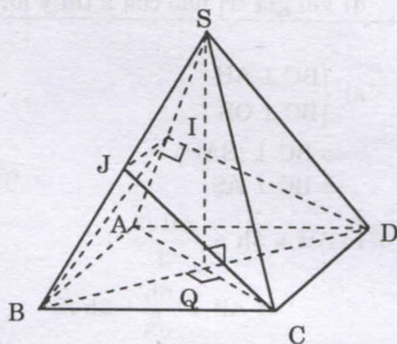
$$SO^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$AO^2 = AB^2 - BO^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{6}}{3} \ (= OC)$$



Tam giác SAC có trung tuyến SO bằng nửa cạnh đối diện AC nên là tam giác vuông tại S. Hơn nữa SA = SC nên tam giác SAC vuông cân tại S.

b) Gọi I là trung điểm SA, các tam giác SAB, SAD cân tại B và D nên $\left.\begin{array}{l}BI \perp SA\\ DI \perp SA\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BID}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh SA.

Ta có: OI // SC $\Rightarrow OI = \dfrac{SC}{2}$ (O là điểm giữa của AC)

$$SC = SO.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.\sqrt{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{BD}{2} \Rightarrow \Delta BID \text{ vuông tại I.}$$

$$\Rightarrow \widehat{BID} = 90^0$$

c) (CID) chứa CD // (SAB) nên cắt (SAB) theo giao tuyến IJ // AB (// CD) $\Rightarrow$ thiết diện IJCD là hình thang.

Hơn nữa $\begin{cases} ID \perp SA \\ ID \perp IB \end{cases} \Rightarrow ID \perp (SAB) \Rightarrow ID \perp IJ$

Vậy IJCD là hình thang vuông tại I và D

Ta có: $IJ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

$$ID = IO\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{(IJCD)} = \frac{(IJ + CD).ID}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2} + a\right)\frac{a\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{\frac{3a}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}}{2}$$

$$S_{(IJCD)} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Bài 9. Cho tam giác đều ABC có chiều cao AH = 3h. Lấy điểm O trên AH sao cho AO = h, trên đường thẳng Ox $\perp$ (ABC) lấy điểm S sao cho OS = OB.

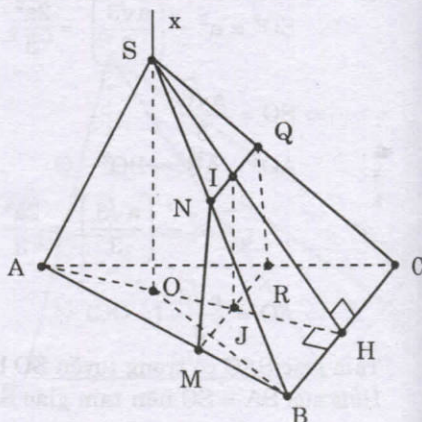
a) Chứng minh rằng BC $\perp$ AS.

b) Tính các đoạn: SO, SA, SH theo h.

c) Qua điểm J trên OH, ta vẽ mặt phẳng (P) song song với SO và BC cắt AB, SB, SC, AC lần lượt tại M, N, Q, R. Tìm hình tính tứ giác MNQR. Đặt AJ = x, tính diện tích y của tứ giác MNQR theo x và h.

d) Với giá trị nào của x thì y lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này của y theo h.

Giải



a) $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp OS \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAH)$

$\Rightarrow BC \perp AS$

b) $AH = 3h = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow AB = \frac{6h}{\sqrt{3}} = 2h\sqrt{3}$$

$$OB^2 = OH^2 + BH^2 = 4h^2 + \left(h\sqrt{3}\right)^2 = 7h^2$$

$OB = h\sqrt{7}$

$SO = OB = h\sqrt{7}$

$SA^2 = OA^2 + SO^2 = h^2 + 7h^2 = 8h^2$

$SA = 2h\sqrt{2}$

$SH^2 = SO^2 + OH^2 = 7h^2 + 4h^2 = 11h^2$

$SH = h\sqrt{11}$.

c) (P) // SO nên cắt (SAH) theo giao tuyến IJ // SO

(P) // BC nên cắt hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) theo hai giao tuyến MR và NQ song song với BC (MR // NQ)

⇒ MNQR là hình thang có đường cao IJ

Hơn nữa (SAH) là mặt phẳng đối xứng của hình chóp nên ta có MN = QR (đối xứng qua (SAH))

⇒ MNQR là hình thang cân

Ta có: $OJ = x - h$

$$\frac{IJ}{SO} = \frac{HJ}{HC} = \frac{3h - x}{2h}$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{3h - x}{2h} h\sqrt{7} = \frac{(3h - x)\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{NQ}{BC} = \frac{SI}{SH} = \frac{OJ}{OH} = \frac{x - h}{2h}$$

$$\Rightarrow NQ = 2h\sqrt{3}\,\frac{x - h}{2h} = (x - h)\sqrt{3}$$

$$\frac{MR}{BC} = \frac{AJ}{AH} = \frac{x}{3h}$$

$$\Rightarrow MR = 2h\sqrt{3}.\frac{x}{3} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$y = S_{MNQR} = \frac{(NQ + MR).IJ}{2} = \left[(x - h)\sqrt{3} + \frac{2x\sqrt{3}}{3}\right]\frac{(3h - x)\sqrt{7}}{2}$$

$$= -\frac{5\sqrt{21}}{12}x^2 + \frac{3h\sqrt{21}}{2}.x - \frac{3h^2\sqrt{21}}{4}$$

d) $$y' = \frac{5\sqrt{21}}{6}x + \frac{3h\sqrt{21}}{2}y'$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{21}}{6}x = \frac{3h\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9h}{5}$$

x	0		$\frac{9h}{5}$		3h
y'		+	0	−	
y		↗	$\frac{87h^2\sqrt{21}}{10}$	↘	

y lớn nhất khi $x = \frac{9h}{5}$ và $y_{max} = \frac{87h^2\sqrt{21}}{10}$

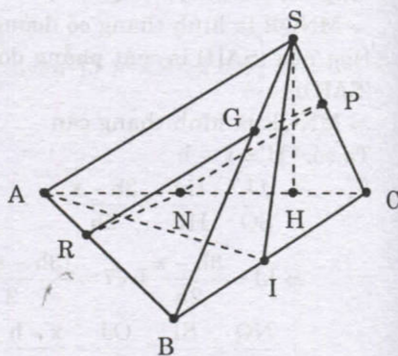
Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = a, $\widehat{ABC} = 90^0$, điểm H trên cạnh AC sao cho AH = 2HC. Trên đường vuông góc với (ABC) tại H ta lấy đoạn $HS = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

1. Chứng minh các tam giác SAC, SBC, SAB là những tam giác vuông. Tính các đoạn SA, SB, SC.

2. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh tam giác SIA vuông.

3. Dựng và tính mặt cắt giữa tứ diện S.ABC và mặt phẳng qua trung điểm M của SH và song song với SA và BC.

Giải



1. ΔABC vuông có $\widehat{ABC} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều.

$\Rightarrow AC = AB\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

$BC = 2AB = 2a$

Ta có: $SH^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2$ (1)

$AH = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2}{3}a\sqrt{3}$

$HC = \dfrac{1}{3}AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$AH.HC = \dfrac{2}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a^2}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SH^2 = AH.HC$, H thuộc đoạn AC

$\Rightarrow$ ΔSAC vuông tại S

$\begin{cases} SH \perp (ABC) \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow$ ΔSAB vuông tại A.

$SC^2 = HA.HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = a^2 \Rightarrow SA = a$

$SA^2 = AH.AC = \dfrac{2}{3}a\sqrt{3}.a\sqrt{3} = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$

$SB^2 = SA^2 + AB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$

ΔSBC cho: $SC^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = BC^2$

Vậy ΔSBC vuông tại S

Ta có: $\begin{cases} SI = \dfrac{BC}{2} = a \\ AI = \dfrac{BC}{2} = a \end{cases} \Rightarrow$ ΔSIA cân tại I

Hơn nữa $SA = AI\sqrt{2}$ nên ΔSIA vuông cân tại I.

3. (α) // SA nên cắt 2 mặt phẳng (SAC) và (SAB) theo hai giao tuyến NP và QR cùng song song với SA (NP // QR // SA)

(α) // BC nên cắt 2 mặt phẳng (SAC) và (SAB) theo hai giao tuyến NR và PQ cùng song song với BC (NR // PQ // BC)

$\Rightarrow$ tứ giác NPQR là hình bình hành.

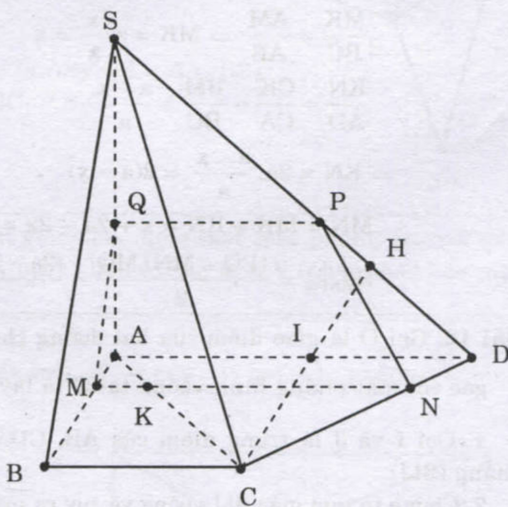
Bài 11. Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, có AB = BC = a, AD = 2a. Trên đường vuông góc mặt phẳng (ABCD) tại A ta lấy đoạn $AS = a\sqrt{2}$.

1. Chứng minh rằng các tam giác SBC, SCD là những tam giác vuông.

2. Tính số đo nhị diện cạnh CD và nhị diện cạnh SD.

3. Từ điểm M trên cạnh AB với AM = x ta dựng mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SBC). Mặt phẳng (α) cắt CD, SD và SA lần lượt tại N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì và tính diện tích của nó theo a và x.

Giải



1. $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AB \perp BC \end{cases}$

Định lí 3 đường $\perp$

$\Rightarrow SB \perp BC$ hay ΔSBC vuông tại B.

Gọi I là trung điểm của AD ta có

$CI = \dfrac{AD}{2}$ nên tam giác ACD vuông tại C.

Dùng định lí 3 đường $\perp$ ta suy ra $SC \perp CD$.

Hay ΔSCD vuông tại C.

2. $\begin{cases} SC \perp CD \\ AC \perp CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{SCA}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh CD.

Ta có: $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$; $AS = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{SCA} = 45^0$

Trong ΔSAD kẻ $\begin{cases} IH \perp SD \\ CO // AB \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAD)$

Định lí 3 đường vuông góc $\Rightarrow CH \perp SD$

$\Rightarrow \widehat{IHC}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh SD

Hai tam giác IHD và SAD đồng dạng

$$\frac{IH}{SA} = \frac{ID}{SD} \Rightarrow IH = SA.\frac{ID}{SD} \quad (SD = a\sqrt{6})$$

$$= a\sqrt{2}.\frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

Ta có: $\tan\widehat{IHC} = \dfrac{CI}{IH} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{IHC} = 60^0$

3. α // (SBC)

(ABCD) cắt hai mặt phẳng (SBC) và (α) theo hai giao tuyến MN // BC (1)

(SAB) cắt hai mặt phẳng (SBC) và (α) theo hai giao tuyến MQ // SB (2)

(SAD) cắt hai mặt phẳng (SBC) và (α) theo hai giao tuyến PQ // AD (3)

(SCD) cắt hai mặt phẳng (SBC) và (α) theo hai giao tuyến NP // SC (4)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow$ MN // PQ vì BC // AD

$\Rightarrow$ MNPQ là hình thang.

Hơn nữa góc QMN là góc của hai đường SB và BC mà $SB \perp BC$ nên góc $QMN = 90^0$

$\Rightarrow$ MNPQ là hình thang vuông tại M và Q.

Ta có: $\frac{MQ}{SB} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a}$ ($SB^2 = SA^2 + AB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$)

$$MQ = SB\frac{x}{a} = \frac{a\sqrt{3}x}{a} = x\sqrt{3}$$

$$\frac{PQ}{AD} = \frac{SQ}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a}$$

$$\Rightarrow PQ = 2a.\frac{a-x}{a} = 2(a-x)$$

Gọi K = AC ∩ MN, ta có:

$$\frac{MK}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MK = a.\frac{x}{a} = x$$

$$\frac{KN}{AD} = \frac{CK}{CA} = \frac{BM}{BC} = \frac{a-x}{a}$$

$$\Rightarrow KN = 2a.\frac{a-x}{a} = 2(a-x)$$

$$MN = MK + KN = x + 2a - 2x = 2a - x$$

$$S_{MNPQ} = \frac{(PQ + MN).MQ}{2} = \frac{(2a - 2x + 2a - x)x\sqrt{3}}{2} = \frac{(4a-3)x\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 12. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình vuông ABCD cạnh a. Trên đường vuông góc với mặt phẳng hình vuông tại O ta lấy $OS = \frac{a}{2}$.

1. Gọi I và J là trung điểm của AB, CD. Chứng tỏ mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SIJ).

2. Chứng tỏ tam giác SIJ vuông và suy ra mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SCD).

3. Gọi M và N là trung điểm của SB và SC. Tứ giác AMND là hình gì? Tính diện tích hình đó.

Giải

1. ABCD là hình vuông, O là tâm hình vuông

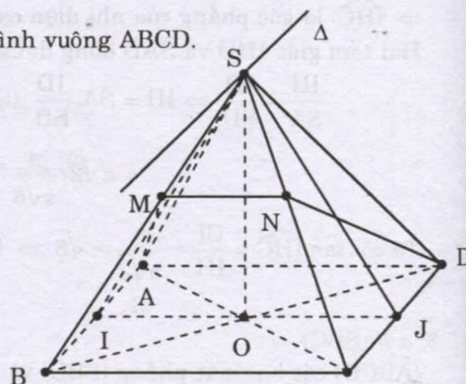
⇒ SO chính là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

⇒ SA = SB = SC = SD

Tam giác SAB cân tại S ⇒ SI ⊥ AB

IJ ⊥ AB ⇒ AB ⊥ (SIJ)

⇒ mặt phẳng (SAB) ⊥ mặt phẳng (SIJ)



2. Tam giác SIJ có trung tuyến $SO = \frac{IJ}{2} = \frac{a}{2}$

nên vuông tại S, 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD) lần lượt chứa hai đường song song AB và CD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng Δ qua S và // CD.

$\begin{cases} SI \perp AB \Rightarrow SI \perp \Delta \\ SJ \perp CD \Rightarrow SJ \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow \widehat{ISJ}$ là góc phẳng của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Mà $\widehat{ISJ} = 90^0$ (ΔSIJ vuông tại S)

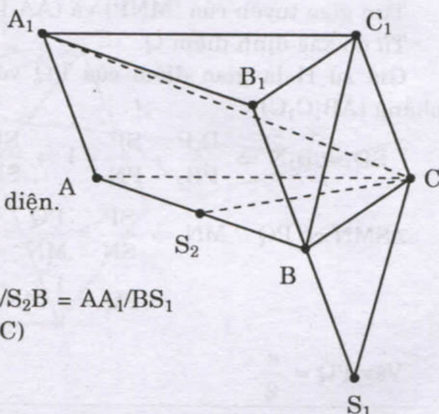
Nên hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau.

3. Trong tam giác SBC, MN là đường trung bình nên MN // BC, $MN = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

⇒ Tứ giác AMND là hình thang.

Bài 13. Dựng thiết diện của một lăng trụ tam giác cắt bởi mặt phẳng đi qua hai điểm A_1, C và song song với đường thẳng (BC_1). Xác định tỉ số mà mặt phẳng α chia đoạn AB.

Giải

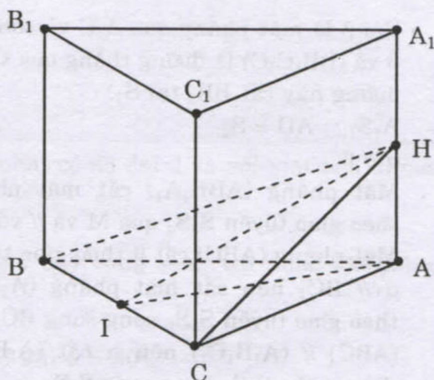


- Giao tuyến của α với mặt phẳng (BB_1C_1C) qua điểm C và song song với BC_1. Gọi S_1 là giao điểm của đường thẳng này với BB_1.
  S_1 là điểm chung của α và mặt phẳng (AA_1B_1B)
  Điểm chung thứ hai chính là A_1.
  Kẻ đường thẳng A_1S_1 ta tìm được điểm S_2 của thiết diện.
  Vậy thiết diện là tam giác A_1S_2C.
- Xác định tỉ số AS_2/S_2B
  Hai tam giác A_1AS_2 và S_1BS_2 đồng dạng cho ta $AS_2/S_2B = AA_1/BS_1$
  Từ S_1BC_1C là hình bình hành ($BS_1 \parallel CC_1$; $BC_1 \parallel S_1C$)
  Ta có $BS_1 = C_1C$
  Hơn nữa: $C_1C = AA_1$
  Vậy $AS_2/ S_2B = 1$.

Bài 14. Qua một cạnh đáy của lăng trụ đáy tam giác đều, dựng một mặt phẳng tạo với đáy một góc α. Mặt phẳng này cắt lăng trụ thành hình chóp có thể tích V (phần dưới của mặt cắt). Xác định diện tích thiết diện.

Giải

Mặt phẳng cắt qua cạnh đáy BC và tạo với đáy một góc α nên cắt hai mặt phẳng của lăng trụ. Thiết diện là ΔHBC.



Lăng trụ đều nên BH = CH ⇒ ΔHBC cân tại H.

I là trung điểm của BC.

$$\begin{cases} HI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{HIA} = \alpha$$

Gọi V là thể tích hình chóp HABC, S là diện tích tam giác ABC.

$$AI = HI.\cos\alpha$$

$$BC = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}HI.\cos\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}BC.AI = \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}HI^2.\cos^2\alpha$$

$$V = \frac{1}{3}S.AH = \frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}HI^2.\cos^2\alpha.HI\sin\alpha$$

$$V = \frac{1}{3\sqrt{3}}HI^3.\cos^2\alpha.\sin\alpha \Rightarrow HI = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V}{\cos^2\alpha.\sin\alpha}}$$

Diện tích ΔHBC

$$S_1 = \frac{1}{2}BC.HI = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}HI^2.\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha\sqrt[3]{\left(\frac{3\sqrt{3}V}{\cos^2\alpha.\sin\alpha}\right)^2} = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{V^2}{\cos\alpha.\sin^2\alpha}}$$

Bài 15. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BB_1, MN = a. Hai đường chéo của mặt $A_1B_1C_1D_1$ cắt nhau tại P. Một đường thẳng qua P song song với MN cắt mặt phẳng AA_1D_1D tại điểm Q. Tìm độ dài đoạn thẳng PQ.

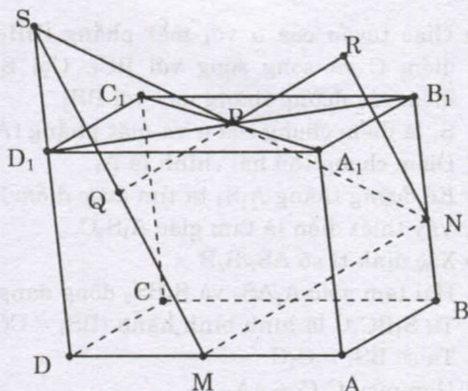
Giải

Cắt hình lăng trụ theo mặt phẳng (MNP)

Tìm giao tuyến của (MNP) và (AA_1DD_1)

Từ đó xác định điểm Q.

Giả sử H là giao điểm của PQ với mặt phẳng (AB_1C_1C)



$$SD_1 \,//\, B_1N \Rightarrow \frac{D_1P}{PB_1} = \frac{SP}{PN} = 1 \Rightarrow \frac{SP}{SN} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta SMN \text{ có } PQ \,//\, MN \Rightarrow \frac{SP}{SN} = \frac{PQ}{MN} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}MN = \frac{a}{2}$$

Vậy $PQ = \dfrac{a}{2}$.

Bài 16. Cho hình lăng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$.

Gọi M là 1 điểm trên đường chéo AB_1 của mặt ABB_1A_1 sao cho $\dfrac{AM}{MB_1} = \dfrac{5}{4}$.

Dựng thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng α qua M và song song với các đường chéo A_1C, BC_1. Xác định tỉ số mà mặt phẳng α chia cạnh CC_1.

Giải

- Gọi β là mặt phẳng qua A_1C và song song với BC_1

  β và (BB_1C_1C) là đường thẳng qua C và // BC, đường này cắt BB_1 tại S_1.

  $A_1S_1 \cap AD = S_2$

  α // β

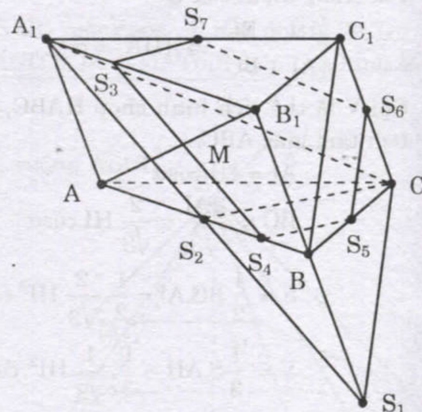
  Mặt phẳng (ABB_1A_1) cắt mặt phẳng β theo giao tuyến S_3S_4 qua M và // với AB_2.

  Mặt phẳng (ABC) cắt β theo giao tuyến CS_2

  α // BC_1 nên cắt mặt phẳng $(A_1B_1C_1C)$ theo giao tuyến S_5S_6 song song BC_1.

  (ABC) // $(A_1B_1C_1)$ nên α cắt $(A_1B_1C_1)$ theo giao tuyến S_3S_7 song song S_4S_5.

  Vậy thiết diện là ngũ giác $S_3S_4S_5S_6S_7$



- Tỉ số $\dfrac{CS_6}{S_6C_1} = \dfrac{2}{1}$

Bài 17. Cho hình hộp $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, BB_1 và tâm của $A_1B_1C_1D_1$. Dựng thiết diện của lăng trụ bị cắt bởi mặt phẳng α qua M, N, P. Xác định tỉ số mặt phẳng α chia cạnh AB.

Giải

Tìm giao điểm NP với mặt phẳng (AA_1DD_1) đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (BB_1D_1D) cắt mặt phẳng (AA_1D_1D) tại S_1 ($S_1 = NP \cap DD_1$)

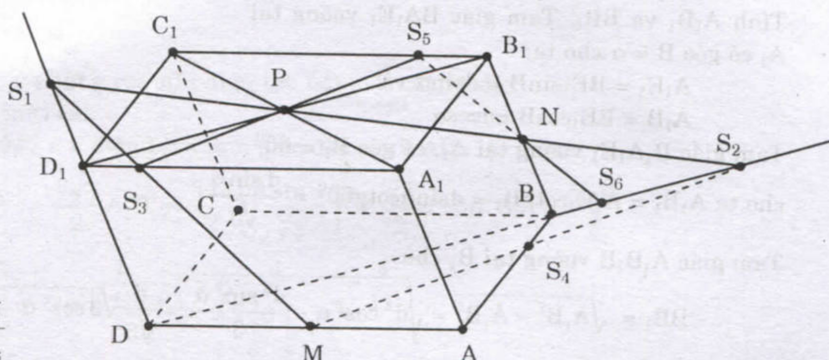
Tương tự tìm giao điểm S_2 của NP với mặt phẳng (ABCD) ($S_2 = NP \cap BD$)

α cắt (ABCD) theo đường S_2N. Ta tìm đỉnh của thiết diện

$$S_3 = S_1N \cap D_1A_1;\ S_4 = S_2N \cap AB$$

$S_5 = S_3P \cap B_1C_1$; $S_6 = BC \cap \alpha$

Ngũ giác $MS_3S_5NS_4$ thiết diện phải dựng. ($MS_3 // NS_5$, $S_3S_5 // MS_4$)



Tính tỉ số $\frac{AS_4}{S_4B}$

$\Delta MAS_4 \backsim \Delta S_6BS_4$

Cho ta: $\frac{AS_4}{S_4B} = \frac{AN}{BS_6}$

Tam giác BS_6N = tam giác B_1S_5N: cho $BS_6 = B_1S_5$

B là tâm đối xứng của hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$

$\Rightarrow B_1S_5 = D_1S_3$

Từ đó ta có $BS_6 = D_1S_3$

Từ giả thiết AM = DM ta có $AS_1/BS_1 = DN/D_1S_3$

Tam giác $DS_1N \backsim$ tam giác $D_1S_1S_3$ cho ta $DM/D_1S_3 = DS_1/D_1S_1$

Tam giác S_1D_1P = tam giác NB_1P cho $D_1S_1 = B_1N$

$B_1N = 1/2\ B_1N = 1/2\ D_1D$

$D_1S = 1/2\ D_1D$

$DS_1 = 3/2\ DD_1$

$DM/D_1S_3 = DS_1/D_1S_1 = 3/1$

$AS_4/BS_4 = DN/D_1S = 3/1$

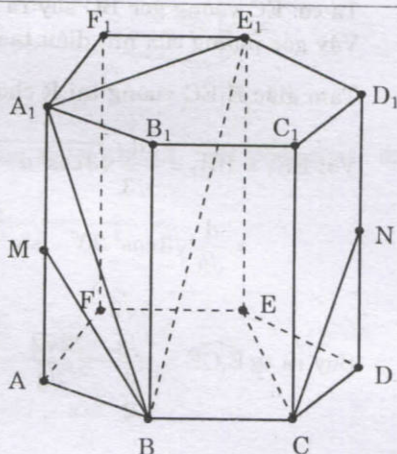
Vậy cạnh AB được chia theo tỉ số 3 : 1 tính từ điểm A.

Bài 18. Cho hình lăng trụ lục giác đều, đường chéo lớn nhất có độ dài d và với mặt bên đi qua một đầu đường chéo ấy góc α.

1. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ.
2. Mặt phẳng (P) đi qua 2 cạnh lần lượt nằm trong 2 đáy song song với nhau và không nằm trong cùng một mặt bên.
   a) Xác định mặt cắt tạo bởi (P) và lăng trụ.
   b) Tính góc nhị diện tạo bởi (P) và mặt đáy theo d khi $\alpha = 30^0$.
   c) Tính diện tích thiết diện.

Giải

1. Diện tích xung quanh: Nhận xét rằng ở 1 điểm của hình lăng trụ, chẳng hạn ở B có 3 đường chéo là BD_1, BE_1 và BF_1 các đường chéo này có hình chiếu ở trên đáy $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ là B_1D_1, B_1E_1, B_1F_1 trong đó B_1E_1 là lớn nhất nên BE_1 là đường chéo lớn nhất.



Ta có $BE_1 = d$ vì B_1E_1 là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đáy $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ nên $A_1E_1 \perp A_1B_1$.

Suy ra $A_1E_1 \perp (ABB_1A_1)$ vậy BA_1 là hình chiếu của BE_1 ở trên mặt bên (ABB_1A_1) nên góc $A_1BE_1 = \alpha$

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là

$$S_{xq} = p.h = 6A_1B_1.BB_1.$$

Tính A_1B_1 và BB_1. Tam giác BA_1E_1 vuông tại A_1 có góc $B = \alpha$ cho ta:

$$A_1E_1 = BE_1\sin B = d\sin\alpha \text{ và}$$

$$A_1B = BE_1\cos B = d\cos\alpha$$

Tam giác $B_1A_1E_1$ vuông tại A_1, có góc $B_1 = 60^0$

cho ta $A_1B_1 = A_1E_1\cot gB_1 = d\sin\alpha\cot g60^0 = \dfrac{d\sin\alpha}{\sqrt{3}}$

Tam giác A_1B_1B vuông tại B_1 cho

$$BB_1 = \sqrt{A_1B^2 - A_1B_1^2} = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - \frac{d^2\sin^2\alpha}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = 6.\frac{d\sin\alpha}{\sqrt{3}}.\frac{d}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 2d^2\sin\alpha\sqrt{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

2. a) Xác định mặt cắt giữa mặt phẳng (P) và lăng trụ:

Xét mặt phẳng (P) đi qua 2 cạnh song song BC và E_1F_1 lần lượt nằm trong 2 đáy và không ở trên cùng 1 mặt bên.

Gọi M và N là giao điểm của (P) với AA_1 và DD_1 thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ADD_1A)

$$\begin{cases} BC // AD \\ BC \subset (P) \\ AD \subset (ADD_1A) \end{cases} \Rightarrow BC // MN$$

Mặt khác, hai mặt bên ABB_1A_1 và DEE_1D_1 song song với nhau nên BM // NE_1 và 2 mặt chéo AEE_1A_1, BDD_1B_1 song song với nhau nên giao tuyến của chúng với mặt phẳng (P) là ME_1 và BN cũng song song với nhau.

Vậy BNE_1M là hình bình hành, do đó $BM = NE_1$

Tương tự: $MF_1 = CN$. Dễ thấy MN = CN vậy $BM = MF_1 = CN = NE_1$

Suy ra M, N là điểm giữa của AA_1, DD_1.

Mặt cắt là hình lục giác $BCNE_1F_1M$ gồm hai hình thang cân bằng nhau BCNM và E_1F_1MN

b) Góc của (P) và mặt đáy (ABCDE)

(P) và mặt phẳng (ABCDE) có giao tuyến là BC.

Ta có: EC vuông góc BC suy ra E_1C vuông góc BC

Vậy góc phẳng của nhị diện tạo bởi chúng là góc E_1CE

Tam giác E_1EC vuông tại R cho $tg\widehat{E_1CE} = \dfrac{EE_1}{EC}$

Với $EE_1 = BB_1 = \dfrac{d}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$= \dfrac{d}{\sqrt{3}}\sqrt{3\cos^2 30^0 - \sin^2 30^0} = \dfrac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ và $EC = A_1E_1 = d\sin\alpha = \dfrac{d}{2}$

Suy ra $tg\widehat{E_1CE} = \dfrac{\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{d}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

c) Diện tích mặt cắt:

Lục giác đều ABCDEF chính là hình chiếu của mặt cắt trên đáy (ABCDEF) nên ta có

$$\cos\widehat{E_1CE} = \frac{S}{S_{mc}}$$

Với $\angle E_1CE$ là góc phẳng của nhị diện tạo bởi mặt cắt và đáy

S_{mc}: diện tích mặt cắt

S = diện tích đáy = 6.diện túch tam giác đều cạnh AB.

$$6.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}A_1B_1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{d\sin\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}d^2\sin^2 30^0 = \frac{d^2\sqrt{3}}{8}$$

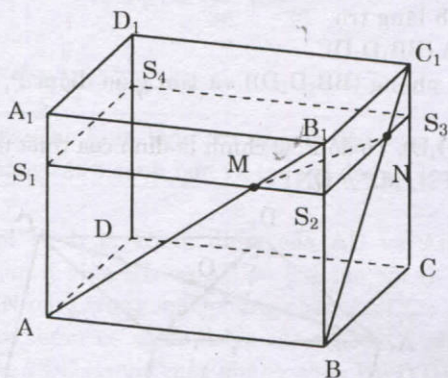
$$\cos^2\widehat{E_1CE} = \frac{1}{tg^2E_1CE + 1} = \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{3}{11}$$

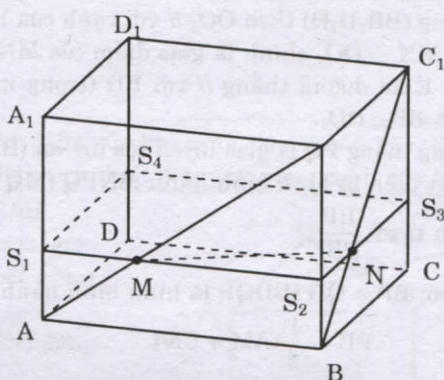
Suy ra $\cos\widehat{E_1CE} = \sqrt{\frac{3}{11}}$

Suy ra $S_{mc} = \dfrac{S}{\cos E_1CE + 1} = \dfrac{\frac{d^2\sqrt{3}}{8}}{\sqrt{\frac{3}{11}}} = \dfrac{d^2\sqrt{11}}{8}$

Bài 19. Cho khối lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M và N là 2 điểm ở trên các đường chéo AB_1 và BC_1 của các mặt $ABBA_1$ và BB_1C_1C sao cho MN song song với mặt ABCD. Tìm các tỉ số $\frac{AM}{AB_1}$ và $\frac{BN}{BC_1}$ với $\frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Giải





Giả sử MN // (ABCD)

Kẻ đường thẳng S_1S_2 qua M ở trong mặt AA_1B_1B song song với AB, mặt phẳng xác định bởi MN và S_1S_2 song song với mặt phẳng (ABCD).

Thiết diện với khối lập phương là hình vuông $S_1S_2S_3S_4$

Đặt $\frac{AM}{AB_1} = x$, AB = a

Tam giác MB_1S_2 đồng dạng tam giác AB_1B suy ra $\frac{MB_1}{AB_1} = \frac{MS_2}{AB} = \frac{B_1S_2}{B_1B}$

Từ $MB_1 = (1 - x)AB_1$, ta nhận được $MS_2 = (1 - x)AB = (1 - x)a$

$B_1S_2 = (1 - x)AB_1$ và $BS_2 = BB_1 - B_1S_2 = xBB_1$

Tam giác BS_2N đồng dạng tam giác BB_1C_1

Suy ra $\dfrac{S_2N}{B_1C_1} = \dfrac{BN}{BC_1} = \dfrac{BS_2}{BB_1} = x$

Suy ra $S_2N = 2a$ và $\dfrac{BN}{BC_1} = \dfrac{AM}{AB_1} = x$

Tam giác MS_2N vuông, ta có: $MN = \dfrac{\sqrt{5}}{3}a$

$MS_2 = (1 - x)a$; $S_2M = xa$

Theo Pytago ta có:

$$\frac{5}{9}a^2 = (1-x)^2a^2 + x^2a^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Từ đó ta có 2 vị trí của MN thỏa điều kiện của bài toán

Trả lời: $\dfrac{AN}{AB_1} = \dfrac{BN}{BC_1} = \dfrac{2}{3}$ hay $\dfrac{AN}{AB_1} = \dfrac{BN}{BC_1} = \dfrac{1}{3}$

Bài 20. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M và N là 2 điểm lần lượt trên 2 cạnh AA_1 và CC_1 sao cho $\dfrac{AM}{AA_1} = m$; $\dfrac{CN}{CC_1} = n$. Mặt phẳng (α) qua M và N song song với đường chéo BD của đáy. Xác định tỉ số mà mặt phẳng (α) chia cạnh BB_1.

Giải

$BD \subset (BB_1D_1D)$ suy ra (α) và (BB_1D_1D) cắt nhau theo đường thẳng // với BD.

Dựng giao điểm của MN với mặt phẳng (BB_1D_1D), mặt phẳng AA_1C_1C chứa MN cắt mặt phẳng (BB_1D_1D) theo OO_1 // với cạnh của hình lăng trụ.

$E = MN \cap OO_1$ chính là giao điểm của MN và (BB_1D_1D)

Qua E kẻ đường thẳng // với BD (trong mặt phẳng (BB_1D_1D)) và tìm giao điểm P, Q của cạnh BB_1, DD_1.

Đường thẳng PQ là giao tuyến của (α) với (BB_1D_1D). Từ đó P, Q chính là đỉnh của thiết diện.

Thiết diện là hình bình hành MNPQ (MQ // PN, MP // QN)

Tính tỉ số $\dfrac{BP}{PB_1}$

Ta có: BP = QD (BDQP là hình bình hành)

$PB = \dfrac{1}{2}(AM + CN)$

$AM = mAA_1$

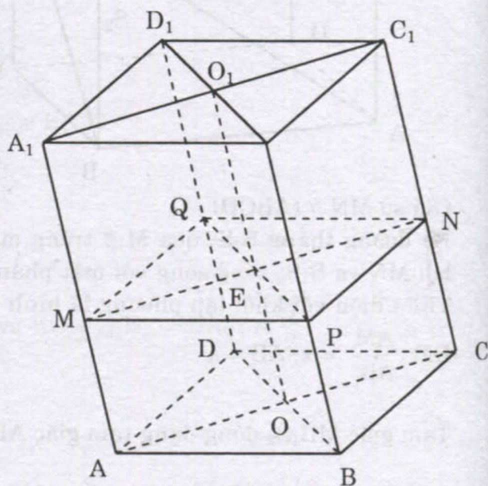
$CN = nCC_1$

$AA_1 = CC_1 = BB_1$

Suy ra $BP = CB = \dfrac{m+n}{2}BB_1$

$PB_1 = BB_1 - BP = \dfrac{2-m-n}{2}BB_1$

$\dfrac{BP}{PB_1} = \dfrac{m+n}{2-m-n}$



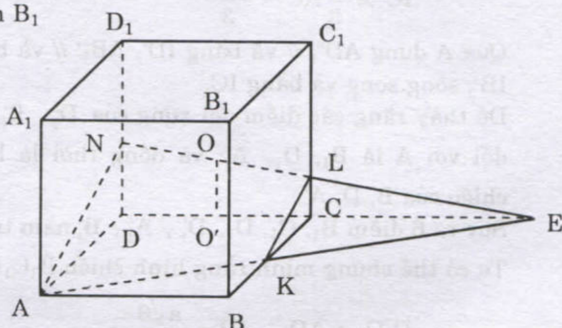
Vậy mặt phẳng α chia cạnh BB_1 theo tỉ số $\dfrac{m+n}{2-m-n}$ (lấy từ đỉnh B).

Bài 21. Cho khối lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ mặt phẳng đi qua A, trung điểm K của BC và tâm O của mặt DCC_1D_1 chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Tìm tỉ số thể tích của hai khối đa diện đó.

Giải

Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa điểm D

Gọi V_2 là thể tích khối đa diện chứa điểm B_1



Ta có: $V_1 = V_{NADE} - V_{LKCE}$

Giả sử AB = a

ΔADE có CK // AD. Định lí Thales

$$\Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{CK}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow CE = a$$

ΔEOO′ có CL // OO′. Định lí Thales

$$\Rightarrow \frac{CL}{OO'} = \frac{EC}{EO'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow CL = \frac{2}{3}OO' = \frac{a}{3}.$$

$$V_{NADE} = \frac{1}{3}ND.S_{ADE} = \frac{2a^3}{9}$$

$$V_{LCKE} = \frac{1}{3}CL.S_{CKE} = \frac{a^3}{36}$$

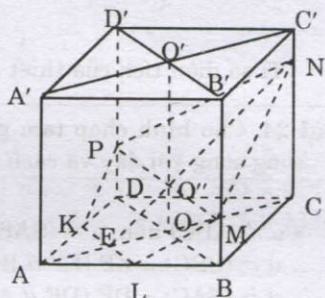
$$\Rightarrow V_1 = \frac{2a^3}{9} - \frac{a^3}{36} = \frac{7a^3}{36}$$

$$V_2 = a^3 - \frac{7a^3}{36} = \frac{29a^3}{36}$$

Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{29}$

Bài 22. Cho hình lăng trụ tứ giác đều. Qua trung điểm của hai cạnh liên tiếp ở đáy, dựng mặt phẳng cắt 3 cạnh bên và tạo với đáy α. Tìm diện tích thiết diện biết rằng cạnh đáy bằng b.

Giải



Gọi K, L là trung điểm của AD và AB, qua giao điểm E giữa KL và AC vẽ EN tạo với BC một góc α (EN nằm trong mặt phẳng chéo AA′CC′)

Qua điểm O″ (giao điểm của trục CO′ với EN) dựng PM // BD (trong mặt phẳng chéo BB′D′D)

Ngũ giác KLMNP là thiết diện cần tìm

Áp dụng công thức S′ = S.cosα

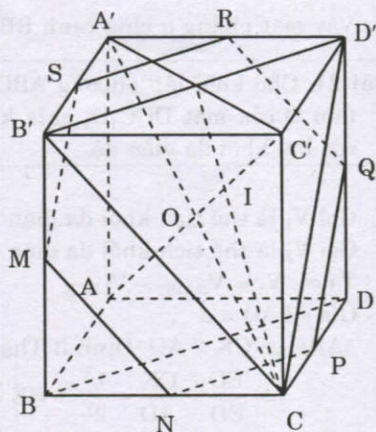
S′ là diện tích của KLBCD = $\dfrac{7b^2}{8}$ nên S = $\dfrac{7b^2}{8\cos\alpha}$.

Bài 23. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ với cạnh a.

a) Xác định hình chiếu của hình lập phương lên một mặt phẳng vuông góc với một đường chéo. Tính diện tích của hình chiếu.

b) Dựng thiết diện đi qua tâm và vuông góc với đường chéo nói trên. Tính diện tích thiết diện tìm tỉ số diện tích thiết diện với diện tích hình chiếu.

Giải



a) Không làm mất tính chất tổng quát của bài toán, ta tìm hình chiếu của hình lập phương trên mặt phẳng đi qua điểm A đồng thời vuông góc với đường chéo AC′.

Dễ thấy rằng AC′ cắt (CB′D′) tại điểm I và

$$IC' = \frac{1}{3}AC' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Qua A dựng AD'_1 // và bằng ID′, AB_1' // và bằng IB′, song song và bằng IC.

Dễ thấy rằng các điểm đối xứng của D'_1, B'_1, C_1 đối với A là B_1, D_1, A'_1 và đồng thời là hình chiếu của B, D, A′.

Suy ra 6 điểm B_1, C_1, D_1, D'_1, A'_1, B'_1 nằm trên mặt phẳng vuông góc với AC′ tại A.

Ta có thể chứng minh rằng hình chiếu $B_1C_1D_1B'_1A'_1D'_1$ là lục giác đều cạnh

$$D_1C_1 = AD_1 = ID = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Do đó diện tích $B_1C_1D_1B'_1A'_1D'_1$ = 6 diện tích tam giác $AC_1B_1 = 6\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2$

b) Thiết diện đi qua O và vuông góc với đường chéo AC′ phải // với mặt phẳng (CB′D′) do đó trong hình chữ nhật DCB′A′ qua C dựng SP // A′D

Trong hình vuông ABCD, dựng PN // BD; trong hình vuông AA′B′B dựng SM // A′B và dựng SR // D′B′; RQ // DA′. Các điểm M, N, P, Q, R, S chính là trung điểm của các cạnh BB′, BC, CD, DB′, A′D′, A′B′, suy ra MN bằng NP bằng PQ bằng QR bằng RS bằng SM bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và OS bằng OM bằng ON bằng OP bằng OQ bằng OR bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

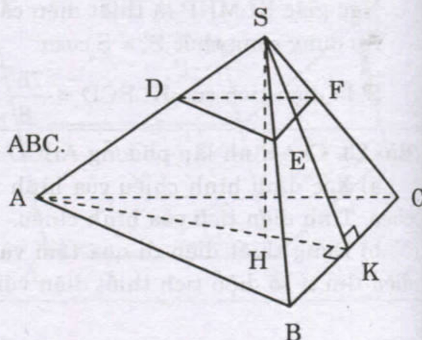
Do đó thiết diện là lục giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Diện tích MNPQRS = 6 diện tích tam giác = $6\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Tỉ số diện tích của thiết diện và diện tích hình chiếu bằng $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4} : a^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}$.

Bài 24. Cho hình chóp tam giác đều có đường cao h, cạnh bên *l* tìm diện tích của thiết diện song song với đáy và cách đáy 1 khoảng là a. (h > a)

Giải



- α // (ABC) nên: a ∩ (SAB) = DE (DE // AB)
  α ∩ (SBC) = EF (EF // BC)
  α ∩ (SAC) = DF (DF // AC)
  Thiết diện là tam giác DEF đồng dạng với tam giác ABC.
- Tìm diện tích thiết diện
  Gọi h = SH bằng chiều cao hình chóp S.ABC
  $h_1 = SH_1$ bằng chiều cao của hình chóp S.DEF
  S là diện tích tam giác ABC
  S_1 là diện tích tam giác DEF

Ta có: $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{h_1^2}{h_2^2} = \dfrac{(h-a)^2}{h^2}$

Suy ra $S_1 = S\dfrac{(h-a)^2}{h^2}$

Gọi SK là đường cao của tam giác SBC suy ra

Tam giác SAH cho: $AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{l^2 - h^2}$

$$AK = \frac{3}{2}AH = \frac{3}{2}\sqrt{l^2 - h^2}$$

$$KB = AK.\tan 30^0$$

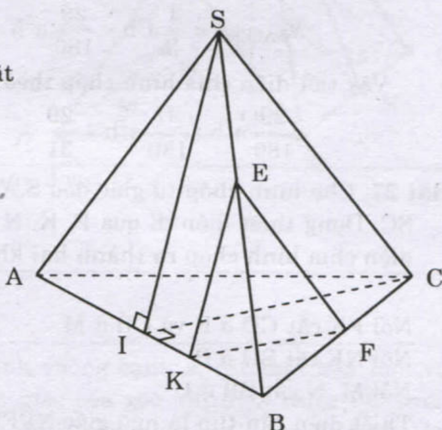
$$KB = \frac{3}{2}\sqrt{l^2 - h^2}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{l^2 - h^2}$$

$$S = 3\sqrt{3}\left(\frac{l^2 - h^2}{4}\right)$$

$$S_1 = 3\,\frac{\sqrt{3}(l^2 - h^2)}{4}.\frac{(h-a)}{4}.$$

Bài 25. Cho tứ diện đều S.ABC cạnh a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB và BC. Mặt phẳng α đi qua EF và vuông góc với AB chia thể tích hình chóp theo tỉ số nào?

Giải



- Gọi I là trung điểm của AB

  Mặt phẳng $\alpha \perp AB$ nên $\alpha \perp SI$ và do đó α cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến EK // SI

  Vậy thiết diện là tam giác EFK cân tại K.
- Thể tích hình chóp

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h = \frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$$

$$V_{EKBF} = \frac{1}{3}S_{BKF}.\frac{h}{2} = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{32} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{192}$$

$$V_{SAEFC} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{12} - \frac{a^2h\sqrt{3}}{192} = \frac{15a^2h\sqrt{3}}{192}$$

Thiết diện chia thể tích hình chóp theo tỉ số:

$$\frac{a^2h\sqrt{3}}{192} : \frac{15a^2h\sqrt{3}}{192} = \frac{1}{15}.$$

Bài 26. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Trên CD kéo dài lấy 1 điểm M sao cho MD = 2DC. Qua M, B và trung điểm E của SC dựng mặt phẳng. Mặt phẳng này chia thể tích hình chóp theo tỉ số nào?

Giải

- Mặt phẳng (MBE) cắt (ABCD) theo BM, cắt (SBC) theo BE.

  Mặt phẳng (MBE) cắt (SDC) theo giao tuyến qua E và M, $SD \cap EM = F$

  ⇒ Thiết diện là tứ giác BEFG
- $\dfrac{AB}{MD} = \dfrac{AG}{GD} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $AG = \dfrac{1}{2}GD$ suy ra $DG = \dfrac{2}{3}AD$

Vẽ E′E // CD: $\dfrac{EF}{FM} = \dfrac{EE'}{MD} = \dfrac{\frac{1}{2}CD}{2CD} = \dfrac{1}{4}$

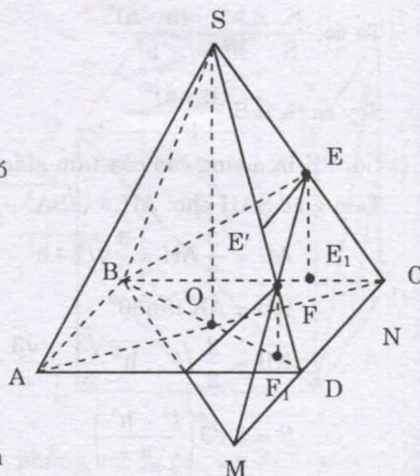
Suy ra $E'F = \dfrac{1}{4}.\dfrac{4}{5}E'D = \dfrac{2}{5}SD$

Gọi đường cao của hình chóp là h, cạnh là a. Ta có

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}a^2h$$

Kẻ $EE_1 \perp (ABCD)$: $E_1 \in ACEE_1 = \dfrac{h}{2}$

Kẻ $FF_1 \perp (ABCD)$: $F_1 \in BD$ và $FF_1 = \dfrac{2}{5}h$



$$V_{BCEGDF} = V_{chóp\ MBCE} - V_{MGDF}$$

$$V_{EBCM} = \frac{1}{3}S_{BCM}.EE_1 = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.3a.\frac{h}{2} = \frac{1}{4}a^2h$$

$$V_{FDMG} = \frac{1}{3}S_{DHM}.FF_1 = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.a.2a.\frac{2}{5}h = \frac{4}{45}a^2h$$

$$V_{BCDGEF} = \frac{1}{4}a^2h - \frac{4}{45}a^2h = \frac{29}{180}a^2h$$

$$V_{SABEFG} = \frac{1}{3}a^2h - \frac{29}{180}a^2h = \frac{31}{180}a^2h$$

Vậy tiết diện chia hình chóp theo tỉ số:

$$\frac{29}{180}a^2h : \frac{31}{180}a^2h = \frac{29}{31}$$

Bài 27. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi F, K, N là trung điểm của các cạnh AD, AB, SC. Dựng thiết diện đi qua F, K, N và hình chóp nói trên.Chứng tỏ rằng mặt phẳng thiết diện chia hình chóp ra thành hai khối đa diện tương đương. (Có thể tích bằng nhau).

Giải

Nối FK cắt CD ở E và CB ở M

Nối NE cắt SD ở P

Nối M, N cắt SB ở L

Thiết diện cần tìm là ngũ giác NPFKL

Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh C và V_2 là phần còn lại, ta có:

$$V_1 = V_{NEMC} - V_{PEDF} - V_{LBKM}$$

Trong mặt phẳng (SCB) kẻ NR // CB

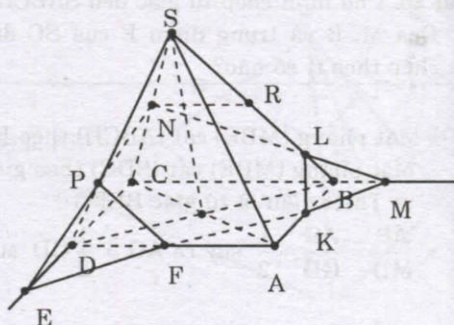
Vì $BM = AF = \dfrac{1}{2}BC = NR$ nên $\Delta NRL = \Delta MBL$ suy ra $BL = \dfrac{1}{2}BR = \dfrac{1}{4}BS$

Tương tự: $PD = \dfrac{1}{4}SD$

Gọi đường cao của tứ giác đều là h và cạnh đáy là a thì $V = \dfrac{1}{3}a^2h$

$$V_{NCEM} = \frac{1}{3}S_{MCE}h_1 = \frac{1}{6}.\frac{3}{2}a.\frac{3}{2}a.\frac{h}{2}$$

$$= \frac{9}{48}a^2h$$



Vậy $V_{NCEM} = \dfrac{9}{48}a^2h$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}a^2h$$

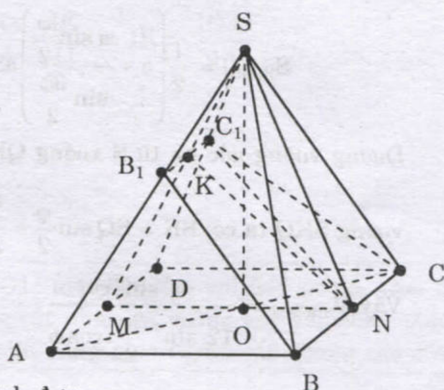
$$V_{PEDF} = V_{LKBM} = \frac{1}{6}.\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}a.\frac{h}{4} = \frac{91}{96}a^2h$$

Do đó ta có: $V_1 = \dfrac{9}{48}a^2h - 2.\dfrac{1}{96}a^2h = \dfrac{1}{6}a^2h = \dfrac{1}{2}V$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{1}{2}V \Rightarrow V_1 = V_2.$$

Bài 28. Trong hình chóp tứ giác đều, các mặt bên làm với đáy góc α. Qua cạnh của đáy dựng mặt phẳng tạo với đáy góc β. Cạnh của đáy bằng a. Hãy tính diện tích thiết diện.

Giải



Thiết diện BCB_1C_1 là hình thang cân. Gọi M, N là trung điểm của cạnh AD và BC. Mặt phẳng (MNS) cắt thiết diện theo NK (K là trung điểm B_1C_1). Ta có

$\widehat{NMS} = \widehat{MNS} = \alpha \widehat{MNK} = \beta$

Ta tính KN và B_1C_1 trong tam giác MKN có

$$\frac{KN}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Vậy $KN = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

Tam giác ADS đồng dạng với tam giác B_1C_1S nên tính được:

$$B_1C_1 = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Vậy $\quad S = \dfrac{a^2\sin^2\alpha.\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

Bài 29. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCS đáy là hình vuông cạnh a, các mặt bên làm với mặt phẳng đáy 1 góc φ. Ta dựng mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh BC trong hình chóp (tức là góc nhị diện của hình chóp xác định bởi mặt (SBC) và (BCDA). Mặt phẳng phân giác này cắt SD ở M và SA ở N. Tính thể tích hình chóp SBCMN theo a và φ.

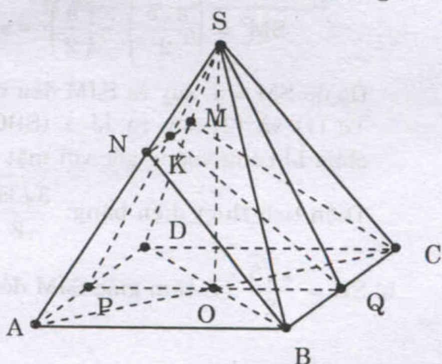
Giải

Các mặt phẳng (SAD) và (BCMN) theo thứ tự đi qua các đường // AC và BC nên giao tuyến MN của chúng cũng // với những đường đó. Từ đó suy ra BCMN là hình thang cân. Gọi K, P, Q là trung điểm của MN, AD, BC

$$S_{BCMN} = \frac{MN + BC}{2}.KQ$$

$$SP = SQ = \frac{a}{2\cos\varphi}$$

Trong đó ΔKPQ ta có: $\dfrac{KQ}{\sin\varphi} = \dfrac{PQ}{\sin\dfrac{3\varphi}{2}}$



Do đó: $KQ = \dfrac{a\sin\varphi}{\sin\dfrac{3\varphi}{2}}$

Lại có tam giác SMN đồng dạng với tam giác SDA nên $\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{SK}{SP} \Rightarrow MN = a\dfrac{SK}{SP}$

Nhưng $\dfrac{SK}{\sin\dfrac{\varphi}{2}} = \dfrac{SQ}{\sin\dfrac{3\varphi}{2}} \Rightarrow \dfrac{SK}{SP} = \dfrac{SK}{SQ} = \dfrac{\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\sin\dfrac{3\varphi}{2}}$

Và do đó: $MN = a.\dfrac{SK}{SP}$ hay $MN = \dfrac{\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\sin\dfrac{3\varphi}{2}}$

$$S_{BCMN} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\sin\dfrac{3\varphi}{2}}\right)a.\frac{a\sin\dfrac{\varphi}{2}}{\sin\dfrac{3\varphi}{2}} = \frac{a^2\sin^2\varphi\cos\dfrac{\varphi}{2}}{\sin^2\dfrac{3\varphi}{2}}$$

Đường vuông góc hạ từ S xuống QK là đường cao của hình chóp S.BCMN. Trong tam giác vuông SKQ ta có: $SK = SQ\sin\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{a\sin\dfrac{\varphi}{2}}{2.\cos\varphi}$

Vậy $V_{SBCMN} = \dfrac{a^3\sin^3\varphi}{12.\sin^2\dfrac{3\varphi}{2}.\cos\varphi}$.

Bài 30. Cho hình chóp tứ diện đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, trên trung tuyến SM của mặt bên (SBC) ta lấy trung điểm I. Qua I và AD dựng thiết diện cắt SB ở E và SC ở F.

a) Chứng tỏ rằng thiết diện (ADEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích của thiết diện.

b) Tìm tỉ số thể tích của 2 phần hình chóp do thiết diện phân chia.

c) Đoạn AI cắt hình cầu nội tiếp trong hình chóp đã cho tại 2 điểm. Tính độ dài của đoạn thẳng nằm trong hình cầu nội tiếp.

Giải

a) Thiết diện là hình thang cân.

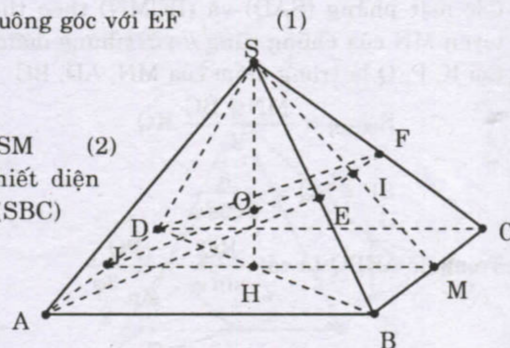
Gọi J là trung điểm của AD, suy ra IJ vuông góc với EF (1)

$$SM^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

Do đó SM = a, suy ra SJM đều và $IJ \perp SM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp (SBC)$ và thiết diện chứa IJ cũng vuông góc với mặt phẳng (SBC)

Diện tích thiết diện bằng: $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{8}$

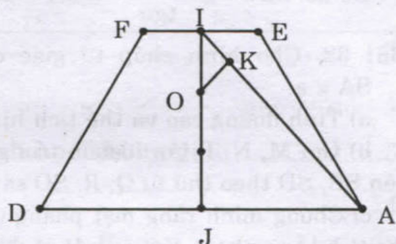


b) $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì tam giác SJM đều)

Vậy $V = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Gọi V_1 là thể tích của hình chóp có đỉnh S và thiết diện ADEF có SI là chiều cao nên:

$$V_1 = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}a^2}{8}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$



Gọi V_2 là thể tích khối đa diện còn lại thì:

$$V_2 = V - V_1 = \frac{5a^3\sqrt{3}}{48}$$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$

c) Tâm mặt cầu tại O (giao điểm của SH và IJ). Do tính chất đối xứng, mặt cầu nội tiếp giao với mặt phẳng SJM theo đường tròn lớn bán kính R = OI.

Xét 2 tam giác đồng dạng ΔIOK và ΔAIJ, ta có $\frac{IO}{IA} = \frac{IK}{IJ} \Rightarrow IK = \frac{IO.IJ}{IA}$

Mà $\begin{cases} IO = \frac{1}{3}IJ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \\ IA = \sqrt{IJ^2 + JA^2} = a \end{cases}$

Do đó $IK = \frac{a}{4}$.

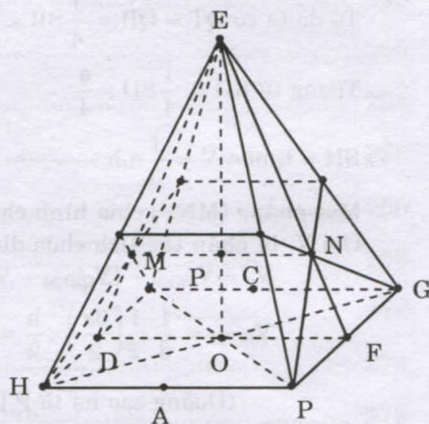
Bài 31. Cho hình chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a. Các mặt bên tạo với đáy góc α. Qua 2 cạnh đối diện của đáy hình chóp dựng 2 mặt phẳng cắt nhau và vuông góc với nhau. Xác định độ dài của giao tuyến nằm trong hình chóp, biết rằng giao tuyến cắt đường cao của hình chóp.

Giải

Xét hình chóp tứ giác đều E.HPGQ, MN là giao tuyến giữa 2 mặt phẳng qua HP, GQ vuông góc với nhau.

MN // HP và MN cắt OE tại B; M, N nằm trên trung đoạn ED, EF/

Kéo dài PM và GN; HM và QN ta được thiết diện tạo thành bởi 2 mặt phẳng nói trên với hình chóp.



Gọi A_1, C_1 là giao điểm của AB, CB với hình chóp (cũng nằm trên trung đoạn SA, SC với A và C là điểm giữa của HP, GQ)

ABC là góc của 2 mặt phẳng nói trên theo giả thiết có $\widehat{ABC} = 90^0$.

Tam giác ABC là vuông cân nên $BO = AO = CO = \frac{a}{2}$

Tam giác EMN đồng dạng tam giác EDF nên DF = a, lại có $MN = a.\frac{BE}{OE}$

Mà $OE = AO.tg\alpha = \frac{a}{2}.tg\alpha$

$$BE = OE - BO = \frac{a}{2}(tg\alpha - 1)$$

Do đó: $MN = a\dfrac{tg\alpha - 1}{tg\alpha} = a(1 - \cot\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}.a.\sin(\alpha - 45^0)}{\sin\alpha}$.

Bài 32. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, ABCD là hình vuông có cạnh bằng a và SA = a.

a) Tính đường cao và thể tích hình chóp theo a.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SC. Mặt phẳng (MNP) cắt các cạnh bên SB, SD theo thứ tự Q, R. SO sánh các đoạn thẳng QB và RD với SB.

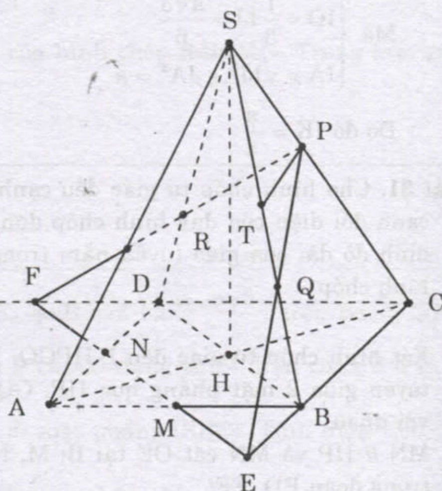
c) Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) chia hình chóp đã cho thành 2 phần tương đương (có thể tích bằng nhau). Kết quả đó có đúng khi SA = SB = SC = SD ≠ a hay không?

Giải

Gọi H là chân đường cao hình chóp. $H = AC \cap BD$

a) Tam giác vuông SHB bằng tam giác vuông AHB suy ra $SH = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$



b) MN cắt BC ở E và CD ở F

So sánh 3 tam giác: BME, AMN, DNF

ta có $BE = DF = \dfrac{1}{2}DC = \dfrac{a}{2}$

$Q = EF \cap SB$; $R = PF \cap SD$

Trong mặt phẳng (SBC) vẽ PT // CB,

ta có tam giác PTQ bằng tam giác EBQ.

Từ đó ta có $QT = QB = \dfrac{1}{4}SB = \dfrac{a}{4}$

Tương tự $RD = \dfrac{1}{4}SD = \dfrac{a}{4}$

c) SH = h nên $V = \dfrac{1}{3}$ a.h.

Mặt phẳng (MNP) chia hình chóp ra hai phần.

Gọi V_1 là phần thể tích chứa đỉnh S và V_2 là phần thể tích kề với đáy ABCD

$$V_2 = V_{PCEF} - [V_{QBEM} - V_{RDNF}]$$

$$V_{PCEF} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2}\right)^2.\frac{h}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{3a}{2}\right)^2.\frac{h}{2} = \frac{3a^2h}{16}$$

(Đường cao hạ từ P là $\dfrac{h}{2}$ và $CE = CF = \dfrac{3a}{2}$)

$$V_{QBEM} = V_{RDNF} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BM\frac{h}{4} = \frac{a^2h}{6.16}$$ (Đường cao hạ từ Q và từ P đều bằng $\dfrac{h}{4}$)

$$V_2 = \frac{3a^2h}{16} - 2\left(\frac{a^2h}{6.16}\right) = \frac{1}{2}V_{SABCD}$$

Do đó $V_1 = V_{SABCD} - V_2 = \dfrac{1}{3}a^2.h - \dfrac{1}{6}a^2.h = \dfrac{a^2.h}{6} = V_2$

Vậy $V_1 = V_2$.

MỤC LỤC

ISBN: 978-604-934-839-6



Giá: 80.000đ